Université du Littoral **Année universitaire 2012-2013**
Master 2 ème année **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit analyse

Séance 1 : Développements limités.

---

1. Développements limités usuels au voisinage de 0

$$
\begin{array}{rcl}
e^x & = & 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^2}{n!} + o(x^n) \\
\sin x & = & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\cos x & = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sinh x & = & x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\cosh x & = & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
(1+x)^a & = & 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \forall a \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} & = & 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1-x} & = & 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - ... - \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} & = & 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^3 + ... + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1-x}} & = & 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^3 + ... +^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o(x^n) \\
\log(1+x) & = & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\arctan x & = & x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{argth } x & = & x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arcsin x & = & x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + ... + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o(x^{2n+2}) \\
\text{argsh } x & = & x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + ... + \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n+1)} + o(x^{2n+2})
\end{array}
$$

Exercice 1. Calculer le développement limité de
1. $x \mapsto \sin x$ à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{4}$,
2. $x \mapsto (\arctan x)^2$ à l'ordre 8 en 0,
3. $x \mapsto \cos(\sin x)$ à l'ordre 5 en 0,
4. $x \mapsto \tan x$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 2. Calculer les développement limité de
1. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de $x = 0$,
2. $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $x = 0$,
3. $\dfrac{\ln x}{x^2}$, à l'ordre 4 au voisinage de $x = 1$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :
1. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ lorsque $x \to +\infty$,
2. $\dfrac{a^x - b^x}{x}$ lorsque x tend vers 0,
3. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - \cos \frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}^2}}$,

Exercice 4. Pour chacune des fonctions suivantes, écrire l'équation de la tangente au point indiqué et trouver la position du graphe par rapport à celle-ci.
1. $f_1(x) = (\sin x)^2 - \frac{x^2}{1+x^2}$ en $x = 0$,
2. $f_2(x) = \sin x + \arcsin x$ en $x = 0$,
3. $f_3(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{2+x}$ en $x = 1$.

Exercice 5. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \big(1+\sqrt{1+x^2}\big)^{\frac{1}{2}}, \quad f_2(x) = \log\left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad f_3(x) = (1+2x)^{\frac{1}{1+x}},$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}, \quad f_5(x) = e^{\sinh x} - \log\left|\tan\big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\big)\right|.$$

Exercice 6. Calculer le développement limité

1. à l'ordre 4, au voisinage de 1, de l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{-1+\log x}}$

2. à l'ordre 4, au voisinage de $+\infty$, de l'application $x \mapsto (x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$

3. à l'ordre 3, au voisinage de $\frac{\pi}{6}$, de $x \mapsto \log(2\sin x)$

Exercice 7. Donner la limite, lorsque x tend vers 0^+, des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin x - \tan x}, \quad f_2(x) = \frac{x^{x^x}\log x}{x^x - 1}, \quad f_3(x) = \frac{(1+x)^{\frac{\log x}{x}} - x}{x\,(x^x-1)}$$

$$f_4(x) = (\cos x)^{\cot x^2}, \quad f_5(x) = \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Montrer que u_n est majorée par $2\sqrt{n}$.

2. Donner un équivalent de u_n.

3. Calculer les deux premiers termes du développement asymptotique de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes et la position du graphe par rapport à celles-ci.

$$f_1(x) = 2x - 3 + \frac{\log|1+x|}{1-x}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+1},$$

$$f_3(x) = \frac{xe^{x+\frac{1}{x}}}{e^x - 1}, \quad f_4(x) = x^{\frac{\log x}{1-\log x}}.$$

Exercice 10. À l'aide de développements asymptotiques pour $x \to +\infty$, préciser la branche infinie de la courbe (C_i) d'équation $y = f_i(x)$ dans un repère du plan.

$$f_1(x) = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{x+1}\sin\frac{2}{\sqrt{x}}, \quad f_2(x) = x\sqrt{(x)}\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}\right),$$

$$f_3(x) = x\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta^4+1}}, \quad f_4(x) = \frac{(x^2+1)^{x\ln x}}{x^{2x\ln x - 1}} - x.$$

Exercice 11 (Extrait de l'écrit du CAPES 2010)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On étudie la série de terme générale a_n. On montre qu'elle est convergente et on donne une représentation de sa somme, notée γ et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on étudie la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}.$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\int_p^{p+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que

$$0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0,1]$.

3. Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$a_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{t}{t+p}\mathrm{d}t,$$
puis montrer que pour tout entier $p \geq 2$ on a :
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4. En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :
$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

5. Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
$$H_n =_{n\to\infty} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. Montrer que
$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7. Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

Exercice 12 (Extrait de l'écrit de CAPES 2009)**.** Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.

2. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.

3. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour $n \geqslant 0$, on a
$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)W_n.$$

4. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a
$$\begin{cases} W_{2p} & = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} & = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

6. Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1,$$
et en déduire $W_n \sim_n W_{n+1}$.

7. Montrer $W_n \sim_n \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} W_n$.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 1$, par
$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$
et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie, pour $n \geqslant 2$, par
$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}.$$

8. Exprimer simplement v_n en fonction de n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$ de la suite $(v_n)_n$.

9. En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente. Montrer alors que les suites $(\ln u_n)_n$ et $(u_n)_n$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que
$$n! \sim_n K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

10. En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que
$$n! \sim_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$