

Préparation écrit analyse

Séance 3 : Équations différentielles.

1. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes, en précisant sur quels intervalles maximaux ces solutions sont valables.

(1) $y' - \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0$

(2) $y' + y = 3x^2 + x - 4,$

(3) $x(1 + x^2)y' - y(x^2 + 1) + 2x = 0.$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle $x(1-x)y' + (1-x)y = 1$. Pour quels points du plan, passe-t-il une courbe intégrale unique ?

Exercice 3. Pour quelles valeurs de λ , la solution générale de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y' = (4x + 1 + \lambda)y$$

est-elle un polynôme ?

Exercice 4. Montrer que l'équation $y' - 2y = xe^{-|x|}$ admet des solutions continues sur \mathbb{R} . Déterminer la solution bornée à l'infini.

Exercice 5. Intégrer les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 4y' = x^2 - 2x,$

(2) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x},$

(3) $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x},$

(4) $y'' - 3y' + 2y = \cos x,$

(5) $y'' + 4y = \cos 2x,$

(6) $y'' + y = x \sin x + e^x + x^2;$

(7) $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}.$

2. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1^{ER}ORDRE REMARQUABLE

Exercice 6. Intégrer les équations différentielles à variables séparables suivantes :

(1) $y' - \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0,$

(2) $y - xy' = y^{\frac{3}{4}},$

(3) $(1 + x^2)y' + 2x(1 + y^2) = 0,$

(4) $(1 + x^2)y' + 2x(1 - y^2) = 0,$

(5) $y' = (x + y)^2.$

Exercice 7. Intégrer les équations homogènes suivantes :

(1) $x^2y' = x^2 + y^2 - xy,$

(2) $x^2 - 2y^2 + 2xyy' = 0,$

(3) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2},$

(4) $2(xy' - y) = x\left(1 - e^{\frac{x-y}{x}}\right),$

(5) $(x - y)y' = y,$

(6) $(x^2 - xy)y' = -y^2.$

3. SYSTÈME DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Exercice 8.

1. Résoudre sur \mathbb{R} le système différentielle

$$(E) \begin{cases} x' &= 5x - y + 9z \\ y' &= 3x + 4y \\ z' &= x + y + z \end{cases}$$

2. Déterminer l'unique solution vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 0$.

Exercice 9. Résoudre sur \mathbb{C} et sur \mathbb{R} le système différentielle

$$(E) \begin{cases} x' &= x \\ y' &= -2x + z \\ z' &= 2x - y \end{cases}$$

Exercice 10. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $y'''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$.

Exercice 11. Soit (E) l'équation $xy'' + y' - xy = 0$.

1. Chercher les solutions développable en série entière de (E) .
2. Ecrire les solutions trouvée à l'aide de fonction usuelle.
3. E est-elle linéaire, si oui quelle est la dimension de l'espace des solutions ?
4. Utiliser la méthode la variation de la constante pour trouver toutes les solutions de E .