Université du Littoral **Année universitaire 2011-2012**
Master 2 ème année **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit analyse

Séance 4 : Intégrale généralisée.

Exercice 1. Etudier l'intègrabiliter des applications suivantes

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}(\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1})$ sur $[1, +\infty[$

2. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $[0, +\infty[$ et $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $[1, +\infty[$

3. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+x}}$ sur $]0, 1]$ et $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{\sqrt{x}+x^2}$ sur $]0, 1]$

4. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3+x^2}$ sur $]0, 1]$ et — $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^6}}$ sur $]-1, 1[$

5. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}}$ sur $]0, +\infty[$ et $f : x \mapsto \dfrac{1+x^2e^{-x}}{x^2+e^{-2x}}$ sur $]-\infty, +\infty[$

Exercice 2. Etudier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\frac{\pi}{x}\right|^{\frac{1}{x}} \mathrm{d}x$.

Exercice 3. Existence et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-3x+2x^2)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4. Existence et calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et bornée. Montrer que si f^2 est intégrable sur I, alors f l'est aussi. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas que f est bornée.

Exercice 6. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g, h = I \to \mathbb{R}$ continues par morceaux. On suppose que f et h sont intégrables sur I et que $f \leqslant g \leqslant h$. Montrer que g est intégrable sur I.

Exercice 7. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $N(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} |x+ty|e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8.

1. Existence et calcul, pour tout $a \in \mathbb{R}$, de

$$I(a) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

2. Déterminer $\inf_{a\in\mathbb{R}} I(a)$ et $\inf_{a\in\mathbb{Z}} I(a)$.

Exercice 9. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sous réserve d'existence
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$
1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de I_n.
2. A l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 10. Existence et calcule de
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{i+\cos x}, \quad J(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt}e^{-|t|}\,\mathrm{d}t \text{ pour } z \in \mathbb{C}.$$
Exercice 11. Trouver
$$\lim_{x\to 0^+} \int_{2x}^{2x} \frac{\sin t}{\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t, \quad \lim_{x\to 0} \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}}\,\mathrm{d}t.$$
Exercice 12. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\,\mathrm{d}t$, lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 13. Former un développement asymptotique de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}$ à l'ordre $o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)$, lorsque $x \to +\infty$..

Exercice 14. Soient $a \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'existence de
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}P(x+a)\,\mathrm{d}x$$
et exprimer I à l'aide des dérivées successives de P en a.

Exercice 15. On note, sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+\ln t)}\,\mathrm{d}t$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier le sens de variation de f et sa convexité.
3. Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.
4. Tracer la courbe représentative de f.
5. Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 16. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue $\geqslant 0$, telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
1. Montrer que l'application
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall p \in \mathbb{R}$, $(F'(p))^2 \leqslant F(p)F''(p)$.
2. En déduire que, si de plus $f \neq 0$, alors l'application $\ln \circ F$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Existence et calcul , pour $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ de
$$F(p,q) = \int\int_{[0,+\infty[^2} e^{-px-qy}\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$