Université du Littoral Côte d'Opale — 2016–2017
Master 1 ère année — MEEF

Probabilité

1. Espace probabilisé

Definition. Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Il permet de modéliser une expérience aléatoire. Il est constitué de l'*univers* ou *ensemble des états* Ω, des *événements* $\mathcal{A}$ et de la *loi de probabilité* $\mathbb{P}$.

L'univers Ω est l'ensemble des résultats possible de l'expérience.

Exercice 1. Déterminer un univers pour les expériences suivantes:

1. Lancer d'une pièce de monnaie.

2. Deux lancers successifs d'une même pièce de monnaie.

3. Lancer d'un dé.

4. Deux lancé successif d'un même dé.

5. Lancer d'un même dé indéfiniment.

6. Durée de vie d'un individu.

7. Lancer de deux dés identiques simultanément.

8. Trajectoire d'une mouche dans le ciel pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

Un événement est une propriété dont on peut dire si elle est réalisée ou non, une fois l'issue de l'expérience connue. A chaque événement correspond une partie (sous-ensemble de Ω), c'est-à-dire, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Si Ω est dénombrable (ce qui implique donc le cas fini) on pose $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le cas Ω continue est un peu plus subtile et nécessite des notions de théorie de la mesure. On en reparlera plus tard.

Exercice 2. Cet exercice reprend la numérotation du précédent. Décrire les événements suivants comme des sous-ensembles de l'univers Ω.

2. Le premier jet donne pile.

4. La somme obtenue est 5.

5. Le premier 1 est obtenu au N-ième lancer.

6. La personne atteint au moins 50 ans.

8. La mouche ne bouge pas.

Nous souhaitons maintenant associer à chacun des événements une probabilité, qui mesure la vraisemblance que l'on accorde à priori à l'événement avant la réalisation de l'expérience.

Definition. Une probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ possédant les propriétés suivantes :

– L'événement certain est de probabilité 1 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

– *Axiome de σ-additivité* : pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé *espace probabilisé*.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient A, B deux événements de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que si A et B sont disjoints alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. En déduire $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ puis $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

2. Montrer que $A \subseteq B$ implique $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

3. Etablir $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n=1}^N$ est une famille d'événements de $\mathcal{A}$, alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\ldots,N\}\\ \mathrm{card}(J)=n}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in J} A_j\right)$$

Cette formule est dite de Poincaré.

Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

- *Soit $(A_n)_{n\leqslant 1}$ une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$. Soit $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, alors :*
$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
- *Soit $(B_n)_{n\leqslant 1}$ une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$. Soit $B = \bigcap_{n\geqslant 1} B_n$, alors :*
$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

2. Cas de l'univers fini

Dans toute cette section, on suppose que l'univers Ω est fini. On prend alors $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Proposition. *Une probabilité dur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est caractérisée par sa valeur sur les* événements élémentaires *(ou singleton) $\omega \in \Omega$. Réciproquement, à toute famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ telle que :*

(1) *pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant p_\omega \leqslant 1$,*
(2) $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$,

on peut associer une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Exercice 4. Démontrer la proposition précédente.

Definition. Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ abec Ω finie est dite *uniforme* si $\mathbb{P}(\{\omega\})$ ne dépend pas de $\omega \in \Omega$. On dit alors que l'on est en situation d'*équiprobabilité*.

Corollaire. *Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé avec $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Exercice 5. On lance deux dés identiques à six faces successivement, calculé la probabilité que la somme des deux valeurs obtenues soit 5. Et si on avait lancé les deux dés simultanément ?

Exercice 6. Supposons que 23 personnes sont dans une même salle. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient l'anniversaire le même jour ? (Personne n'est né le 29 février.)

Exercice 7. Dans une course, n chevaux sont au départ. On suppose qu'ils ont tous la même chance de gagner. Calculer la probabilité de gagné le tiercé avec un ticket :

1. dans l'ordre,

2. dans l'ordre ou dans un ordre différent,

3. dans un ordre différent ?

Exercice 8. Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :

1. une seule paire (deux cartes de même hauteur);

2. deux paires;

3. un brelan (trois cartes de même hauteur et pas de paire ni de carré);

4. un carré (quatre cartes de la même hauteur);

5. un full (une paire et un brelan)?

Exercice 9. On considère la distribution aléatoire de r boules dans n urnes. Quelle est la probabilité qu'une urne donnée contienne exactement k boules? $(k \leqslant r)$

Exercice 10. Combien l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ a-t-elle de solutions entières et non négatives ?

3. Cas de l'univers infini dénombrable.

Dans cette section Ω est supposé infini et dénombrable. Comme pour le cas fini, l'ensemble des événements est $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. On associe à chaque événement élémentaire $\omega \in \Omega$, sa probabilité, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega \in [0,1]$, avec :

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$$

La somme précédente est bien définie de la manière suivante. Comme Ω est dénombrable, il est possible d'énumérer les événements élémentaires : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$. On pose alors

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = \sum_{n\geqslant 1} p_{\omega_n}.$$

Comme cette série est absolument convergentes, elle ne dépend pas de l'énumération des événements choisie.

Pour $A \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on pose :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \mathbb{1}_A(\omega) = \sum_{n\geqslant 1} p_{\omega_n} \mathbb{1}_A(\omega_n)$$

Exercice 11. On jette une pièce de monnaie équilibrée, jusqu'à l'obtention du premier pile.

1. Déterminer un univers possible.

2. Donner la probabilité que le premier pile soit obtenu au k-ième jet.

3. Donner la probabilité que le pile ne sorte jamais.

4. Donner la probabilité que le premier pile sorte après un nombre pair de lancers.

4. Cas de l'univers infini non-dénombrable.

Cette situation est beaucoup plus subtile que dans les cas précédents. On ne peut plus définir une probabilité en définissant celle des singletons (événements élémentaires) car celle-ci est nulle.

La procédure est alors la suivante :

– on détermine une *algèbre* (contient Ω, stable par complément et réunion finie) d'événements intéressants sur laquelle on définit une probabilité;

– on utilise un théorème fondamental de la théorie de la mesure, le "théorème d'extension de Carathéodory", qui affirme qu'une probabilité sur une algèbre s'étend de façon unique en une probabilité sur la tribu engendré par l'algèbre.

Il est suffisant de se rappeler que lorsque l'espace des états est $\mathbb{R}$, on prend comme tribu celle des boréliens (la plus petite tribu engendré par les ouverts de $\mathbb{R}$). On admettra que cette tribu est engendré par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ et qu'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ est entièrement caractérisée par la valeur qu'elle attribue aux intervalles de cette forme.

5. Probabilité conditionnelle

Definition. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on définit la *probabilité conditionnelle de A sachant B* notée $\mathbb{P}_B(A)$, par :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exercice 12. Montrer qu'avec les notations et les hypothèses de la définition précédente le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_B)$ est un espace probabilisé.

Exercice 13. On considère deux lancers successifs d'un même dé. Sachant que le premier jet donne 3 calculer la probabilité que la somme des valeurs obtenues soit strictement supérieur à 6.

Definition. Soit I une partie de $\mathbb{N}$ (finie ou pas). Une famille $(B_i)_{i\in I}$ d'événements de Ω est un système complet d'événements de Ω si et seulement si $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω.

Théorème. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

– Formule des probabilités totales. *Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω, telle que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(B_i) > 0$, et soit $A \in \mathcal{A}$. Alors :*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A\cap B_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{B_i}(A)\mathbb{P}(B_i).$$

– Formule de Bayes *Soient* $A \in \mathcal{A}$ *et* $B \in \mathcal{A}$*, tels que* $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ *et* $\mathbb{P}(B) > 0$ *alors :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})}$$

Exercice 14. Démontrer le théorème précédent.

Exercice 15. (Paradoxe de Simpson). Cet exemple réel provient d'une étude médicale sur le succès de deux traitements contre les calculs réneaux. Le traitement A a été effectué dans les années 1972-1980, et le traitement B dans les années 1980-1985.
La première table montre le succès global et le nombre de traitements pour chaque méthode

Traitement A	Traitement B
273/350 (78%)	289/350 (83%)

La deuxième table montre le succès en fonction de la taille des calculs réneaux

petits calculs		grands calculs	
Traitement A	Traitement B	Traitement A	Traitement B
81/87 (93%)	234/270 (87%)	192/263 (73%)	55/80 (69%)

1. Quel est le traitement le plus performant d'après la première table ? Et la deuxième ?

2. Retrouver les valeurs de la première table à partir de celles de la deuxième.

3. Donner une explication à ce paradoxe.

Exercice 16. On choisit une famille "au hasard" parmi toutes les familles ayant deux enfants.

1. Sachant que la famille choisie a au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?

2. Sachant que l'ainé de la famille choisie est un garçon, quelle est la probabilité que le plus jeune soit aussi un garçon ?

Exercice 17. *Un exemple d'urne de Polya.* Une urne contient au départ 5 boules blanches et 7 noires. Chaque fois que l'on tire une boule, on la réintroduit en rajoutant deux nouvelles boules de la même couleur que celle tirée.

1. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient noires ?

2. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit noire ?

Exercice 18. On considère trois cartes à jouer de même forme. Les deux faces de la première carte on été colorées en noir, l es deux faces de la deuxième en rouge, tandis que la troisième porte une face noire et une face rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte est tirée au hasard et placée sur la table. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

6. Indépendance des événements

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Definition. Deux événements A et B de $\mathcal{A}$ sont dit *indépendants*, si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Exercice 19. On utilise les mêmes notations.

1. Montrer que si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors A et B sont indépendant si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

2. Montrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Exercice 20. Une urne contient 9 boules indiscernables, numérotée de 1 à 9. On tire une boule au "hasard". On note A l'événement "la boule tirée porte un numéro pair" et B l'événement "le numéro tiré est un multiple de 3".

1. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Et si l'urne contient 12 boules ?

7. Variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Souvent on ne travaille pas directement avec des éléments de $\mathcal{A}$ mais avec des valeurs numériques associées. Par exemple, lors de n jets de pile ou face, il sera intéressant d'étudier le nombre de piles obtenus.

Une *variable aléatoire* est une application X de l'univers Ω dans un ensemble E qui sera typiquement $\mathbb{N}^d$, $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$. Lorsque X ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs ($X(\Omega)$ dénombrable) on dit que X est *discrète*. Soit B une partie de E. L'événement $\{X \in B\}$ est la partie de E définie par

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

Hors programme. Afin de pouvoir définir correctement une variable aléatoire, on doit munir E d'une tribu $\mathcal{E}$. Une variable aléatoire est alors une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{E})$, c'est-à-dire, pour tout $B \in \mathcal{E}$, l'événement $\{X \in B\}$ est dans $\mathcal{A}$.

Definition. On reprend les notations précédentes. On définit la *loi de probabilité de* X, notée $\mathbb{P}^X$ de la manière suivante. Pour toute partie B de E telle que $\{X \in B\} \in \mathcal{A}$, on pose

$$\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(\{X \in B\}).$$

Dans le cas où X est une variable aléatoire discrète, $X(\Omega) = \{x_j \mid j \in J\}$ avec J dénombrable, alors la loi $\mathbb{P}^X$ est entièrement caractérisée par les valeurs de $\mathbb{P}^X(\{x_j\})$ pour tout $j \in J$.

Si $X(\Omega) = \mathbb{R}$, la loi de probabilité de X est caractérisée par la donnée de

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ \mathbb{P}^X([a,b[).$$

Definition. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}^X$ à valeur dans $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$). On appelle *fonction de répartition de la loi* $\mathbb{P}^X$ ou encore, par abus, *fonction de répartition de* X, l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \mathbb{P}^X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leqslant t).$$

Proposition. *La fonction de répartition de la loi* $\mathbb{P}^X$ *satisfait aux propriétés suivantes :*
- F_X *est une application croissante,*
- F_X *est continue à droite et admet une limite à gauche en tout* $t \in \mathbb{R}$,
- *si pour* $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = t) = 0$ *alors* F_X *est continue en* t,
- $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$,
- $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$,
- $\mathbb{P}(x < X \leqslant y) = F_X(y) - F_X(x)$,
- $\mathbb{P}(X < x) = F_X(x^-) = \lim_{y\to x^-} F_X(y)$.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que f admet un limite à droite en t si la suite $u_n = f(t + 1/n)$ converge.

2. Enoncer un résultat similaire pour la limite à gauche.

3. Montrer que f a une limite en $+\infty$ si la suite $f(n)$ converge.

4. Enoncer un résultat similaire pour la limite de f en $-\infty$.

Exercice 22. Démontrer la proposition précédente.

Definition. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ (v.a.r) est dite à densité s'il existe une fonction réelle positive p n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité, telle que la fonction de répartition de la loi de probabilité de X s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \mathbb{P}^X(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx.$$

la fonction p est alors appellée *densité de la loi de probabilité de* X.

Proposition. *On a les propriétés suivantes :*
- *l'application* p *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$;
- *la fontion de répartition* F_X *est continue sur* $\mathbb{R}$
- *pour tout intervalle* I *de* $\mathbb{R}$, *non réduit à un point :*

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_I(x)p(x)dx = \int_I p(x)dx.$$

- *pour tout réél* t, $\mathbb{P}(X = t) = 0$;
- *la fonction de répartition est dérivable partout où* p *est continue et, en ces points,* $F_X' = p$.

Toute application positive p, continue sauf en nombre fini de points, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$ existe et vaut 1 est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx$.

Exercice 23. Soit X une variable aléatoire réelle de densité p_X. Déterminer la densité de la variable aléatoire Y dans les cas suivants :

1. $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels, $a \neq 0$;

2. $Y = X^2$;

3. $Y = \exp(X)$.

8. Exemple de loi de probabilité de variables aléatoires.

Dans cette section $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et X désigne une variable aléatoire, $X(\Omega) = \{x_j \,|\, j \in J\}$ où J est dénombrable. Si la variable aléatoire X est discrète alors la loi de probabilité de X est caractérisée par :

$$\forall j \in J,\ \mathbb{P}^X(\{x_j\}) = \mathbb{P}(\{X = x_j\})$$

Loi uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X : \Omega \to \{x_1, ..., x_n\}$, où pour tout $i \neq j$, $x_i \neq x_j$. Si la loi de probabilité de X est donnée par :

$$\forall j \in \{1, ..., n\},\ \mathbb{P}^X(\{x_j\}) = \frac{1}{n}.$$

alors la loi de X est appelée *loi uniforme discrète sur* $\{x_1, .., x_n\}$.

Exercice 24. On lance une pièce équilibrée. Si le résultat obtenu est pile on note 1 et -1 sinon. Monter que la variable aléatoire associée à la valeur noté suit une loi uniforme.

Loi de Bernoulli. Soit $0 < p < 1$ et une variable aléatoire $X : \Omega \to \{0, 1\}$ de loi de probabilité :

$$\mathbb{P}^X(\{1\}) = p,\ \mathbb{P}^X(\{0\}) = 1 - p.$$

Alors la loi de X est appelé *loi de Bernoulli* de paramètre p.

Une *épreuve de Bernoulli de paramètre* p est une expérience aléatoire admettant deux issues succès ou échec, telle que p soit la probabilité d'obtenir un succès.

Exercice 25. On lance un dé équilibré. Montrer que la variable aléatoire associant 0 ou 1 en fonction de l'échec ou du succès de l'événement A "obtenir un nombre plus grand ou égal à 2" suit une loi de Bernoulli de paramètre p que l'on déterminera.

Loi binomiale Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < p < 1$. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \{0, ..., n\}$ de loi de probabilité :

$$\forall k \in \{0, ..., n\},\ \mathbb{P}^X(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

suit une *loi binomiale de paramètres n et p.*

On appelle *schéma de Bernoulli de paramètres n et p* l'expérience qui consiste à répéter n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < p < 1$. On considère un schéma de Bernoulli de paramètre n et p. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Montrer que X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

Loi géométrique Soit $0 < p < 1$. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ de loi de probabilité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}^X(\{k\}) = (1-p)^{k-1} p,$$

suit une *loi géométrique de paramètre p.*

Exercice 27. Considérons qu'on répète indéfiniment et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancé effectués jusqu'au premier succès. Montrer que X suit une loi géométrique de paramètre p.

Loi de poisson Soit $\theta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ de loi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}^X(\{k\}) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!},$$

suit une *loi de Poisson de paramètre θ.*

La loi de Poisson modélise par exemple le nombre d'autobus passés à un arrêt avant instant T donné, et θ représente le nombre moyen d'arrivées dans cet intervalle.

Proposition. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires. On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètre n et p_n, et que np_n tende vers un nombre réel strictement positif θ lorsque n tend vers $+\infty$. Alors, pour tout entier naturel k :*

$$\lim \mathbb{P}^{X_n}(\{k\})_{n\to+\infty} = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$$

Exercice 28. Démontrer le résultat précédent.

Exercice 29. Pour chacune des lois ci-dessus, montrer que la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

Exercice 30. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ un espace fini à 5 éléments, de probabilités respectives 1/4, 1/4, 1/6, 1/6, 1/6. On note X la variable aléatoire définie par :

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = 0, \quad X(\omega_3) = X(\omega_4) = 1, \quad X(\omega_5) = 2.$$

Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 31. Un urne contient n boules numérotés de 1 à n, $n \geqslant 3$. On tire 3 boules d'un seul coup. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si on a tiré la boule numéro 1, égale à 0 sinon. Déterminer la loi de X.

Exercice 32. On lance deux dés équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 33. Une urne contient N_b boules blanches et N_n boules noires. Posons $N = N_b + N_n$. On tire r boules avec remise dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de X et la reconnaître.

Exercice 34. On lance indéfiniment un dé à 6 faces non truqué. Soit X la variable aléatoire égale au temps passé jusqu'à ce que le premier 1 soit obtenu. Déterminer la loi de X et la reconnaître.

Exercice 35. Calculer la fonction de répartition de :

1. la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$,

2. la loi de Bernoulli de paramètre p,

3. la loi binomiale de paramètres 4 et 1/2,

4. la loi géométrique de paramètre p.

Loi uniforme à densité. Une variable aléatoire réelle X suit une loi *uniforme sur l'intervalle* $I = [a, b]$ si elle admet pour densité l'application p_x définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

Exercice 36. Montrer que l'application p_X est bien une densité de probabilité.

Loi exponentielle. On dit qu'un variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{R}$ suit une *loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ si elle admet pour densité l'application p_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p_X(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}\lambda e^{-\lambda x}.$$

Exercice 37. Montrer que l'application p_X est bien une densité de probabilité.

Exercice 38. Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que, pour tous nombres réels positifs s et t:

$$\mathbb{P}_{\{X>s\}}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > t)$$

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est sans mémoire.

Loi de Gauss ou loi normale. Une variable aléatoire réelle X suit une loi *normale centeée réduite* noté $\mathcal{N}(0, 1)$ si elle admet pour densité l'application p_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Plus généralement, on dit que X suit la loi *normale, de moyenne m et de variance σ^2*, notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$ si elle admet pour densité l'application

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Exercice 39. On reprend les notations précédentes.

1. Montrer que la fonction p_X associée à une loi normale centrée réduite est bien une densité de probabilité.
2. De même pour la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.
3. Soit X une v.a.r de loi $\mathcal{N}(0,1)$ montrer que la loi de probabilité de $Y=\sigma X+m$ est $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

9. Espérence

L'espérance d'une variable aléatoire représente sa moyenne pondérée par la probabilité de chacune des issues.

Definition. Soit X une varaible aléatoire discrète, il existe J dénombrable tel que $X(\Omega)=\{x_j \mid j\in J\}$.

– La variable X est dite *intégrable* si la série de terme général $x_j\mathbb{P}^X(\{x_j\})$ est absolument convergente.

– Si X est *integrable*, on définit son *espérance*, notée $\mathbb{E}(X)$, par :

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{j\in J} x_j\mathbb{P}^X(\{x_j\}).$$

Toute variable aléatoire définie sur un univers Ω finie est intégrable.

Exercice 40. Montrer qu'une variable aléatoire constante est intégrable et déterminer son espérance.

Théorème. *(de transfert) Soit X une variable aléatoire discrète et f une application définie sur $X(\Omega)=\{x_j \mid j\in J\}$ telle que la série de terme général $f(x_j)\mathbb{P}^X(\{x_j\})$ converge absolumenet, alors $f(X)$ est une variable aléatoire discrète intégrable et*

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{j\in J} f(x_j)\mathbb{P}^X(\{x_j\}).$$

Exercice 41. Déterminer, si elle existe, l'espérance des varaiables aléatoires ayant pour loi :

1. loi uniforme sur $\{1,...,n\}$,
2. loi de Bernoulli de paramètre p.
3. loi binomiale de paramètres n et p.
4. loi géométrique de paramètre p, $0<p<1$.
5. loi de Poisson de paramètre $\theta>0$.

Definition. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, de densité p. On dit que X est *intégrable* ou encore qu'elle *admet une espérance* si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx$ existe. Dans ce cas, on définit, son *espérance*, notée $\mathbb{E}(X)$, par :

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx.$$

Théorème. *(de transfert) Soit X une varaiable aléatoire réelle de densité p et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue par morceaux telle que $|\varphi(x)|p(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(X)$ est une variable aléatoire réelle intégrable et son espérance est donnée par :*

$$\mathbb{E}(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)p(x)dx.$$

Une variable aléatoire discrète intégrable d'espérance nulle est dite *centrée*.

Exercice 42. Soit X une variable aléatoire discrète intégrable. Montrer que la variable aléatoire $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée.

Proposition. *Soient X et T deux variables aléatoires intégrables.*

– si a et b sont deux constantes rélles, alors $aX+bY$ est intégrable et on a

$$\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y).$$

– Si $X\leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$. En particulier $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|)$.

Exercice 43. Démontrer la proposition précédente.

Exercice 44. Calculer l'espérance si elle existe des v.a.r X suivant les lois suivantes :

1. Loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

2. Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

3. Loi normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$.

10. Variance

Definition. Une variable aléatoire X est dite *carré intégrable*, si X^2 est intégrable. La quantité $\mathbb{E}(X^2)$ est alors bien définie et est appelée *moment d'ordre 2* de X.

Definition. La *variance* d'une variable aléatoire *carré intégrable*, notée $\mathrm{Var}(X)$ est :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

L'*écart-type* de X, notée $\sigma(X)$, est $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

La variance de X mesure la façon dont X s'écarte de sa moyenne $\mathbb{E}(X)$.

Proposition. *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors*

1. $\mathrm{Var}(X) \geqslant 0$
2. $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
3. *pour tout $a \in \mathbb{R}$,* $\mathrm{Var}(a + X) = \mathrm{Var}(X)$.
4. *pour tout $a \in \mathbb{R}$,* $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.

Exercice 45. Démontrer cette proposition.

Une variable aléatoire X carré intégrable est dite réduite si $\mathrm{Var}(X) = 1$.

Exercice 46. Calculer lorsqu'elle existe la variance des lois précédentes (discrètes ou continues).

Exercice 47. Soit X une variable aléatoire carré intégrable et de variance non nulle. Montrer que la variable aléatoire $\frac{X}{\sigma(X)}$ est réduite, et que la variable aléatoire $\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Definition. Soit X, Y deux variable aléatoires carré intégrables, alors on définit la *covariance* de X et de Y, notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$, par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition. *Soient X, Y deux varaibles aléatoires carré intégrables.*

1. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$*,* $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$.
2. *si a, b, c, d sont des réels,* $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \,\mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.
4. $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Exercice 48. Démontrer le résultat précédent.

Soient X et Y deux variables aléatoires acceptant un moment d'ordre 2 et de variances non nulles. Le *coefficient de corrélation de X et Y*, noté $\rho(X, Y)$ est définie par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

Definition. Soit X une variable aléatoire et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X *admet un moment d'ordre n* si X^n est intégrable. Dans se cas la quantité $\mathbb{E}(X^n)$ est bien définie.

Proposition. *(Inégalité de Markov). Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre $n \geqslant 1$. Alors on a l'inégalité suivante*

$$\forall a > 0, \ \mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^n)}{a^n}.$$

Exercice 49. On reprend les notations de la proposition. On note Ω l'univers sur lequel X est définie.

1. Montrer que l'application $\mathbf{1} : \Omega \to \mathbb{R}$ constante à 1 vérifie pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\mathbf{1}(\omega) = \mathbb{1}_{\{|X| \geqslant a\}}(\omega) + \mathbb{1}_{\{|X| < a\}}(\omega).$$

2. En déduire, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|X(\omega)|^n \geqslant |X(\omega)|^n \mathbb{1}_{\{|X| \geqslant a\}}(\omega).$$

3. Conclure en utilisant la monotonie de l'espérance

Proposition. *(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Soit X une variable aléatoire discrète de carré intagrle. Alors,*

$$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Exercice 50. Démontrer la proposition précédente.

11. Variables aléatoires indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Definition. Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. On dit qu'elles sont *indépendantes*, si pour tout ensemble $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$ tels que $\{X \in A\} \in \mathcal{A}$, $\{Y \in B\} \in \mathcal{A}$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(\{X \in A\})\mathbb{P}(\{Y \in A\})$$

Exercice 51. Soient X_1 et X_2 deux varaibles aléatoires indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, X_2)$.

Théorème. *(Loi faible des grands nombres). Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que ces variables sont carré intégrable et d'espérance commune m. Alors la suite*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\geqslant 1}$$

converge en probabilité vers m, c'est-à-dire,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Exercice 52. Démontrer le théorème précédent. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème. *(Théorème central limite). Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que ces variables sont carré intégrable et d'espérance commune m et de variance commune σ^2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors pour tout réel t :*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

En posant $\tilde{S}_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\tilde{S}_n \leqslant t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

On dit que la variable aléatoire $\tilde{S}_n$ *converge en loi* vers une variable aléatoire normale centrée réduite. De manière équivalente, on a que pour tous réels a et b, $a \leqslant b$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leqslant \tilde{S}_n \leqslant b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Exercice 53. Un joueur pense qu'un dé (à six faces) est pipé. Il le lance 720 fois, et obtient le six 150 fois. Quelle conclusion le joueur peut-il en tirer ?

Exercice 54. Etablir un lien entre l'intervalle de fluctuation introduit en terminale au Lycée et le théorème central limite.