Université du Littoral **Année universitaire 2011-2012**
Master 2 ème année **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit analyse

Séance 5 : Séries, suites et séries de fonctions

1. Séries numériques

Exercice 1. Trouver la nature des séries de termes général u_n :

1. $u_n = \dfrac{n^\alpha}{2^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$;

3. $u_n = \dfrac{a^n}{n^a}$, $a > 0$;

4. $u_n = a \ln \dfrac{n}{n-1} - \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$, $a \in \mathbb{R}$;

5. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}} - e$

6. $u_n = \sin\left((a+n)\dfrac{\pi}{n}\right)$, $a \in \mathbb{R}$;

7. $u_n = \dfrac{\cosh n}{\cosh 2n}$;

8. $u_n = \left(\cosh \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Etudier la convergence de la série de la série de série de terme général

$$u_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2}$$

Remarquer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. La série $\sum u_n$ sera comparée à une intégrale.

Exercice 3. Soit la suite $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$. En utilisant la série associée, montrer que S_n admet une limite.

Exercice 4.

1. Etudier la nature des séries

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Etudier les séries de termes général

2. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

3. $u_n = \sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)}$

Exercice 5. Déterminer la nature et si possible la somme des séries suivantes

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \geqslant 1$;

2. $u_n = \arctan \dfrac{1}{n^2+n+1}$, $n \geqslant 1$;

3. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \geqslant 2$.

Exercice 6. Monter que si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature.

Exercice 7. Quelle est la nature des séries suivantes :

1. $u_n = \ln(1 + \dfrac{1}{n})$

2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, $\alpha > 0$

3. $u_n = \dfrac{a - (-1)^n\sqrt{n}}{n - (-1)^n\sqrt{n}}$, $a \in \mathbb{R}$

4. $u_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$

5. $u_n = \dfrac{n+1}{(-1)^n\sqrt{n} - n}$

6. $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

7. $u_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{\sqrt{n^5 + 1}}$

8. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + \cos n}$

Exercice 8. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3}$, $n \geqslant 3$ et $v_n = \frac{1}{n^3}$. Soient

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3},\ T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3},\ S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \text{ et } T_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^3}$$

1. Monter que $\lim_{n\to\infty} T_{2n} - \frac{4}{3}S_{2n} = 0$.

2. En déduire que $T = \frac{4}{3}S$.

3. Calculer T (en utilisant S) avec deux décimales exactes.

Exercice 9. On considère la série de terme générale $u_n = \dfrac{3n}{4^n}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa somme avec une erreur inférieur à 10^{-2}.

2. Suites de fonctions

Exercice 10. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites

1. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$.

2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ 2n(1-nx) & \text{si } x \in \left]\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 11. Soit la suite de fonctions $(f_n(x))_n$ définie pour $x \in [0,1]$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$.

1. Trouver la limite $f(x)$ de $f_n(x)$ quand $n \to \infty$.

2. Montrer que f_n converge uniformément sur $[0,1]$.

3. En déduire sans calcul $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12. Etudier la suite de fonction $(f_n(x))_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$. Pour montrer que la convergence n'est pas uniforme, on construira une suite $(x_n)_n$ particulière tendant vers 0 telle que $f_n(x_n)$ ne tende pas vers 0.

Exercice 13. Montrer que la suite f_n des fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{pour } x \in [0, n] \\ 0 & \text{pour } x > n \end{cases}$$

converge vers une fonction f. La convergence est-elle uniforme ?

3. Séries de fonctions

Exercice 14. On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}$. Etudier le domaine de convergence Δ de cette série, et étudier sa convergence uniforme sur Δ. Même question pour la série de fonction de terme $v_n(x) = \dfrac{x^2 \sin nx}{x^2+n^2}$.

Exercice 15. **1.** Quel est le domaine de définition Δ de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

2. Montrer que f est continue sur Δ.

Exercice 16.

1. Quel est le domaine de définition Δ de la fonction

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ.

Exercice 17. On considère la série de foncions de terme général

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}(x^{2n} - x^{2n+1})$$

1. Montre qu'elle converge uniformément sur $[0, 1]$.

Soit f sa somme.

2. Monter que f est continue sur $[0, 1]$.

Soit la série de terme général $u'_n(x)$.

3. Etudier la fonction $u'_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

4. En déduire que la série $u'_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, a]$ pour tout $a < 1$.

5. En déduire que $f(x)$ est dérivable sur $[0, 1[$.

Exercice 18. Démontrer que les séries de fonction $u_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^\alpha}$ et $v_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$ sont uniformément convergentes pour $x \in [a, 2\pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi[$.