Université du Littoral **Année universitaire 2011-2012**
Master 2 ème année **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit analyse

Séance 1 : $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et suites numériques.

1. Nombres réels

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1. $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$;

2. $\sqrt{6-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4-3x}$;

3. $3x - 2 - 3x - 4\sqrt{x^2 - x + 3} = 6$;

4. $4\sqrt{3}x + 5\sqrt[4]{x} = 9$;

5. $(x-7)(x-5)(x+4)(x+6) = 608$;

6. $\sqrt[4]{(19-x)(x-2)} + \sqrt{19-x} + \sqrt{x-2} = 7$.

Exercice 2.

1. Montrer

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{3a-b}{4}.$$

2. En déduire

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c-a} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Exercice 3. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, E((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2) = 4n+1.$$

Exercice 4. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a+b+c) \leqslant 4a^2 + 4b^2 + 2c^2$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_1, ..., a_n \in [1, +\infty[$

$$\prod_{i=1}^{n} (1+a_i) \leqslant 2^{n-1}\big(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i\big).$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1.$$

Exercice 5. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

2. Nombres complexes

Exercice 6. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = 0$;

2. $(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z+5)^2 = 0$;

3. $\overline{z} = z^3$.

Exercice 8. Montrer $\forall u \in \mathbb{U}, \forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left|u - \frac{1}{z}\right| = \dfrac{|u-z|}{|z|}$.

Exercice 9. Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $b \neq c$. Montrer $\dfrac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2} \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 10. Calculer $\sup\limits_{|z|\leqslant 1} |z^3 + 2iz|$.

3. Suites numériques

Exercice 11. **1.** Montrer que la fonction $x \mapsto x - 2\sin\frac{x}{2}$ est strictement croissante.

2. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Montrer que l'on a $\sin x < 2\sin\frac{x}{2} < x$.

3. Soit a un nombre réel appartenant à $]0, 2\pi[$ et soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = 2^n \sin\frac{a}{2^n}.$$

Montrer que la suite (u_n) est croissante et convergente.

Exercice 12. Montrer que les suites suivantes converges et calculer leurs limites :

$$\textbf{1.}\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx), x \in \mathbb{R}, \quad \textbf{2.}\ \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k+n^2}, \quad \textbf{3.}\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}.$$

Exercice 13. Soit (u_n) une suite de réels telles que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que l'on a $u_n > \sqrt{2}$ pour tout entier n.

2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Calculer $\lim u_n$.

Pour tout entier n, on pose $e_n = n - \sqrt{2}$.

4. Montrer que l'on a $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n}$. En déduire que l'on a $e_{n+1} < \frac{e_n^2}{2}$ pour tout n.

5. Montrer que l'on a $0 < e_n < \frac{1}{2^{2^n-1}}$ quel que soit l'entier n.

Exercice 14. Etudier la convergence de la suite complexe (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - \overline{u_n}}{3}.$$

Exercice 15. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, (z_n) une suite complexe telle que z_{2n} converge vers a et z_{2n+1} converge vers b. Montrer que la suite $(z_n z_{n+1})$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 16. Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n + v_n + w_n$ converge vers $3a$ et $u_n^2 + v_n^2 + w_n^2$ converge vers $3a^2$. Montrer que u_n, v_n et w_n convergent vers a.