

L'hypothèse de Riemann, 150 ans, déjà

Jean-Marc Deshouillers

Université de Bordeaux

e-mail: Jean-Marc.Deshouillers@math.u-bordeaux1.fr

Résumé

En novembre 1859, Bernhard Riemann révolutionnait l'étude des nombres premiers en étendant au domaine complexe la fonction “ ζ ” introduite par Leonhard Euler un siècle plus tôt. La propriété centrale de l'arithmétique, la factorisation unique d'un entier naturel en éléments premiers, se traduit analytiquement par la relation

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots) = \prod_{p \text{ premier}} (1 + 1/p^{-s})^{-1},$$

valable pour tout réel $s > 1$. Du comportement de cette fonction quand $s \rightarrow 1^+$, Euler a déduit une nouvelle démonstration de l'infinitude des nombres premiers.

En étendant la fonction $s \mapsto \zeta(s)$ aux valeurs complexes de l'argument s , Riemann a mis en évidence l'intime parenté entre les zéros de la fonction ζ et la répartition des nombres premiers. La “symétrie” de la fonction ζ autour du point $1/2$ (“équation fonctionnelle”), qu'il a démontrée, et les valeurs numériques des petits zéros de la fonction ζ , qu'il a calculées, l'ont conduit à formuler l'hypothèse selon laquelle les zéros de la fonction ζ sont réels ou ont $1/2$ pour partie réelle.

L'exposé présentera quelques abords et résultats récents concernant cette conjecture, centrale en mathématiques, et toujours non résolue.