Université du Littoral Côte d'Opale

Mémoire de synthèse en vue de l'
Habilitation à Diriger des Recherches

Discipline
Mathématiques,
Ecole doctorale Sciences, Technologie, Santé (ED585).

Répartition verticale des zéros de fonctions L et applications,

par **Lucile Devin**

Soutenu publiquement le **16 novembre 2026**, devant un jury constitué de :

— Mme **Cécile Dartyge**, Professeure des universités, Université de Lorraine, *rapporteuse*
— M. **Régis de la Bretèche**, Professeur des universités, Université Paris Cité, *rapporteur*
— M. **Étienne Fouvry**, Professeur émérite, Université Paris–Saclay, *examinateur*
— M. **Emmanuel Kowalski**, Professeur, École polytechnique fédérale de Zurich, *rapporteur*
— M. **Youness Lamzouri**, Professeur des universités, Université de Lorraine, *examinateur*
— M. **Bruno Martin**, Professeur des Universités, Université du Littoral Côte d'Opale, *examinateur*.

Table des matières

Remerciements **4**

Liste des travaux présentés **5**

Introduction **6**

1 Fonctions L et formule explicite **8**
1.1 Zéros triviaux et imposés 10
1.2 Propriétés et conjectures analytiques sur les zéros de fonctions L 11
1.3 Nombres premiers et zéros de fonctions L 13
1.4 Propriétés et conjectures diophantiennes sur les zéros de fonctions L 16

2 Annulation au point central et biais dans la répartition d'entiers **19**
2.1 Un cadre général pour des analogues au biais de Chebyshev 22
2.2 Propriétés conditionnelles de la distribution limite 29
2.3 Exemples de courses de nombres premiers 33

3 Arithmétique des polynômes, influence des relations entre zéros **41**
3.1 Biais de Chebyshev dans les corps de fonctions 42
3.2 Exemples de situations étonnantes dues à des relations entre zéros 45
3.3 Résultats génériques 47

4 Sommes de deux carrés consécutives **49**
4.1 Sommes de deux carrés dans les classes de congruences 49
4.2 Paires consécutives de sommes de deux carrés 50
4.3 Conjecture de Hardy–Littlewood et propriétés de la série singulière pour les sommes de deux carrés 52

5 Répartition des zéros de fonctions L **56**
5.1 Comment prouver la conjecture de Katz–Sarnak ? 60
5.2 Puissances d'un caractère de Hecke et sommes géométriques 64
5.3 Une famille de tordues quartiques d'un courbe elliptique à multiplication complexe et sommes de Gauss 69
5.4 Formes modulaires et de Maass avec des formules de trace 73
5.5 Termes secondaires : vitesse de convergence et transition en 1 78

Bibliographie **83**

Remerciements

Ce mémoire est le fruit de nombreuses rencontres et collaborations, mais aussi d'encouragements et de soutien de la part de personnes qui ont bien voulu croire en moi. Je remercie d'abord tous les lecteurs de ce mémoire, et je suis particulièrement reconnaissante envers Cécile Dartyge, Régis de la Bretèche et Emmanuel Kowalski d'avoir non seulement accepté de le lire mais aussi d'écrire un rapport. Leur confiance en moi exprimée lors de la rédaction a été un moteur indispensable.

Je remercie Étienne Fouvry, Youness Lamzouri et Bruno Martin de continuer à soutenir ma carrière académique, et d'avoir accepté d'être examinateurs de ce travail. Je suis très heureuse et fière que vous fassiez partie de ce jury.

J'ai eu la chance dès le début de ma carrière de rencontrer des mentors, modèles, puis des collègues, collaborateurs et collaboratrices qui m'ont fait grandir dans une communauté où l'on prend soin les uns des autres. J'espère faire aussi bien que vous pour passer ces valeurs à la prochaine génération. Merci Florent de répondre encore à toutes mes interrogations et crises existentielles. Merci Professeur Fouvry pour votre soutien et votre humour. Merci Daniel de m'avoir incluse dans tes projets. Merci Cécile, Chantal, Anne, Matilde d'avoir été des modèles, et d'avoir ouvert la voie. Tack så mycket Anders för din tid och vänlighet. Merci Bruno pour ton accueil à Calais et tes conseils réguliers. Merci Régis et Cathy de continuer d'organiser les rencontres.

Merci à tous mes collaborateurs et collaboratrices sans qui ce travail serait beaucoup moins intéressant.

Je suis très heureuse de profiter d'un très bon environnement de travail au LMPA. Cela est dû bien sûr au personnel administratif et technique, Isabelle, Gaëlle, Philippe sans qui rien ne fonctionnerait. Mais, je reconnais aussi que venir au laboratoire pour voir les collègues (même mon cher co-bureau, quand j'ai une chaise), trouver quelques minutes pour parler de maths avec Bruno ou Julie, ou parler de n'importe quoi d'autre à midi avec Christian, Romuald, Antoine, Loïc, et tous les autres, écouter le séminaire ou donner un cours (surtout les TD de Géométrie bien préparés par Isar !) est toujours un plaisir, même avec le train de 7h13 (Merci Maryline !). Merci aux étudiants qui donnent envie de se lever le matin.

Durant la rédaction de ce mémoire j'ai aussi surtout profité du confort d'une délégation CNRS au Centre de Recherche de Montréal. Je remercie Emmanuel Royer pour son accueil et ses encouragements à finir ma rédaction avant de partir. Merci aussi à Didier et Richard, camarades de rédaction et d'aventures, j'attends vos soutenances avec impatience !

J'ai été très bien entourée ces dernières années, par une communauté mathématique bienveillante, mais aussi par mes proches, ma famille et mes amies qui n'ont eu de cesse de croire en moi et d'être présents pour moi. Merci à tous d'être là, je vous aime.

Merci Valentin.

Chapitre 2

[Dev20a] *Chebyshev's Bias for Analytic L-Functions*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 169 (2020), no. 1, 103–140. doi:10.1017/S0305004119000100.

[Dev20b] *Limiting properties of the distribution of primes in an arbitrarily large number of residue classes*, Canadian Mathematical Bulletin, 63 (2020), no. 4, 837–849. doi:10.4153/S0008439520000089.

[Dev21] Erratum : Canadian Mathematical Bulletin, 64 (2021), no. 4, 1041–1044. doi:10.4153/S0008439520000818

[Dev26] *Discrepancies in the distribution of Gaussian primes*, Mathematische Zeitschrift 312, 31 (2026). doi:10.1007/s00209-025-03910-8.

[CDP] avec Sneha Chaubey et Paul Péringuey, *Comparative number theory for Artin primes*, en préparation.

Chapitre 3

[DM21] avec Xianchang Meng, *Chebyshev's bias for products of irreducible polynomials*, Advances in Mathematics, 392 (2021). doi:10.1016/j.aim.2021.108040.

[BDKL24] avec Alexandre Bailleul, Daniel Keliher et Wanlin Li, *Exceptional biases in counting primes over function fields*, Journal of the London Mathematical Society (2024) doi:10.1112/jlms.12876.

Chapitre 4

[DDNS22] avec Chantal David, Jungbae Nam et Jeremy Schlitt, *Lemke Oliver and Soundararajan bias for consecutive sums of two squares*, Mathematische Annalen, (2021). doi:10.1007/s00208-021-02307-2.

[AADKQH] avec Rebecca Abi Abdallah, Vivian Kuperberg et Emily Quesada-Herrera, *Correlations for weighted sums of two squares*, en préparation.

Chapitre 5

[DFS22] avec Daniel Fiorilli et Anders Södergren, *Low-lying zeros in families of holomorphic cusp forms : the weight aspect*, The Quarterly Journal of Mathematics, (2022). doi:10.1093/qmath/haac010.

[DFS25] avec Daniel Fiorilli et Anders Södergren, *Extending the unconditional support in an Iwaniec-Luo-Sarnak family*, Algebra & Number Theory (2025) doi:10.2140/ant.2025.19.1621.

[DDW26] avec Chantal David et Ezra Waxman, *One-level densities in families of Grössencharakters associated to CM elliptic curves*, Mathematika, 72 (2026). doi:10.1112/mtk.70067.

[ČDF+25] avec Martin Čech, Daniel Fiorilli, Kaisa Matomäki et Anders Södergren, *Low-lying zeros in families of Maass form L-functions : an extended density theorem*, arXiv:2505.18712 accepté pour publication à Algebra & Number Theory.

[DDFW26] avec Chantal David, Alessandro Fazzari et Ezra Waxman, *Average analytic rank for the L-functions of the elliptic curves* $y^2 = x^3 - dx$, preprint arXiv:2608.06286.

[DLR] avec Didier Lesesvre et Emmanuel Royer, *Murmurations for* GL(2) *in the weight aspect*, en préparation.

Introduction

Ce mémoire présente les travaux que j'ai effectués depuis ma soutenance de thèse en 2017 jusqu'à aujourd'hui. Le thème de mes travaux est la théorie analytique des nombres. Cela consiste à peu près à trouver et prouver des propriétés des nombres premiers, ou plus généralement étudier les corrélations entre propriétés additives et propriétés multiplicatives de l'ensemble des nombres entiers, à l'aide de méthodes d'analyse. En réalité, toute idée est la bienvenue si elle donne un éclairage nouveau et utile sur un problème.

Un point central dans cette étude est la formule explicite d'une fonction L. Une formule, issue de l'analyse complexe, qui permet de lier les propriétés des nombres premiers à des propriétés de points d'annulation d'une fonction complexe encodant la question d'une façon ou d'une autre. Un exemple concret et historique est la fonction ζ de Riemann qui encode les nombres premiers et dont le pôle en 1 donne l'asymptotique pour le nombre de premiers dans un intervalle $[0, X]$ et la répartition de ses points d'annulation indique le terme d'erreur dans cette approximation. Pour étudier des propriétés plus fines des nombres premiers, nous faisons appel à des fonctions L, généralisations de la fonction ζ de Riemann. Les propriétés utiles et l'intérêt de ces fonctions sont développés dans le chapitre 1 de ce mémoire qui sert d'introduction technique et qui ne contient aucun de mes résultats.

Les chapitres 2 et 3 de ce mémoire présentent mes travaux où la formule explicite est utilisée pour en déduire des propriétés sur les nombres premiers. Plus précisément, ces chapitres s'inscrivent dans le cadre de la théorie comparative des nombres, où l'on étudie les termes secondaires dans des théorèmes du type Théorème des Nombres Premiers, ou Théorème des Nombres Premiers dans les Progressions Arithmétiques. Sont alors mis en avant l'influence des propriétés diophantiennes des zéros de fonctions L, mais aussi la contribution des carrés de premiers. Si ces deux chapitres sont portés par le même thème, la séparation a lieu sur les objets étudiés. En effet, le Chapitre 2 se place dans le cadre classique de l'arithmétique des entiers alors que le Chapitre 3 donne des résultat semblables dans l'arithmétique d'un anneau de polynômes à coefficients dans un corps fini. Dans ce cadre certains résultats de géométrie peuvent être utilisés, les fonctions L peuvent être vues comme des polynômes. On peut alors plus explicitement vérifier et utiliser les relations diophantiennes qui existent ou non entre les zéros. Nous pouvons alors mettre à jour des similarités attendues ou des différences structurelles entre les deux contextes, qui montrent que le cadre de $\mathbf{F}_q[t]$, malgré les apparences, n'est pas toujours un contexte plus simple que $\mathbf{Z}$.

Les fonctions L de Dirichlet en tant qu'outils pour étudier le comportement des nombres premiers dans les classes de congruences deviennent alors des objets intéressants en eux-mêmes. Plus généralement, de nombreux objets arithmétiques ou géométriques ont aussi une fonction L associée dont l'étude analytique des zéros devient un sujet de recherche en soi. Pour ne citer qu'un exemple, la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer énonce l'égalité entre le rang (algébrique) de courbes elliptiques définies sur $\mathbf{Z}$ et vues en tant que groupes et l'ordre d'annulation au point central (rang analytique) de la fonction L associée.

Mes travaux qui constituent le Chapitre 5 de ce mémoire placent de cette façon les fonctions L au centre, et utilisent entre autres les propriétés de nombres premiers pour les étudier. On suit notamment la direction proposée par Katz et Sarnak [KS99] d'étudier la

répartition verticale des zéros de fonctions L en moyenne dans des familles. Du point de vue analytique, il est en effet plus naturel d'obtenir des résultats en moyenne sur un ensemble de fonctions L, et d'étudier la mesure de répartition des zéros plutôt que l'annulation en un seul point.

Mes travaux sur la théorie comparative des nombres des deux premiers chapitres sont une suite naturelle des questions laissées en suspend à la suite de ma thèse, alors que les travaux sur la répartition verticale des zéros sont le fruit de mes rencontres post-doctorales et une partie plus essentielle de ma recherche actuelle. Au milieu de cela, le Chapitre 4 contient peu de fonctions L et est un entracte, de projets principalement avec des chercheurs et chercheuses plus jeunes mais qui a potentiel à devenir une direction sérieuse de ma recherche future. Le sujet principal de ce Chapitre est les nombres pouvant s'écrire comme sommes de deux carrés d'entiers. C'est un ensemble a priori plus simple que l'ensemble des nombres premiers, mais sur lequel se posent aussi des questions naturelles de lien entre structure multiplicative et structure additive. Les questions historiques sur les nombres premiers, telles que l'existence d'une infinitude de premiers jumeaux, s'y posent naturellement, et certaines réponses sont obtenues, plus ou moins conditionnellement.

Notations

Avant de plonger dans les mathématiques, donnons quelques notations qui seront utilisées dans ce mémoire sans rappel des définitions.

Nous utilisons les notations de Landau et Vinogradov allègrement. Etant données deux fonctions f et g définies sur un ensemble D et à valeurs réelles, on note

$$f = O(g) \quad \text{ou} \quad f \ll g$$

s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in D$, on a $|f(x)| \leq Cg(x)$. On note $f \asymp g$ si $f = O(g)$ et $g = O(f)$. Les constantes implicites peuvent dépendre de certains paramètres qui sont alors notés en indice. L'indication $f(x) \ll g(x)$ quand $x \to \infty$ signifie que le domaine D doit être pris de la forme $[A, +\infty[$ et la constante implicite peut dépendre du choix de la borne inférieure A.

Dans une autre direction, on peut montrer des résultats de type Oméga, on note

$$f = \Omega_+(g) \quad \text{et respectivement,} \quad f = \Omega_-(g)$$

quand $x \to \infty$ s'il existe une constante $C > 0$ (resp. < 0) et une suite de points $x_n \to \infty$ tels que pour tout n on a $f(x_n) > Cg(x_n)$ (resp. $f(x_n) < Cg(x_n)$).

On note aussi $f = o(g)$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on a $f(x) \leq \varepsilon g(x)$ lorsque x tend vers une limite donnée, qui est souvent $+\infty$ ou 0, et en général claire selon le contexte. On note $f \sim g$ si $f - g = o(g)$.

Pour une propriété A on utilisera les notations $\delta_A = \mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est vraie} \\ 0 & \text{si } A \text{ est fausse} \end{cases}$. Cela peut-être traité comme une fonction indicatrice pour un ensemble, ou comme une distribution de Dirac. Similairement si l'on met deux indices séparés par une virgule, la virgule doit être considérée comme un signe égal, comme dans le symbole de Kronecker.

Finalement, pour une fonction méromorphe complexe $L : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, et un point $\rho \in \mathbf{C}$, on note $\mathrm{ord}_{s=\rho}(L(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{L'}{L}(\rho + \varepsilon e^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$ (pour ε suffisamment petit) l'ordre d'annulation de la fonction L au point ρ. En particulier, $\mathrm{ord}_{s=\rho}(L(s))$ est strictement positif si $L(\rho) = 0$, négatif si ρ est un pôle de L et nul sinon.

Chapitre 1

Fonctions L et formule explicite

Les fonctions L étant les personnages principaux de ce mémoire, nous nous devons de donner une définition utile ainsi que les principales propriétés avant de commencer à présenter plus de résultats. Les définitions, notations et propriétés de cette introduction sont presque uniquement tirées de [IK04, Chap. 5] et [RS96, § 2], elles seront utilisées dans les Chapitres 2 et 5 de ce mémoire.

On utilise une définition [Dev20a, Def. 1.1] de fonction L *analytique* inspirée de [IK04, Chap. 5] et de la classe de Selberg afin d'énoncer des résultats généraux vérifiés pour toutes les fonctions L. Dans les chapitres suivants, les fonctions L seront définies explicitement d'une façon qui permet de vérifier qu'elles tombent bien dans le cadre de cette définition générale.

Définition 1.0.1 (Fonction L analytique)**.** Soit $L(s,f)$ une fonction en la variable $s \in \mathbf{C}$, associée à un paramètre auxiliaire f auquel on peut associer un entier $q(f)$ (souvent f est d'origine arithmétique et $q(f)$ est son conducteur). Alors $L(s,f)$ est une fonction L analytique si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. La fonction s'écrit comme une série de Dirichlet absolument convergente sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ et se factorise en produit eulérien de degré $d \geq 1$:

$$L(s,f) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{-s} = \prod_p \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \alpha_{f,j}(p) p^{-s}\right)^{-1}$$

   avec $\lambda_f(1) = 1$ et $\alpha_{f,j}(p) \in \mathbf{C}$, vérifiant $|\alpha_{f,j}(p)| = 1$ pour tout j et $p \nmid q(f)$. On appelle d le *degré* de la fonction L.

2. On peut associer à la fonction un facteur gamma de paramètres locaux $\kappa_j \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\kappa_j) > -\frac{1}{2}$, pour $1 \leq j \leq d$, défini de la façon suivante :

$$\gamma(s,f) = \pi^{-ds/2} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(\frac{s + \kappa_j}{2}\right). \tag{1.0.1}$$

   On définit le *conducteur analytique* de f par :

$$\mathfrak{q}(f) = q(f) \prod_{j=1}^{d} \left(|\kappa_j| + 3\right),$$

   et on définit la fonction L complétée

$$\Lambda(s,f) = q(f)^{s/2} \gamma(s,f) L(s,f). \tag{1.0.2}$$

La fonction $\Lambda(s,f)$ se prolonge de façon holomorphe à tout le plan complexe, sauf éventuellement un pôle en $s=1$. De plus elle vérifie une équation fonctionnelle

$$\Lambda(s,f) = W(f)\Lambda(1-s,\overline{f}), \tag{1.0.3}$$

avec $|W(f)|=1$. On a noté dans l'équation précédente $\Lambda(\cdot,\overline{f})$ la fonction L complétée associée à la fonction $L(s,\overline{f}) := \sum_{n\geq 1}\overline{\lambda_f(n)}n^{-s}$.

3. On dit que la fonction L est réelle si pour tout $n\geq 1$ on a $\lambda_f(n)\in\mathbf{R}$. Alors en particulier on a $L(s,f)=L(s,\overline{f})$ pour tout s pour lequel ces deux fonctions sont définies.

Remarque 1.0.2.

1. Les hypothèses que l'on fait ici sont plus fortes que celles habituellement données pour définir la classe de Selberg (voir par exemple [KP99]), elles sont aussi plus fortes que celles proposées par Iwaniec et Kowalski [IK04, Chap. 5]. On suppose en particulier que les paramètres locaux $\alpha_{f,j}(p)$ sont presque tous de norme 1. Il est plus classique de supposer la conjecture de Ramanujan–Petersson : pour tout $\varepsilon>0$, $\lambda_f(n)=O(n^{\varepsilon})$. Notre hypothèse [1] permet d'avoir $|\lambda_f(n)|\leq\tau_d(n)$ où $\tau_d(n)$ est le nombre de représentations de n comme produit de d nombres entiers. En particulier, pour p premier, on a $|\lambda_f(p)|\leq d$.
2. On observe que le fait que la série de Dirichlet se factorise en un produit eulérien implique en particulier que la fonction $n\mapsto\lambda_f(n)$ est multiplicative, c'est-à-dire que pour tout $m,n\in\mathbf{N}$ premiers entre eux, on a $\lambda_f(mn)=\lambda_f(m)\lambda_f(n)$. Il y a aussi une relation de récurrence d'ordre d pour les suites $(\lambda_f(p^n))_{n\geq 1}$ pour chaque premier p.
3. En théorie analytique des nombres, on normalise en général les fonctions L pour que le centre de symétrie de l'équation fonctionnelle se trouve en $s=\frac{1}{2}$. Cette convention sera utilisée dans tout le mémoire.
4. En dehors des fonctions L de Dirichlet, la plupart des fonctions L étudiées dans ce mémoire sont réelles.

Listons plusieurs exemples de fonctions connues de la théorie des nombres qui satisfont les hypothèses de la Définition 1.0.1 et seront utilisées dans ce mémoire. Pour ne pas déjà surcharger le lecteur, les définitions précises seront données dans les sections respectives.

1. La fonction ζ de Riemann et les fonctions L de Dirichlet pour les caractères non triviaux sont les premiers exemples de fonctions L analytiques dans le sens de la Définition 1.0.1. Le conducteur de la fonction L est alors le conducteur du caractère c'est-à-dire le plus petit entier modulo lequel le caractère peut être bien défini. L'étude de ces fonctions nous donne des informations sur la répartition des nombres premiers dans les classes de congruences, et donc permet de répondre à l'observation originelle de Chebyshev qui est le point de départ du Chapitre 2. Nous utilisons aussi des propriétés de la répartition horizontale des zéros de fonctions L de Dirichlet dans la Section 5.4.2 pour améliorer les connaissances sur la répartition verticale de zéros de fonctions L de formes modulaires.
2. Étant donné une extension de corps $K/\mathbf{Q}$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$, les caractères de Hecke sur l'ensemble des idéaux de $\mathcal{O}_K$ sont une généralisation des caractères de Dirichlet. On peut aussi leur associer une fonction L que l'on peut voir comme une fonction L analytique avec un produit eulérien sur les premiers classiques. Le conducteur de la fonction L est alors donné par la norme du conducteur du caractère multiplié par la valeur absolue du discriminant du corps K. De tels exemples sont présentés dans la Section 2.3 et on étudie la répartition des zéros dans une famille de fonctions L de caractères de Hecke dans la Section 5.2.

1. qui n'est pas prouvée pour les fonctions L de degré 2 étudiées dans la Section 5.4.4, nous reviendrons sur ce sujet.

3. Les fonctions L provenant de formes modulaires primitives holomorphes cuspidales de niveau $q \in \mathbf{N}$, caractère χ, poids $k \geq 1$ satisfont aussi toutes les hypothèses de la définition 1.0.1. Ce sont des fonctions L analytiques de degré 2 (voir par exemple [IK04, 5.11]), et leur conducteur est donné par le niveau q. Nous étudions la répartition verticale des zéros de telles fonctions L dans la Section 5.4.
4. En particulier d'après les travaux sur la modularité ([Wil95], [TW95], [BCDT01]), si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ alors la fonction de Hasse–Weil associée $L(s, E)$ satisfait la Définition 1.0.1, avec comme conducteur le conducteur de la courbe. Dans la Section 5.3, nous nous intéressons à une famille particulière de courbes elliptiques donnée par les tordues quartiques d'une courbe ayant multiplication complexe. La famille des fonctions L associée est très mince, mais les résultats sur la répartition verticale des zéros que nous obtenons nous permettent tout de même d'obtenir une borne non triviale sur le rang moyen de ces courbes elliptiques, une première pour une famille de tordues quartiques.

1.1 Zéros triviaux et imposés

Nous présentons ici quelques conséquences de la Définition 1.0.1 sur les zéros des fonctions L analytiques. Soit $L(s, f)$ une fonction L analytique de degré d. Dans la Définition 1.0.1.2, on associe à $L(s, f)$ le facteur

$$\gamma(s, f) = \pi^{-ds/2} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(\frac{s + \kappa_j}{2}\right)$$

où les κ_j sont des nombres complexes de partie réelle $> -\frac{1}{2}$. Cette hypothèse garantit que la fonction $\gamma(s, f)$ ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$ et n'a pas de pôle sur $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$. Par contre la fonction Γ a des pôles d'ordre 1 en chaque entier négatif 0, -1, -2, ... On en déduit que la fonction $\gamma(s, f)$ a des pôles aux points $s = -\kappa_j - 2m$, pour $j \in \{1, \ldots, d\}$ et $m \geq 0$. Comme la fonction complétée $\Lambda(s, f)$ est supposée holomorphe (sauf éventuellement en $s = 1$) les pôles de la fonction $\gamma(s, f)$ sont des zéros de la fonction $L(s, f)$. On appelle ces points les « zéros triviaux » de $L(s, f)$.

Les autres zéros de la fonction $L(s, f)$ sont ceux de $\Lambda(s, f)$ et sont appelés « zéros non triviaux ». Comme $L(s, f)$ admet un produit eulérien non nul dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, ses zéros non triviaux sont tous situés dans la bande critique $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$. L'équation fonctionnelle (1.0.3) induit des propriétés de symétrie entre les zéros de $L(s, f)$ et ceux de $L(s, \overline{f})$. Précisément si ρ est un zéro de $L(s, f)$, alors $1 - \rho$ et $\overline{\rho}$ sont des zéros de $L(s, \overline{f})$, et donc $1 - \overline{\rho}$ est aussi un zéro de $L(s, f)$.

En particulier dans le cas d'une fonction L réelle ($L(s, \overline{f}) = L(s, f)$) non identiquement nulle, il y a une symétrie centrale de centre $\frac{1}{2}$ ainsi qu'une symétrie par rapport à la droite réelle dans l'ensemble des zéros de $L(s, f)$. Il suffit de connaître les zéros de partie imaginaire positive ou nulle et de partie réelle supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ pour connaître tous les zéros d'une fonction L réelle.

De plus, toujours pour une fonction L réelle, en appliquant deux fois l'équation fonctionnelle on obtient $W(f)^2 = 1$, donc on a $W(f) = \pm 1$. On note alors que l'équation fonctionnelle évaluée en $s = \frac{1}{2}$ donne $\Lambda(\frac{1}{2}, f) = W(f)\Lambda(\frac{1}{2}, f)$ donc le cas $W(f) = -1$ force l'annulation de la fonction L au point central $s = \frac{1}{2}$. De même, en dérivant l'équation fonctionnelle, on a $\Lambda^{(k)}(\frac{1}{2}, f) = (-1)^k W(f)\Lambda^{(k)}(\frac{1}{2}, f)$, forçant l'annulation de la dérivée k-ème en $s = \frac{1}{2}$ selon la parité de k. En particulier, $\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s, f))$ est pair si $W(f) = 1$ et est impair si $W(f) = -1$.

Cette annulation au point central est au cœur de conjectures profondes en théorie des nombres. Dans le cas d'une fonction L associée à une courbe elliptique E, la conjecture

de Birch et Swinnerton-Dyer [BSD65] prévoit en effet que le rang algébrique de la courbe elliptique — on peut munir l'ensemble des points rationnels $E(\mathbf{Q})$ d'une courbe elliptique d'une structure de groupe abélien et son rang algébrique est alors la plus grande valeur de r tel que $\mathbf{Z}^r$ s'injecte dans ce groupe — est égal à l'ordre d'annulation en [2] $s = \frac{1}{2}$ de la fonction $L(s, E)$. Les meilleurs résultats dans cette directions sont ceux de Gross–Zagier et Kolyvagin [GZ86, Kol89] qui obtiennent l'égalité dans le cas où l'ordre d'annulation au point central est au plus 1.

Cela devrait régler presque tous les cas, en effet, il est largement cru que pour « la plupart » des fonctions L, il ne devrait pas y avoir d'annulation en $s = \frac{1}{2}$ sauf si elle est forcée par le signe de l'équation fonctionnelle, auquel cas on s'attend à un zéro d'ordre un mais pas plus. Moralement, la théorie du moindre effort nous encourage à croire que pour 100% des fonctions L, l'ordre d'annulation en $s = \frac{1}{2}$ est minimal et est imposé par le signe de l'équation fonctionnelle ; autrement dit on aurait

$$\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s, f)) = \frac{1 - W(f)}{2} \tag{1.1.1}$$

pour une fonction L réelle et $\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s, f)) = 0$ autrement. Cette conjecture est attribuée à Chowla [Cho65] pour les fonctions L de Dirichlet de caractères quadratiques, elle ne connaît pour le moment pas de contre-exemple. La conjecture de Goldfeld [Gol79] énonce que 100% des courbes elliptiques ont rang inférieur ou égal à 1, également réparties entre rang 0 et 1. Smith a récemment fait une avancée spectaculaire dans cette direction en prouvant dans [Smi26a, Smi26b, Smi25] la conjecture de Goldfeld pour le rang algébrique dans des familles de tordues quadratiques de courbes elliptiques.

Il faut tout de même noter qu'il existe des fonctions L qui s'annulent au point central avec un ordre supérieur à deux, ainsi que des courbes elliptiques de rang jusqu'à 29, c'est pourquoi la conjecture dit « 100% » et non pas « toutes », on pense qu'en prenant une fonction L « au hasard », il n'y a aucune chance de tomber sur ces contre-exemples. La conjecture de Katz–Sarnak, discutée dans le Chapitre 5 de ce mémoire, implique en particulier la conjecture ci-dessus. Nous expliquons dans l'introduction de ce chapitre comment déduire des résultats partiels sur l'ordre d'annulation en $s = \frac{1}{2}$ de résultats partiels sur la conjecture de Katz–Sarnak.

1.2 Propriétés et conjectures analytiques sur les zéros de fonctions L

Revenons aux zéros non triviaux. Les propriétés analytiques permettent déjà de donner une approximation de leur nombre dans des sous-ensembles compacts de la bande critique. Citons en particulier [IK04, Th. 5.8] pour l'asymptotique en T et [Hol25, Prop. 2.2] pour la dépendance en le conducteur analytique.

Proposition 1.2.1. *Soit $L(s, f)$ une fonction L analytique de degré d au sens de la définition 1.0.1, on a pour $T \geq 1$,*

$$N(T, f) := |\{\rho = \beta + i\gamma : L(\rho, f) = 0, 0 \leq \beta \leq 1, |\gamma| \leq T\}| \sim \frac{T}{\pi} \log\left(\mathfrak{q}(f) T^d\right) \tag{1.2.1}$$

et

$$|\{\rho = \beta + i\gamma : L(\rho, f) = 0, 0 \leq \beta \leq 1, |T - \gamma| \leq 1\}| \ll \log\left(\mathfrak{q}(f)(T+3)^d\right). \tag{1.2.2}$$

La constante implicite est absolue.

2. On rappelle ici la normalisation de la théorie analytique des nombres, d'autres références plus algébriques évoqueront plutôt l'annulation au point $s = 1$ de la fonction $L(E, s)$.

Dans ces bornes, les zéros sont comptés avec multiplicité, on observe en particulier que ce résultat nous fournit une borne sur la multiplicité des zéros en fonction de leur partie imaginaire, même si l'on espère souvent que cette multiplicité est 1. Il est à noter aussi qu'une fonction L à grand conducteur analytique va avoir proportionnellement plus de zéros à hauteur fixée. On insiste ici sur le fait que [Hol25, Prop. 2.2] montre [3] aussi l'équivalent (1.2.1) à T fixé et $\mathfrak{q}(f)$ tendant vers l'infini. Ainsi, si l'on veut comparer les répartitions de zéros de plusieurs fonctions L avec des conducteurs différents comme dans le Chapitre 5, on va normaliser les zéros pour rendre cette comparaison possible. Précisément, étant donné $\gamma \in \mathbf{R}$ tel qu'il existe $\beta \in (0,1)$ avec $L(\beta + i\gamma, f) = 0$, on considère le « zéro normalisé » $\widetilde{\gamma} := \gamma \frac{\log \mathfrak{q}(f)}{2\pi}$, de telle sorte que

$$\widetilde{N}(T,f) := |\{\rho = \beta + i\gamma : L(\rho,f) = 0, 0 \leq \beta \leq 1, |\widetilde{\gamma}| \leq T\}| \xrightarrow[\mathfrak{q}(f)\to\infty]{} 2T.$$

Autrement dit, quand le conducteur analytique est grand et T est fixé, il y a $2T$ zéros normalisés de partie imaginaire dans l'intervalle $[-T,T]$. On peut encore voir cette propriété comme le fait que l'écart moyen entre zéros normalisés est égal à 1.

Bien sûr, la première chose dont on voudrait parler quand on évoque la répartition des zéros de fonctions L est l'Hypothèse de Riemann (GRH). Malheureusement, cette conjecture n'est pas démontrée dans ce mémoire et ceci n'est pas seulement dû à un manque de place dans la marge. Pire que cela, certains de nos résultats sont conditionnels à sa véracité, nous donnons alors le plus précisément possible les fonctions L pour lesquelles cette hypothèse nous est nécessaire. Il est certes raisonnable d'éviter au maximum d'utiliser cette hypothèse tant qu'elle n'est pas prouvée, mais l'on verra que les questions liées au biais de Chebyshev évoquées au Chapitre 2 perdent un certain intérêt sans l'hypothèse de Riemann, puisque la contribution des zéros devient alors une oscillation plus grande que la contribution des carrés de premiers qui causaient le décalage de la valeur moyenne. Heureusement le cadre des corps de fonctions du Chapitre 3 nous permet de nous libérer de ce fardeau : dans ce cadre l'analogue de la conjecture de Riemann a été prouvée par Weil [Wei48].

Conjecture 1.2.2 (GRH)**.** *Soit $L(s,f)$ une fonction L analytique, alors si ρ est un zéro non trivial de $L(s,f)$ on a* $\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$.

Dans le cas où l'on ne veut pas supposer l'hypothèse de Riemann, on peut supposer ou utiliser des résultats plus faibles sur la répartition horizontale des zéros. On peut espérer que par exemple, faute d'être tous sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, le nombre de contre-exemples devrait être assez petit, probablement proche de 0% des zéros, et que plus on s'éloigne de la droite critique, moins on devrait trouver de zéros en proportion (par rapport au nombres de zéros donné dans (1.2.1)). Cette idée est formalisée par des théorèmes de type « théorème de densité zéro ».

Définition 1.2.3. Soit $L(s,f)$ une fonction L analytique. On appelle un théorème de densité zéro (Zero Density Theorem ou ZDT) pour $L(s,f)$, un résultat qui garantit que les zéros de $L(s,f)$ hors de la droite $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ forment un ensemble de densité nulle dans l'ensemble des zéros de $L(s,f)$.

De tels théorèmes prennent souvent la forme

$$N(\sigma,T,f) := |\{\rho = \beta + i\gamma : L(\rho,f) = 0, \beta \geq \sigma, |\gamma| \leq T\}| \ll T^{A(1-\sigma)} \log(T)^B,$$

pour certains paramètres A et $B > 0$ qui peuvent être des fonctions de σ. Une dépendance explicite en le conducteur analytique est également bienvenue. L'exposant avec un facteur

3. L'énoncé est donné dans le cas spécial de fonctions L de caractères de Hecke mais la preuve n'utilise que des propriétés de fonctions L analytiques et peut donc être généralisée sans effort à notre contexte.

$(1-\sigma)$ donne bien l'idée que le nombre de zéros décroît en fonction de la partie réelle. On observe que la borne supérieure est moins bonne que la borne pour le nombre total de zéros sans condition sur la partie réelle (1.2.1) pour $\sigma \leq 1 - \frac{1}{A}$. Ce résultat n'est utile que pour σ plus grand et il nous dit que les zéros de partie réelle $\geq \sigma > 1 - \frac{1}{A}$ ont bien une densité nulle dans l'ensemble des zéros de la fonction L donnée. Ce type de résultat est ainsi d'autant meilleur que l'on peut prendre le paramètre A petit.

Citons par exemple dans le cas général de la classe de Selberg le résultat suivant de Kaczorowski et Perelli [KP23, Lem. 3].

Théorème 1.2.4. *Soit $L(s,f)$ une fonction de la classe de Selberg de degré d. Soit $\varepsilon > 0$. On a*

$$N(\sigma, T, f) \ll_\varepsilon T^{4(d+3)(1-\sigma)+\varepsilon}$$

quand $T \to \infty$ uniformément pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$.

De façon usuelle, il est souvent plus aisé d'obtenir des résultats en moyenne sur une famille de fonctions L, et ceux-ci peuvent être suffisant selon ce qu'on souhaite montrer. Dans la Section 5.4.2, nous utilisons ainsi une version du théorème [IK04, Th. 10.4], où la moyenne est faite sur les fonctions L de Dirichlet de conducteur le multiple d'un entier h donné, telle que présentée ici.

Théorème 1.2.5. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\frac{1}{2} + \varepsilon \leq \sigma \leq 1$ et pour tout $h \in \mathbf{N}$, $Q \geq 1$, on a la borne*

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,h)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\psi \bmod q} \sum_{\xi \bmod h} N(\beta, T, \psi\xi) \ll_\varepsilon \big((hQT)^{(2+\varepsilon)(1-\sigma)} + (hQ^2T)^{(1-\beta)\min(\frac{3}{2-\beta}, \frac{3}{3\beta-1})}\big)(\log hQT)^{O_\varepsilon(1)}.$$

L'énoncé ci-dessus diffère légèrement de celui présenté dans le livre d'Iwaniec et Kowalski, mais un examen précis de la preuve [IK04, pp. 262–263] et des dépendances en les paramètres nous garantit bien que cet énoncé en est une conséquence.

Terminons finalement cette partie par une conjecture sur le paramètre A le plus petit que l'on peut raisonnablement espérer pour cette même famille de fonctions L.

Conjecture 1.2.6 (GDC)**.** *Pour tout $h \in \mathbf{N}$, $Q \geq 1$, on a la borne*

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ (q,h)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\psi \bmod q} \sum_{\xi \bmod h} N(\sigma, T, \psi\xi) \ll (hQ^2T)^{2(1-\sigma)}(\log hQT)^{O(1)}.$$

Cette conjecture est énoncée par Iwaniec et Kowalski [IK04, p.250], sous le nom de Grand Density Conjecture (que l'on pourra traduire par Conjecture de Densité (zéro) Généralisée). Il est à noter que cette conjecture est plus faible que l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions L de Dirichlet et que le Théorème 1.2.5 est actuellement sa meilleure approximation prouvée. Nous verrons dans la Section 5.4.2 que cette conjecture nous permet d'obtenir un résultat aussi fort que ce qui était précédemment obtenu en supposant l'Hypothèse de Riemann, à propos de la distribution des zéros de familles de fonctions L de degré 2.

1.3 Nombres premiers et zéros de fonctions L

L'écriture des fonctions L en produit eulérien permet de faire le lien entre les propriétés analytiques d'une fonction L et celles de nombres premiers. Commençons par écrire la dérivée logarithmique d'une fonction L. On a pour $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\frac{L'}{L}(s,f) = -\sum_p \sum_{j=1}^{d} \sum_{k \geq 1} \frac{(\alpha_{f,j}(p))^k \log p}{p^{ks}}.$$

On va alors définir la fonction de Von Mangoldt associée à f par

$$\Lambda_f : n \in \mathbf{N} \mapsto \begin{cases} \sum_{j=1}^{d} (\alpha_{f,j}(p))^k \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de premier} \end{cases}$$

de sorte que $\frac{L'}{L}(s,f) = -\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s}$.

Une partie de l'étude des propriétés des nombres premiers se concentre sur des sommes indexées par les nombres premiers, la plus connue de toutes étant $\pi(x) := \sum_{p\leq x} 1$. Nous observons qu'il est en fait plus naturel et facile d'étudier des sommes indexées sur les puissances de premiers, et avec un poids logarithmique. On gardera en tête que pour revenir à la somme sur les nombre premiers, il « suffira » alors d'effectuer une intégration par parties pour se débarrasser du poids logarithmique, et d'évaluer plus ou moins trivialement la contribution des puissances supérieures de nombres premiers, puisque ceux-ci sont bien moins nombreux que les premiers. Nous verrons ainsi dans le Chapitre 2 que c'est en fait la contribution des carrés de nombres premiers qui est bien souvent la cause du biais observé par Chebyshev ou ses analogues.

La formule la plus connue pour passer d'une somme sur les puissances de premiers à une intégrale complexe est la formule de Perron (voir par exemple [Ten15, Chap. II Th. 2.1]).

Théorème 1.3.1 (Formule de Perron)**.** *Etant donné une série de Dirichlet*

$$F : s \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a > 0$*, on définit*

$$A_F : x \in]0, +\infty[\mapsto \sum_{n<x} a_n + \frac{1}{2} a_x \delta_{x\in\mathbf{N}}$$

sa fonction sommatoire associée. Alors, pour $c > \sigma_a$*, et pour tout* $x > 0$*, on a*

$$A_F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s$$

où l'intégrale n'est peut-être pas absolument convergente, mais l'est au moins conditionnellement pour x *non entier et au sens de la valeur principale de Cauchy pour* x *entier.*

La preuve de ce théorème est basée sur le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

qui donne la fonction de Heaviside par inversion de Laplace. Appliqué à la fonction $\frac{L'}{L}(s,f)$ dont l'écriture en série de Dirichlet est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on obtient alors pour tout $c > 1$,

$$\sum_{n<x} \Lambda_f(n) + \frac{1}{2} \Lambda_f(x) \delta_{x\in\mathbf{N}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L'}{L}(s,f) \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s. \tag{1.3.1}$$

On écrit ainsi une somme sur les puissances de premiers comme une intégrale complexe d'une fonction méromorphe. On peut alors (en faisant attention à tronquer et borner les intégrales infinies) déplacer le contour d'intégration. Observons que les pôles de la fonction $\frac{L'}{L}(s,f)$ sont exactement les points d'annulation de la fonction $L(s,f)$ avec résidu égal à l'ordre d'annulation en ce point, et ses pôles avec résidu égal à l'opposé de l'ordre

du pôle en ce point. Pour ces deux valeurs de résidus en un point ρ du plan complexe, nous utiliserons la notation commune $\mathrm{ord}_{s=\rho}(L(s,f))$. Le Théorème des résidus de Cauchy nous donne alors la Formule Explicite dont une version tronquée, ne considérant que la contribution des zéros non-triviaux de hauteur bornée, avec la dépendance en la fonction L analytique précisée dans les termes d'erreurs est donnée dans [Dev20a, Eq. (5)] :

$$\sum_{n<x}\Lambda_f(n) = -\operatorname{ord}_{s=1}(L(s,f))x - \sum_{\substack{L(\rho,f)=0\\ |\mathrm{Im}(\rho)|\leq X}}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(d\log x + \frac{x}{X}\left(d(\log x)^2 + \log(\mathfrak{q}(f)X^d)\right) + \log(\mathfrak{q}(f)X^d)\log X\right). \quad (1.3.2)$$

La somme sur les zéros de la fonction L est ici considérée avec multiplicités : si ρ est un zéro d'ordre m de $L(\cdot,f)$, il apparaît autant de fois dans la somme. La constante implicite est absolue. Cette formule est principalement utilisée dans le Chapitre 2 ou l'on étudie des fonctions sommatoires sur les nombres premiers. Elle nous indique bien le lien entre propriété des nombres premiers et zéros de fonctions L. Le terme d'erreur dans (1.3.2) permet de choisir si la somme sur les zéros contient ou non les zéros triviaux (souvent on préfère considérer la somme seulement sur les zéros non-triviaux).

Notons cependant les sommes tronquées brutalement ne sont parfois pas nécessaires et l'on peut se permettre de couper nos sommes avec un poids lisse à la place. Une troncation lisse permet en général de garantir plus facilement la convergence et de se poser moins de questions sur les échanges de limites. Ainsi, au lieu de la fonction de Heaviside, on peut, comme dans [IK04, Th. 5.11], considérer une fonction $h :]0,+\infty[\to \mathbf{C}$, lisse à support compact.

On considère alors sa transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}h(s) = \int_0^{+\infty} h(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

Comme l'intégrande est borné, cela définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$. La formule d'inversion de Mellin nous donne alors pour tout $c \in \mathbf{R}$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathcal{M}h(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s.$$

Cela nous donne en échangeant la somme et l'intégrale

$$\sum_{n\geq 1}\Lambda_f(n)h(n) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{L'}{L}(s,f)\mathcal{M}h(s)\,\mathrm{d}s. \quad (1.3.3)$$

On pourra alors de nouveau déplacer le contour d'intégration vers la gauche pour compter la contribution des zéros de la fonction $L(s,f)$, en utilisant des propriétés de la transformée de Mellin pour avoir convergence à l'infini et éventuellement borner l'intégrale résiduelle.

Dans le Chapitre 5, on s'intéresse aux zéros de la fonction L, on va alors regarder la formule explicite dans l'autre sens. On commence par fixer la transformée de Mellin φ avec de bonnes propriétés de décroissance à l'infini pour que toutes les sommes et intégrales soient définies. On écrit alors, en utilisant de nouveau le Théorème des Résidus de Cauchy,

$$\sum_{\substack{L(s,\rho)=0\\ -\frac{1}{2}<\mathrm{Re}(\rho)<2}}\varphi(\rho) + \operatorname{ord}_{s=1}(L(s,f))\varphi(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{L'}{L}(s,f)\varphi(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\frac{L'}{L}(s,f)\varphi(s)\,\mathrm{d}s. \quad (1.3.4)$$

Notons toutefois que selon notre condition sur les κ_j, l'expression ci-dessus pourrait contenir des zéros triviaux de la fonction L, et il est bien sûr préférable de choisir une ligne d'intégration à gauche qui ne contienne pas de zéros. Si l'on veut considérer seulement les zéros non-triviaux de la fonction L, il vaut mieux utiliser la fonction complétée $\Lambda(s,f)$ dont les zéros sont exactement les zéros non-triviaux de $L(s,f)$. Ainsi

$$\sum_{\substack{L(s,\rho)=0\\ \text{non-trivial}}} \varphi(\rho) + \operatorname{ord}_{s=1}(L(s,f))\varphi(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,f)\varphi(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi i}\int_{-1-i\infty}^{-1+i\infty} \frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,f)\varphi(s)\,\mathrm{d}s. \quad (1.3.5)$$

Il sera à partir de maintenant sous-entendu que toutes les sommes sur les zéros sont en fait sur les zéros non triviaux. En utilisant l'équation fonctionnelle (1.0.3), et dans le cas d'une fonction L réelle, on a $\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,f) = -\frac{\Lambda'}{\Lambda}(1-s,f)$, que l'on peut insérer dans la seconde intégrale pour obtenir après changement de variable :

$$\sum_{\substack{L(s,\rho)=0\\ \text{non-trivial}}} \varphi(\rho) + \operatorname{ord}_{s=1}(L(s,f))\varphi(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,f)\big(\varphi(s) + \varphi(1-s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

D'après (1.0.2), on a

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda}(s,f) = \frac{1}{2}\log q(f) + \frac{\gamma'}{\gamma}(s,f) + \frac{L'}{L}(s,f),$$

que l'on remplace dans l'intégrale. On peut alors déplacer les contours d'intégration en restant dans un domaine d'holomorphie de l'intégrande. En particulier, pour la contribution du terme constant et du facteur γ on peut déplacer la droite d'intégration en $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ de façon à avoir une expression symétrique. Pour la contribution du terme $\frac{L'}{L}$, on reconnaît une expression de la forme de (1.3.3). Finalement, on obtient la formule explicite

$$\sum_{\substack{L(s,\rho)=0\\ \text{non-trivial}}} \varphi(\rho) + \operatorname{ord}_{s=1}(L(s,f))\varphi(1) = \frac{\log q(f)}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \varphi(\tfrac{1}{2}+it)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \Big(\frac{\gamma'}{\gamma}(\tfrac{1}{2}+it,f) + \frac{\gamma'}{\gamma}(\tfrac{1}{2}-it,f)\Big)\varphi(\tfrac{1}{2}+it)\,\mathrm{d}t - \sum_{n\geq 1}\Lambda_f(n)\big(h(n)+\grave{h}(n)\big) \quad (1.3.6)$$

où h est la transformée de Mellin inverse de φ et $\grave{h}(x) = xh(\frac{1}{x})$ est la transformée de Mellin inverse de $s \mapsto \varphi(1-s)$. La preuve rigoureuse de cette formule explicite est contenue dans [RS96, Prop. 2.1], l'hypothèse sur φ revient à dire qu'elle est la transformée de Laplace d'une fonction lisse à support compact. Les hypothèses sur la fonction L sont un peu relâchées, Rudnick et Sarnak ne supposent pas la conjecture de Ramanujan–Petersonn pour les paramètres locaux $\alpha_{j,p}$ mais seulement la borne $|\alpha_{j,p}| < p^{\frac{1}{2}}$ qui, elle, est prouvée pour toutes les fonctions L que nous considérons dans ce mémoire. Nous pourrons donc utiliser la formule explicite (1.3.6) sans inquiétude.

1.4 Propriétés et conjectures diophantiennes sur les zéros de fonctions L

Pour la fonction ζ de Riemann et de nombreuses autres fonctions L, un grand nombre de zéros ont été approchés avec beaucoup de précision. On peut notamment trouver librement

de telles données dans la base de données des fonctions L et formes modulaires [LMF]. Tous ceux qui ont été calculés ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$ et à première vue, leurs parties imaginaires ne vérifient aucune propriété arithmétique. En considérant le fait que l'ensemble des nombres rationnels, et même celui des nombres algébriques, ont une mesure de Lebesque nulle dans l'ensemble des nombres réels, on peut imaginer que les parties imaginaires de zéros d'une fonction L sont en général des nombres transcendants, au minimum irrationnels. La conjecture d'Indépendance Linéaire (LI) de Wintner [Win41] pousse un peu cette idée en suggérant qu'il n'y a pas de relation (linéaire, avec des coefficients rationnels) entre parties imaginaires de zéros d'une fonction L, en dehors de celles déjà forcées par l'équation fonctionnelle et évoquées dans la Section 1.1. En particulier, les symétries par rapport aux axes réel et $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ font que l'on ne va considérer que les parties imaginaires positives, et compter celles-ci sans multiplicités. De plus, le point central $\frac{1}{2}$ jouant un rôle spécial, nous l'excluons aussi de la conjecture. Ainsi l'énoncé pour LI présenté ici diffère légèrement d'autres énoncés de la littérature, certains impliquant que l'ordre d'annulation en un zéro ne dépasse jamais 1, et/ou qu'il n'y a pas d'annulation en $s = \frac{1}{2}$. Finalement, certaines questions nécessitent de considérer plusieurs fonctions L conjointement, et l'on pourrait alors aussi vouloir que tous les zéros considérés soient linéairement indépendants.

Conjecture 1.4.1 (LI)**.** *Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de fonctions L analytiques. L'ensemble $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}} := \{\gamma > 0 : \exists \sigma \in]0,1[, \exists f \in \mathcal{S}$ tels que $L(\sigma + i\gamma, f) = 0\}$ est linéairement indépendant sur* $\mathbf{Q}$*.*

Dans ce mémoire, nous confondons souvent « partie imaginaire d'un zéro » et « zéro » lui-même, sans grande conséquence car il est rare que la conjecture LI soit supposée sans GRH. De la même façon que pour l'Hypothèse de Riemann, on peut tenter de quantifier à quel point on se rapproche de cette conjecture. Martin et Ng [MN20] ont pour cela proposé la définition suivante pour des zéros « autonomes » (self-sufficient).

Définition 1.4.2. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de fonctions L analytiques. Soit $\gamma \in \mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$, on dit que γ est *autonome* s'il n'est pas dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires finies de $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}} - \{\gamma\}$.

La conjecture 1.4.1 revient à dire que tous les zéros sont autonomes. Une version un peu plus faible de cette conjecture pourrait donc être la conjecture suivante.

Conjecture 1.4.3. *Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de fonctions L analytiques. On a*

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{Z}_{\mathcal{S}} \\ \gamma \text{ autonome}}} \frac{1}{\gamma} = +\infty.$$

De façon plus générale, une borne inférieure sur le nombre de zéros autonomes peut-être considérée comme une hypothèse raisonnablement plus faible que LI. Dans le même ordre d'idée de limiter les relations linéaires possibles entre les zéros, nous considérerons aussi l'hypothèse suivante légèrement plus faible que LI, imposant une condition sur le type de relation linéaire possible entre zéros.

Conjecture 1.4.4. *Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de fonctions L analytiques. On a pour toute combinaison linéaire finie à coefficients dans* $\mathbf{Z}$ *:*

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{Z}_{\mathcal{S}}} k_\gamma \gamma = 0 \Rightarrow \sum_{\gamma \in \mathcal{Z}_{\mathcal{S}}} k_\gamma \equiv 0 \pmod 2.$$

Il est à noter que toutes ces conjectures sont très loin d'être prouvées, on ne sait pas si la fonction ζ a même un zéro qui soit irrationnel, même si toutes les bonnes approximations qu'on a de ces zéros pointent vers de très gros dénominateurs si ceux-ci étaient rationnels.

De même, prouver qu'il existe au moins un zéro autonome est hors de portée, cela demande une connaissance sur tous les autres zéros.

Il est possible d'approcher le sujet numériquement si l'on a déjà une borne sur les coefficients des relations possibles. On peut en effet observer numériquement qu'il n'y a pas de relation à petits coefficients entiers entre les petits zéros de ζ. De telles approches sont développées dans [BBH$^+$71] et plus récemment dans [BT15] en lien avec le résultat de Ingham [Ing42, Th. A], pour donner des bornes inférieures (resp. supérieures) à $\limsup x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\leq x} \mu(n)$ (resp. $\liminf$), en fonction des relations possibles entre zéros. En particulier, [BT15] montre qu'il n'y a pas de relation linéaire à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ entre les 41 premiers zéros de ζ, et qu'une relation entre les 500 premiers zéros de ζ doit avoir un coefficient supérieur à $5,5 \times 10^5$.

Du côté théorique, le meilleur résultat actuel sur les relations possibles entre zéros d'une fonction L est dû à Li et Radziwiłł, [LR15, Th. 4]].

Théorème 1.4.5. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, alors pour $T \to \infty$, on a*

$$\frac{1}{T}\#\{T \leq n \leq 2T : \zeta(\tfrac{1}{2} + i(\alpha n + \beta)) \neq 0\} \geq \frac{1}{3} + o(1)$$

Ce théorème nous donne une borne supérieure sur le nombre de zéros possibles de la fonction ζ qui sont dans une progression arithmétique : au plus $\frac{2}{3}T$ termes de la progression, correspondant à un paramètre entier n entre T et $2T$. De tels zéros $\gamma_i = \alpha n_i + \beta$ satisferaient une relation de la forme $m(\gamma_1 - \gamma_2) - n(\gamma_2 - \gamma_3) = 0$ pour des entiers m, n. L'hypothèse LI implique donc que dans une telle progression arithmétique, au plus deux éléments sont des zéros de ζ. La borne donné par ce théorème, au plus $\frac{2}{3}$ de la progression, est en particulier infinie et donc bien loin de ce qu'on espère.

L'énoncé du Théorème 1.4.5 ne parle que de la fonction ζ. Il améliore un résultat de Martin et Ng [MN13, Th. 1.1] qui avait juste manqué la densité positive (pour l'intersection d'une progression arithmétique avec les points de non-annulation) d'un facteur logarithmique, mais qui traitait cependant de fonctions L de Dirichlet. On note aussi que la proportion de non-annulation dans une progression arithmétique peut être améliorée en $\frac{1}{2}$ en supposant l'Hypothèse de Riemann, comme conséquence de [FSZ09, Th. 6] sur la répartition des parties fractionnaires de zéros de fonctions L générales.

Il serait intéressant de donner un énoncé semblable au Théorème 1.4.5 pour des fonctions L plus générales. Dans une remarque à la suite de leur énoncé, les auteurs suggèrent que le cas des fonctions L de Dirichlet est un exercice de réécriture de leur preuve. C'est le projet que j'ai proposé pour le mémoire de M2 de Chadi Balbal (étudiant à Bordeaux). Il a notamment adapté les outils sur les moments ramollis (ou *mollified moments*) utilisés dans [LR15], qui sont une technique classique de la théorie analytique des nombres, pour prouver un analogue du Théorème 1.4.5 pour les fonctions L de Dirichlet en prenant en compte la dépendance en le conducteur. Le cas des fonctions L de degré supérieur est encore ouvert.

Chapitre 2

Annulation au point central et biais dans la répartition d'entiers

La principale motivation de ce chapitre est l'étude du biais de Chebyshev, aussi appelé course de Shanks–Rényi, et de ses généralisations. On va ici présenter le cadre général, en s'appuyant sur la bibliographie annotée [MYB$^+$25] pour les notations homogénéisées et toutes les références. L'origine de ce sujet se trouve dans une lettre de Chebyshev [Che99] où celui-ci observe une différence dans le second terme du développement asymptotique du nombre de premiers congruents à 3 (mod 4) par rapport à ceux congruents à 1 (mod 4) dans l'intervalle $[2, x]$ quand x varie : le premier semble toujours au dessus du second. Cette observation a mené à diverses découvertes au fil des années et autres questions ou généralisations à d'autres « courses de nombres premiers » donnant naissance au sous-domaine que l'on appelle désormais la théorie *comparative* des nombres. A titre d'exemple, Littlewood [Lit14] a prouvé qu'il y a une infinité de changements de signes dans le terme d'erreur du théorème des nombres premiers. Knapowski et Turán ont publié ensemble une série d'une vingtaine d'articles commençant par [KT62] et introduisant l'appellation de « théorie comparative des nombres » dans les années soixante. Ils y montrent notamment des résultats de type Oméga pour les termes de restes du théorème des nombres premiers en progression arithmétique. Plus récemment, l'article de Rubinstein et Sarnak [RS94] a donné un nouveau souffle à ce sujet, en le considérant du point de vue probabiliste. Pour une introduction à ce sujet, on pourra avantageusement consulter l'article de survol de Granville et Martin [GM06], ou l'article de Fiorilli et Jouve sur `image des mathématiques`. Le cinquième chapitre du livre de Kowalski [Kow21] propose aussi une exposition du point de vue probabiliste sur le biais de Chebyshev.

Commençons par présenter un contexte général pour expliquer les courses de nombres premiers. Choisissons A et B deux propriétés qui peuvent s'appliquer à des nombres premiers. De telles propriétés sont par exemple « être congru à a modulo q » (pour a, q des entiers fixés et premiers entre eux), c'est le contexte d'origine du biais de Chebyshev, mais elles peuvent être plus compliquées, par exemple « a est un cube modulo p », ou encore « a engendre le groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ »,... etc. nous en donnerons d'autres qui nécessitent un peu plus de prérequis plus tard. On suppose connu (et démontré) qu'il y a *beaucoup* et *autant* de nombres premiers satisfaisant l'une ou l'autre — au sens $\pi(x; A) \sim \pi(x; B) \sim c\pi(x)$, où $\pi(x)$ (resp. $\pi(x; A)$) est le nombre de premiers $\leq x$ (resp. et satisfaisant la propriété A) — on s'intéresse alors à la fonction différence $x \mapsto \Delta^\pi(x; A, B) := \pi(x; A) - \pi(x; B)$. Ou encore plus généralement, si $\pi(x; A) \sim c\pi(x; B)$, on peut aussi normaliser les comptes pour s'intéresser à la différence $x \mapsto \Delta^\pi(x; A, B) := \pi(x; A) - c\pi(x; B)$. Dans ce sens, il peut aussi être naturel de comparer le compte $\pi(x, A)$ avec son terme principal en considérant la différence $x \mapsto \Delta^\pi(x; A) := \pi(x; A) - c\,\mathrm{Li}(x)$. Ce que l'on appelle alors l'étude du biais de Chebyshev pour les propriétés A et B est l'étude de cette fonction différence, mais surtout

de son signe. On définit alors l'ensemble

$$P_{A,B} := \{x \geq 2 : \Delta^\pi(x; A, B) > 0\},$$

et la question que l'on se pose est de déterminer la *taille* de cet ensemble.

Une première approche probabiliste simple pour expliquer une telle question est la suivante. On peut considérer que les événements A et B se produisent avec la même probabilité, disons $\frac{1}{2}$ comme un lancer de pièce à pile ou face. Chaque nombre premier correspond à un lancer de pièce, donnant A ou B avec probabilité $\frac{1}{2}$. Après un très grand nombre de lancers, la loi des grands nombres nous assure qu'il y a eu à peu près autant d'issues A que B. Mais il est assez rare qu'il y ait exactement le même nombre d'issues A et B, le plus souvent la fonction $x \mapsto \Delta^\pi(x; A, B)$ est non nulle, et l'on peut discuter de son signe. Cette fonction décrit en fait le résultat d'une marche aléatoire : $+1$ si $p \in A$, et -1 si $p \in B$. L'ensemble $P_{A,B}$ est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le chemin est au-dessus de l'axe des abscisses. On pourrait penser que l'on va souvent croiser l'axe des abscisses (retour à l'origine) et que la fonction $\Delta^\pi(\cdot; A, B)$ est positive à peu près la moitié du temps, mais ce n'est pas ce que l'on observe dans une marche aléatoire en général.

En effet pour une telle marche aléatoire (voir par exemple [Fel68, Chap. III] pour les résultats évoqués ici), la probabilité de passer à l'origine au temps $2n$ est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (elle est nulle pour un temps impair), on en déduit une probabilité 1 que le chemin croise l'axe des abscisses en un temps fini, mais en même temps l'espérance du temps de premier passage est infinie. Il n'est alors pas si étonnant d'observer de très longs intervalles où le chemin reste du même côté de l'axe des abscisses. En fait, la probabilité que la particule se trouve au-dessus de l'axe des abscisses pendant un temps $2k$ dans une marche aléatoire de longueur $2n$ est de l'ordre de $\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$ (loi arcsinus discrète). Il y a donc peu de chances que la particule soit au dessus de l'axe des abscisses la moitié du temps ($k \simeq \frac{n}{2}$), et il y a plus de chance qu'elle reste du même côté pour presque toute la durée de la marche (k très petit ou très proche de n). De la même façon, le nombre de changements de signes attendu dans une marche de longueur n est de l'ordre de $\sqrt{n}$.

Comme on veut étudier le comportement de la fonction $\Delta^\pi(\cdot; A, B)$ sur tout l'ensemble des réels positifs (plutôt que jusqu'en un temps fini), le cadre des mouvements browniens, plutôt que celui des marches aléatoires, correspond mieux au comportement limite que l'on espère observer. Il permet aussi de montrer ces intuitions sur les changements de signes. Les graphes obtenus lors de tracés de telles fonctions $\Delta^\pi(\cdot; A, B)$ sont bien ressemblants à des graphes résultants de mouvements browniens.

Finalement, (même en supposant que les variables x sont des entiers naturels, ou des premiers) il est raisonnable d'imaginer que l'ensemble $P_{A,B}$ est infini, on va alors utiliser une notion de *densité* pour parler de la taille d'un tel ensemble. Commençons par la densité naturelle :

Définition 2.0.1. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble $\mathcal{P} \subset [2, +\infty[$, on définit la densité naturelle de A dans $\mathcal{P}$ par

$$\mathrm{dens}_{\sup}(A) = \limsup_{X \to \infty} \frac{|\{x \in A : x \leq X\}|}{|\{x \in \mathcal{P} : x \leq X\}|}$$

et

$$\mathrm{dens}_{\inf}(A) = \liminf_{X \to \infty} \frac{|\{x \in A : p \leq X\}|}{|\{x \in \mathcal{P} : x \leq X\}|}.$$

Si ces deux quantités sont égales, on dit que l'ensemble A admet une densité naturelle. Leur valeur commune est appelée *densité naturelle* de A et notée $\mathrm{dens}(A)$.

Définissons tout de suite aussi la densité logarithmique :

Définition 2.0.2. Soit A un sous-ensemble d'un ensemble $\mathcal{P} \subset [2, +\infty[$, on définit la densité logarithmique de A dans $\mathcal{P}$ par

$$\overline{\delta}(A) = \delta_{\sup}(A) = \limsup_{X\to\infty} \frac{\sum_{\substack{x\in A\\ x\leq X}} \frac{1}{x}}{\sum_{\substack{x\in \mathcal{P}\\ x\leq X}} \frac{1}{x}}$$

et

$$\underline{\delta}(A) = \delta_{\inf}(A) = \liminf_{X\to\infty} \frac{\sum_{\substack{p\in A\\ x\leq X}} \frac{1}{x}}{\sum_{\substack{x\in \mathcal{P}\\ x\leq X}} \frac{1}{x}}.$$

Si ces deux quantités sont égales, on dit que l'ensemble A admet une densité logarithmique. Leur valeur commune est appelée *densité logarithmique* de A et notée $\delta(A)$.

Les définitions données ici fonctionnent bien dans le cas d'ensembles discrets, on remplace les sommes par des intégrales pour des ensembles continus. Les deux notions de densité coïncident si elles existent, mais il existe des ensembles qui ont une densité logarithmique sans avoir de densité naturelle. C'est le cas par exemple pour l'ensemble des nombres premiers dont le premier chiffre est 1 (voir [FL94]). On pense que c'est aussi le cas a priori pour les ensembles de type $P_{A,B}$ définis plus haut : on trouve dans [Kac95] la preuve conditionnelle à l'Hypothèse de Riemann Généralisée que des ensembles de type $P_{A,B}$ n'admettent pas de densité naturelle dans $[2, +\infty[$, alors qu'en supposant l'Hypothèse de Riemann et celle d'Indépendance Linéaire pour les fonctions L de Dirichlet, [RS94, FM13, BMP25] calculent des valeurs de densité logarithmique (aussi dans $[2, +\infty[$) pour de tels ensembles. Enfin, dans [LMP19], Lichtman, Martin et Pomerance montrent que la densité logarithmique d'ensembles de type $P_{A,B}$ par rapport à l'ensemble des nombres premiers existe et est égale à la même densité par rapport à l'ensemble réel, sous les mêmes conditions. Avant de continuer, notons qu'il est clair qu'un ensemble qui admet une densité (inférieure) naturelle (ou logarithmique) non-nulle par rapport à un ensemble infini est lui-même infini.

Les calculs explicites de densités logarithmiques d'ensembles $P_{A,B}$ effectués par Rubinstein et Sarnak [RS94] utilisent de bonnes approximations des zéros de fonctions L. La formule pour calculer ces densités suit en effet de formules explicites, et celles-ci nous donnent en fait un résultat plus général que juste l'existence de la densité. Rubinstein et Sarnak obtiennent une description de la loi de probabilité suivie par les valeurs de la fonction différence $\Delta^{\pi}(\cdot; A, B)$. Précisément ils décrivent la *distribution limite* dont nous parlons à la Section 2.1.2, voir en particulier la Définition 2.1.2.

Suite à l'article [RS94], qui le prouve dans le cas des classes de congruences, l'existence de la distribution limite associée à une course de nombres premiers a été démontrée dans de nombreux autres cadres, notamment le biais dans les termes secondaires liés au théorème d'équirépartition de Chebotarev [Ng00, Bai21, FJ24], mais aussi pour les termes secondaires dans la loi d'équirépartition de Sato-Tate pour les nombres de points rationnels de courbes elliptiques [Sar07, Fio14a]. Dans la Section 2.1 nous présentons un cadre général à l'étude de tels biais comme développé dans [Dev20a, Dev26].

Notons que dans ces résultats, l'annulation de la fonction L au point central discutée à la Section 1.1 est une question cruciale et a une influence directe sur la direction du biais : comme observé par Mazur [Maz08] et expliqué par Sarnak [Sar07], une courbe elliptique de plus grand rang induira un biais plus important. Plus généralement, supposer la conjecture 1.4.1 (LI) d'indépendance linéaire des parties imaginaires de zéros de la fonction L, permet de traiter la question avec des outils de probabilités : on va considérer la contribution de chaque zéro comme une variable aléatoire indépendante des autres. Ces hypothèses nous motivent par la suite à chercher des conditions pour prouver qu'elles sont

satisfaites. On souhaite aussi pouvoir montrer des résultats inconditionnels ou avec des hypothèses moins fortes, c'est le sujet de la Section 2.2.

En étudiant une famille de fonctions L associée à des caractères de Hecke, j'ai mis à jour une course entre nombre premiers qui semble complémentent biaisée. La Section 2.3 présente les calculs effectués ainsi que l'heuristique pour expliquer les observations.

2.1 Un cadre général pour des analogues au biais de Chebyshev

Dans cette section, nous nous plaçons dans un cadre général d'étude de tels biais comme dans [ANS14] qui a été l'inspiration pour les généralisations dans ma thèse [Dev20a], et dans l'article plus récent [Dev26]. Nous allons nous concentrer sur l'existence de la distribution limite pour des courses de nombres premiers générales, construites en utilisant des coefficients de fonctions L. L'idée soutenue dans cette section est qu'une fois cette mesure de probabilité définie, savoir calculer sa valeur moyenne et sa variance donne déjà de bonnes informations sur un possible biais dans la répartition des nombres premiers associée. En effet, appliquer par exemple l'inégalité de Bienaimé–Chebyshev nous assure déjà que l'on peut s'attendre à ce que la répartition de masse de la mesure soit d'autant plus proche de la moyenne que la variance est petite en comparaison. Ainsi, on s'attend à observer de grand biais si la valeur moyenne est grande en comparaison de la variance et on imaginera une répartition plus uniforme des signes dans le cas inverse. Nous pouvons faire cela en ne supposant que l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour la fonction L considérée.

Nous souhaitons étudier des fonctions du type $x \mapsto \Delta^\pi(x; A, B) = \pi(x; A) - c\pi(x; B)$ où A et B sont des propriétés qui peuvent être vérifiées par des nombres premiers (par exemple être congru à 1 ou 3 modulo 4), $\pi(x, A)$ est le nombre de premiers inférieurs à x vérifiant la propriété A, et l'on suppose $\pi(x; A) \sim c\pi(x; B)$. L'hypothèse que l'on va faire dans tout ce chapitre est que l'on peut encoder cette différence à l'aide de coefficients de fonctions L analytiques. C'est le cas par exemple pour la question originelle de Chebyshev : on étudie la fonction différence

$$\Delta^\pi(\cdot; 4, 1, 3) : x \mapsto \#\{p \leq x, p \equiv 1 \bmod 4\} - \#\{p \leq x, p \equiv 1 \bmod 4\}. \tag{2.1.1}$$

Il est commun d'écrire un cardinal comme la somme d'une fonction indicatrice, on peut réécrire cette différence comme une somme sur les nombres premiers

$$\Delta^\pi(x; 4, 1, 3) = \sum_{p \leq x} \chi_4(p),$$

où χ_4 est le caractère quadratique de Dirichlet modulo 4 défini par

$$\chi_4 : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv -1 \bmod 4 \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Appliquer une formule explicite telle que (1.3.2) à la fonction L de Dirichlet $L(s, \chi_4) = \sum_{n \geq 1} \chi_4(n) n^{-s}$ nous permet alors de réécrire $\Delta^\pi(x; 4, 1, 3)$ à l'aide des zéros de cette fonction. On obtient pour tout $x, X \geq 2$,

$$\sum_{p^k \leq x} \chi_4(p^k) \log(p) = - \sum_{\substack{L(\rho, \chi_4) = 0 \\ |\mathrm{Im}(\rho)| \leq X}} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\log x + \frac{x}{X}\left((\log x)^2 + \log(\mathfrak{q}(\chi_4)X)\right) + \log(\mathfrak{q}(\chi_4)X) \log X\right).$$

Pour ne garder que la somme sur les premiers à gauche, on évalue la somme sur les puissances supérieures de premiers :

$$\sum_{\substack{p^k\leq x\\ k\geq 2}} \chi_4(p^k)\log(p) = \sum_{p\leq \sqrt{x}} \log(p) + O(x^{\frac{1}{3}}) = x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{3}}).$$

Puis on effectue une intégration par parties pour enlever le poids logarithmique. On obtient finalement [RS94, (2.5) et (2.6)]

$$\Delta^\pi(x;4,1,3) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x}\Big(-1 - \sum_{\substack{L(\frac{1}{2}+i\gamma,\chi_4)=0\\ |\gamma|\leq X}} \frac{x^{i\gamma}}{\frac{1}{2}+i\gamma}\Big) + O\Big(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^2} + \frac{x}{X}(\log x + \log X)\Big).$$

Comme on est seulement intéressé par le signe pour x suffisamment grand, en prenant $X \approx x$, on peut se concentrer sur l'intérieur de la première parenthèse. Alors, on a le -1 qui est la contribution des carrés de premiers, et une somme sur les zéros de notre fonction L de fonctions oscillantes que l'on peut réécrire comme $x \mapsto c_\gamma \cos(\gamma \log x + \phi_\gamma)$. Pour $\gamma \neq 0$, chacune de ces fonctions oscille, pour être « aussi souvent » (en échelle logarithmique) négative que positive. L'idée de [RS94], est de décrire le comportement probabiliste de la somme, et on peut dire des choses plus ou moins précises selon ce qu'on sait sur les γ's. Mais globalement, l'idée à retenir, c'est que (si tout se passe bien) le terme constant est responsable du biais : comme ici on a le terme constant égal à -1, notre fonction Δ^π est plus souvent négative. Autrement dit, on a plus souvent $\pi(x;4,3) > \pi(x;4,1)$ que $\pi(x;4,3) < \pi(x;4,1)$.

Les détails sont donnés dans [RS94], et dans [Dev20a] de façon générale pour des courses entre classes de congruences. Après des généralisations à d'autres familles de fonctions L par divers mathématiciens [Ng00, Sar07, ANS14, Fio14a], j'ai montré que la même preuve s'adapte très bien à des fonctions L générales telles que celles de la Définition 1.0.1. On observe que la contribution des carrés de premiers est de l'ordre de $\sqrt{x}$ qui est aussi l'ordre de la contribution de chaque zéro $\frac{x^\rho}{\rho}$ si l'on suppose l'Hypothèse de Riemann pour cette fonction L. Cette contribution est la cause principale du biais, comme on le verra dans cette partie. Si on suppose l'existence de contre-exemples à l'Hypothèse de Riemann il est possible de ne pas avoir de biais puisqu'alors les oscillations provenant de zéros de partie réelle plus grande que $\frac{1}{2}$ ont un ordre de grandeur supérieur (voir notamment [Dev20a, Th.2.1]), mais Ford, Konyagin et Lamzouri [FK02, FK03, FLK13] ont aussi montré l'existence de configurations de zéros en dehors de la droite $\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ qui impliquerait des situations de biais extrêmes. Nous supposons donc la plupart du temps l'Hypothèse de Riemann Généralisée dans cette partie.

Revenons au cas général et admettons que l'on veut étudier la fonction

$$\Delta^\pi(x;f) := \sum_{p\leq x} \lambda_f(p) + \mathrm{ord}_{s=1}(L(s,f))\,\mathrm{Li}(x). \tag{2.1.2}$$

Le second terme ici est en général nul (cas d'une fonction L holomorphe), sinon c'est le premier terme du développement asymptotique de $x \mapsto \sum_{p\leq x}\lambda_f(p)$: on veut faire une « course » entre deux comptes de même taille, ce qui revient à se concentrer sur le terme secondaire dans le développement asymptotique. On réécrit ici la formule explicite (1.3.2),

$$\begin{aligned}\sum_{n<x}\Lambda_f(n) = &-\mathrm{ord}_{s=1}(L(s,f))x - \sum_{\substack{L(\rho,f)=0\\ |\mathrm{Im}(\rho)|\leq X}} \frac{x^\rho}{\rho}\\ &+ O\left(d\log x + \frac{x}{X}\left(d(\log x)^2 + \log(\mathfrak{q}(f)X^d)\right) + \log(\mathfrak{q}(f)X^d)\log X\right).\end{aligned}$$

De nouveau, le premier terme, d'ordre x, va être soit nul (cas d'une fonction L holomorphe), soit compensé dans le même ordre d'idée que dans la Définition (2.1.2). On rappelle que la somme sur les zéros de la fonction L est ici considérée avec multiplicités : si ρ est un zéro d'ordre m de $L(\cdot, f)$, il apparaît autant de fois dans la somme. On évalue la contribution des puissances de premiers par

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p^k<x\\k\geq 3}} \Lambda_f(p^k) &= \sum_{k\geq 3}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{k}}}\sum_{j=1}^{d}(\alpha_{f,j}(p))^k\log(p)\\ &\leq \sum_{k\geq 3}\sum_{p\leq x^{\frac{1}{k}}} d\log(p) \ll dx^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

avec une constante implicite absolue. Le Théorème des Nombres Premiers pour le second moment, qui nous donne la « contribution des carrés de premiers » revient à estimer la somme suivante :

$$\sum_{p^2<x}\Lambda_f(p^2) = \sum_{p\leq\sqrt{x}}\sum_{j=1}^{d}\alpha_{f,j}(p)^2\log(p).$$

2.1.1 La contribution des carrés de premiers

Dans le cas général, la contribution des carrés de premiers peut être comprise comme « le théorème des nombres premiers pour la fonction *second moment* de notre fonction L ».

Définition 2.1.1. Soit $L(s,f)$ une fonction L analytique de degré d selon la Définition 1.0.1. On note ses facteurs locaux

$$L(s,f) = \prod_p\prod_{j=1}^{d}\left(1-\alpha_{f,j}(p)p^{-s}\right)^{-1}$$

pour $\mathrm{Re}(s)>1$. Alors la fonction *second moment* associée est définie comme

$$L(s,f^{(2)}) = \prod_p\prod_{j=1}^{d}\left(1-\alpha_{f,j}(p)^2p^{-s}\right)^{-1}$$

sur $\mathrm{Re}(s)>1$.

On peut aussi donner une définition globale :

$$L(s,f^{(2)}) = L(s,\mathrm{Sym}^2 f)L(s,\wedge^2 f)^{-1}.$$

On rappelle que les fonctions $L(s,\mathrm{Sym}^2 f)$ et $L(s,\wedge^2 f)$ sont des fonctions L de degré supérieures qui peuvent être définies localement $\mathrm{Re}(s)>1$ comme la fonction L carré symétrique

$$L(s,\mathrm{Sym}^2 f) = \prod_p\prod_{1\leq j\leq k\leq d}\left(1-\alpha_{f,j}(p)\alpha_{f,k}(p)p^{-s}\right)^{-1}$$

et la fonction L carré alterné

$$L(s,\wedge^2 f) = \prod_p\prod_{1\leq j<k\leq d}\left(1-\alpha_{f,j}(p)\alpha_{f,k}(p)p^{-s}\right)^{-1}.$$

Si l'on considère le point de vue des fonctions L de représentations automorphes, f étant une représentation de dimension d, $\mathrm{Sym}^2 f$ et $\wedge^2 f$ sont des représentations de dimensions respectives $\frac{d(d+1)}{2}$ et $\frac{d(d-1)}{2}$.

La dénomination de fonction L second moment est inspirée de l'article de Conrad [Con05] qui explique l'apparition d'un facteur $\sqrt{2}$ dans l'asymptotique du produit eulérien de l'énoncé originel de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. En fait, dans [Gol79], Goldfeld a montré qu'un facteur $\sqrt{2}$ « inattendu » apparaît dans le développement asymptotique des produits eulériens partiels de fonctions L de courbes elliptiques au point central. Conrad [Con05, Th.1.2] généralise ce résultat à de nombreuses fonctions L (dans un cadre proche de notre Définition 1.0.1). On observe notamment que le résultat de Goldfeld est dû au fait que, pour une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ sans multiplication complexe, la fonction L second moment s'annule à l'ordre 1 en $s = 1$. L'ordre d'annulation en 1 de cette fonction second moment donne aussi le terme principal dans la version pondérée des courses de nombres premiers comme étudiée par l'école japonaise [KK22, AK23, KK23, Suz25], récemment aussi considérée par Hayani [Hay26] et Sheth [She25] pour en affaiblir les hypothèses.

Pour pouvoir obtenir un théorème des nombres premiers pour la fonction L second moment, on va supposer qu'il existe un ouvert $U \supset \{\mathrm{Re}(s) \geq 1\}$ tel que la fonction $L(\cdot, f^{(2)})$ se prolonge en une fonction méromorphe sur U, ou autrement dit, que les fonctions $L(\cdot, \mathrm{Sym}^2 f)$ et $L(\cdot, \wedge^2 f)$ se prolongent de façon méromorphe sur U. De plus on suppose que le prolongement sur $U - \{1\}$ n'a ni zéro ni pôle. Ce qu'il se passe en $s = 1$ est crucial, puisque c'est ce qui va nous donner le comportement asymptotique. Si f est irréductible auto-duale, alors d'après [MW89, Appendice] la fonction produit de Rankin–Selberg $L(s, f \otimes f) = L(s, \mathrm{Sym}^2 f)L(s, \wedge^2 f)$ admet un pôle d'ordre 1 en $s = 1$. La représentation f est dite « orthogonale » ou « symplectique » selon si c'est le premier ou le second facteur qui porte le pôle. Le type de la représentation peut être déterminé par le calcul de son indice de Schur [Sch], qui vaut 1 pour une représentation orthogonale et -1 pour une représentation symplectique. On en déduit que la fonction $L(s, f^{(2)})$ admet un zéro ou un pôle d'ordre 1 en $s = 1$, et qu'il est possible de déterminer lequel des deux avec des considérations algébriques.

Ainsi, sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour ces deux fonctions, la contribution des carrés de nombres premiers est donnée par

$$\sum_{p^2<x} \Lambda_f(p^2) = -\operatorname{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)}))x^{\frac{1}{2}} + O(dx^{\frac{1}{4}} \log x \log(x^d \mathfrak{q}(f))). \tag{2.1.4}$$

La constante implicite est absolue et on pourra voir la preuve de [Dev26, Prop. 6.2] pour la dépendance précise en les paramètres.

Finalement, en rassemblant (1.3.2) avec (2.1.3) et (2.1.4) la formule explicite donne

$$\sum_{p<x} \lambda_f(p)\log(p) + \operatorname{ord}_{s=1}(L(s,f))x = -\operatorname{ord}_{s=1}(L(s,f^{(2)}))x^{\frac{1}{2}} - \sum_{\substack{L(\rho,f)=0 \\ |\mathrm{Im}(\rho)|\leq X}} \frac{x^\rho}{\rho}$$
$$+ O\Big(dx^{\frac{1}{3}} + dx^{\frac{1}{4}} \log x \log(x^d \mathfrak{q}(f)) + \frac{x}{X}\big(d(\log x)^2 + \log(\mathfrak{q}(f)X^d)\big) + \log(\mathfrak{q}(f)X^d)\log X\Big).$$

Après intégration par parties et en prenant $x = X$, on obtient [Dev26, Prop. 6.2]

$$\Delta^\pi(x; f) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x}\Big(-\operatorname{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)})) - \sum_{\substack{L(\frac{1}{2}+i\gamma,f)=0 \\ |\gamma|\leq x}} \frac{x^{i\gamma}}{\frac{1}{2}+i\gamma}\Big) + O\Big(d\log(\mathfrak{q}(f))\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log x)^2}\Big) \tag{2.1.5}$$

De nouveau si on ne considère que le signe du terme constant dans la première parenthèse, on voit la contribution des carrés de premiers mais aussi la potentielle annulation en $s = \frac{1}{2}$ de notre fonction L. Ces deux termes sont, du moins en première approximation la cause du biais.

Il est facile de voir que l'on peut considérer de la même façon des fonctions de la forme $\sum_f c_f \Delta^\pi(\cdot, f)$, somme finie, avec des coefficients c_f réels ou conjugués $c_{\overline{f}} = \overline{c_f}$. C'est en particulier ce que Rubinstein et Sarnak font pour étudier la répartition de premiers dans deux classes a et b de congruences modulo un entier q : la somme sera alors sur les caractères de Dirichlet χ modulo q non-triviaux, et les coefficients $c_\chi = \overline{\chi}(a) - \overline{\chi}(b)$. La nouveauté de l'article [Dev26] est de considérer des sommes infinies, ce qui permet d'encoder plus de courses entre nombre premiers. Il faut alors une condition supplémentaire sur les coefficients c_f pour assurer la convergence des termes d'erreur. C'est la raison pour laquelle nous avons travaillé à donner de façon précise les dépendances en f dans l'expression (2.1.5). Dans la partie suivante, nous reprenons cette expression pour expliciter plus en détails cette idée générale que « le terme constant donne la direction du biais ».

2.1.2 La distribution limite

Commençons par redonner le contexte. On se donne une suite finie ou infinie $\mathcal{S} = \{L(\cdot, f_m) : m \geq 0\}$ de fonctions L analytiques (suivant la Définition 1.0.1), de degrés $(d_m)_{m\geq 0}$, et conducteurs analytiques $(\mathfrak{q}(f_m))_{m\geq 0}$. À cette suite on associe aussi des coefficients complexes $\underline{c} = (c_m)_{m\geq 0}$, en supposant que la série

$$\sum_{m\geq 0} |c_m| d_m \log \mathfrak{q}(f_m) < \infty \tag{2.1.6}$$

est convergente. On considère alors la fonction

$$\Delta^\pi(\cdot, \mathcal{S}, \underline{c}) : x \mapsto \sum_{m\geq 0} c_m \Delta^\pi(x, f_m) = \sum_{m\geq 0} c_m \big(\sum_{p\leq x} \lambda_{f_m}(p) + \mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f_m)) \,\mathrm{Li}(x) \big) \tag{2.1.7}$$

qui est une somme potentiellement infinie de (2.1.2). L'idée est que cette expression permet d'encoder des fonctions du type $\Delta^\pi(\cdot, A, B)$ ou $\Delta^\pi(\cdot, A)$ comme définies dans l'introduction. C'est le cas par exemple pour la fonction $\Delta_\pi(\cdot; 4, 1, 3)$ vu en (2.1.1) pour le singleton $\mathcal{S} = \{L(\cdot, \chi_4)\}$. La condition (2.1.6) ne nous permet malheureusement pas toujours de considérer toutes les fonctions $\Delta^\pi(\cdot, A, B)$ que l'on voudrait et il faudra parfois accepter de considérer de telles fonctions pondérées (plutôt qu'avec un compte exact ± 1), on verra notamment la Section 2.3.1 pour un tel phénomène. L'idée d'utiliser une somme infinie de telles contributions est pour la première fois expliquée dans la lettre de Sarnak à Mazur [Sar07] pour traiter de courses liées aux nombres de points de courbes elliptiques telles que présentées dans [Maz08], puis développée dans le cas des corps de fonctions par Cha, Fiorilli et Jouve dans [CFJ16], et fait finalement l'objet d'un traitement général dans [Dev26].

Dans tous les cas, pour que $\Delta^\pi(\cdot, \mathcal{S}, \underline{c})$ soit une fonction à valeurs réelles, il est utile de supposer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est stable par conjugaison : si $L(\cdot, f_m) \in \mathcal{S}$ alors $L(\cdot, \overline{f_m}) \in \mathcal{S}$ et qu'alors les coefficients c_m correspondant à f_m et $c_{m'}$ correspondant à $\overline{f_m}$ sont conjugués. Ce que l'on supposera par la suite.

La condition (2.1.6) permet exactement de sommer les termes d'erreurs dans l'expression (2.1.5), et l'on obtient ainsi une expression de $\frac{\log x}{\sqrt{x}} \Delta^\pi(x, \mathcal{S}, \underline{c})$ comme un terme constant venant de la contribution des carrés de premiers et de l'annulation au point central puis des termes oscillants indexés par les zéros de fonctions L et un terme de reste en $O(\frac{1}{\log x})$. L'idée de Rubinstein et Sarnak [RS94] est qu'au lieu d'étudier précisément le comportement erratique de cette somme de fonctions oscillantes, on peut le considérer comme un bruit, ou une variable aléatoire, qui est nulle en moyenne. On considère alors à la place la distribution des valeurs de ce bruit, en le traitant de façon probabiliste. Cela motive l'utilisation de la notion de distribution limite.

Définition 2.1.2. Soit Δ une fonction définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles, on dit que Δ admet une distribution logarithmique limite $\mu = \mu^\Delta$ si pour toute fonction g continue

bornée et lipschitzienne sur $\mathbf{R}$ on a

$$\lim_{Y\to+\infty}\frac{1}{Y}\int_2^Y g(\Delta(e^y))dy=\int_{\mathbf{R}} g(t)d\mu(t). \tag{2.1.8}$$

Il est sous-entendu dans la définition que la limite existe pour toute fonction test g. En effet la mesure μ^Δ doit être comprise comme une mesure de probabilité (avec approximation continue, et poids logarithmique) dont la densité est donnée par la limite d'un histogramme des valeurs de Δ. Le fait que Δ admet une distribution *logarithmique* limite est équivalent au fait que la fonction $\Delta\circ\exp$ admet une distribution limite. Ce changement de variable est nécessaire pour espérer l'existence des limites dans le cadre de biais de Chebyshev. Comme c'est le cas pour la fonction indicatrice $\delta_{\Delta^\pi(\cdot;A,B)>0}$, on ne s'attend pas à ce qu'une fonction $\Delta^\pi(\cdot;f)$ admette une distribution limite, mais on peut montrer sous l'Hypothèse de Riemann qu'elle a bien une distribution *logarithmique* limite. Akbary, Ng et Shahabi ont en fait montré dans [ANS14] qu'une fonction de type $y\mapsto\sum_\gamma c_\gamma e^{i\gamma y}$ telle qu'apparaissant dans l'expression de $\Delta^\pi(e^y,f)$ est presque périodique au sens de Besicovitch, grâce à de bonnes propriétés sur l'espacement des zéros γ et des bornes sur les coefficients c_γ. Le fait que les fonctions presque périodiques avec un nombre fini de termes admettent une distribution limite est une conséquence du Théorème d'Equirépartition de Kronecker–Weyl, qui est aussi énoncé sous la forme utile dans notre contexte dans [Hum10, Lem. 4.3], [Dev20a, Lem. 4.8] et [Bai22, Th. 1.17].

Observons finalement que si la fonction $\Delta^\pi(\cdot;A,B)$ admet une distribution logarithmique limite μ^Δ alors la densité logarithmique de l'ensemble $P_{A,B}=\{x:\Delta^\pi(x;A,B)>0\}$ n'est pas loin d'exister et d'être égale à $\mu^\Delta(]0,+\infty[)$. Nous reviendrons sur les détails de cette approximation dans la Section 2.2.

Pour pouvoir énoncer le théorème général, introduisons d'abord quelques notations autour des zéros des fonctions L dans $\mathcal{S}$. Comme on va ici supposer l'Hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L considérées, pour $\gamma\in\mathbf{R}$, on note $\mathrm{ord}(\gamma,m)=\mathrm{ord}_{s=\frac12+i\gamma}(L(s,f_m))$ l'ordre du zéro en $s=\frac12+i\gamma$ de la fonction $L(s,f_m)$. On considère l'ordre d'annulation totale sur la suite $\mathcal{S}$ comme

$$\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma)=\sum_{m\geq0}c_m\,\mathrm{ord}(\gamma,m).$$

D'après [IK04, Prop. 5.7 (1)], on a

$$\mathrm{ord}(\gamma,m)\ll\log(\mathfrak{q}(f_m)(|\gamma|+3)^{d_m}),$$

avec une constante implicite absolue. Ainsi, la condition (2.1.6) sur les coefficients c_m garantit que la série définissant $\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma)$ est convergente pour chaque γ. On notera aussi l'ensemble des zéros de partie imaginaire strictement positive de la façon suivante

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}}=\{\gamma>0:\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma)\neq0\}.$$

On ne compte pas avec multiplicités dans cet ensemble.

La difficulté de traitement de la fonction $\Delta^\pi(\cdot,\mathcal{S},\underline{c})$ par rapport au cadre très général de [ANS14] est qu'on a maintenant potentiellement une infinité de zéros à partie imaginaire bornée. L'idée est que l'hypothèse de convergence (2.1.6) nous permet de borner la contribution de zéros de fonctions L associés à de petits coefficients pour se ramener à une somme finie. On considère alors des sous-ensembles finis de zéros avec deux paramètres M et T,

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c},M}(T)=\big\{\gamma>0:\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c},M}(\gamma):=\sum_{m=0}^{M}c_m\,\mathrm{ord}(\gamma,m)\neq0\big\}\cap(0,T].$$

Alors les fonctions presque périodiques

$$G_{\mathcal{S},\underline{c},M,T}(x) = m_{\mathcal{S},\underline{c}} - \sum_{\gamma\in\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c},M}(T)} 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma)\frac{x^{i\gamma}}{\frac{1}{2}+i\gamma}\right).$$

admettent chacune une distribution logarithmique limite $\mu_{\mathcal{S},\underline{c},M,T}$ qui est la mesure image de la mesure de Haar sur le sous-tore engendré par les éléments de $\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c},M}(T)$. Si l'on énumère les zéros de $\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c},M}(T)$ comme $\{\gamma_1,\dots,\gamma_N\}$, le sous-tore engendré est défini par la clôture

$$\Gamma = \Gamma(\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c},M}(T)) := \overline{\{(\tfrac{\gamma_1}{2\pi}y,\dots,\tfrac{\gamma_N}{2\pi}y) : y\in\mathbf{R}\}/\mathbf{Z}^N} \subset \mathbf{T}^N. \tag{2.1.9}$$

et la mesure $\mu_{\mathcal{S},\underline{c},M,T}$ est alors définie par

$$\int g\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{S},\underline{c},M,T} = \int_\Gamma g\left(m_{\mathcal{S},\underline{c}} - \sum_{j=1}^N 2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c},M}(\gamma_j)\frac{e^{it_j}}{\frac{1}{2}+i\gamma_j}\right)\right)\mathrm{d}\omega_\Gamma(t_1,\dots,t_N),$$

où ω_Γ est la mesure de Haar normalisée sur Γ. Le théorème [Dev26, Th. 2.2], énoncé ci-dessous, généralise [RS94, Th. 1.1], [ANS14, Th. 1.2] et [Dev20a, Th. 2.1], et suit de l'estimation des erreurs d'approximation de $E_{\mathcal{S},\underline{c}}$ par $G_{\mathcal{S},\underline{c},M,T}$ pour montrer une convergence d'une sous-suite des mesures $\mu_{\mathcal{S},\underline{c},M,T}$.

Théorème 2.1.3 (Th. 2.2 de [Dev26]). *Soit $\mathcal{S} = \{L(\cdot,f_m) : m\geq 0\}$ une suite stable par conjugaison de fonctions L analytiques de degrés $(d_m)_{m\geq 0}$ et de conducteurs analytiques $(\mathfrak{q}(f_m))_{m\geq 0}$, et soit $\underline{c} = (c_m)_{m\geq 0}$ une suite de nombres complexes associés, avec $c_{m'} = \overline{c_m}$ si $f_{m'} = \overline{f_m}$, et telle que la série*

$$\sum_{m\geq 0}|c_m|d_m\log\mathfrak{q}(f_m)$$

est convergente.

Supposons l'Hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions $L(\cdot,f_m)$, $m\geq 0$ et leur second moment.

Alors, la fonction

$$E_{\mathcal{S},\underline{c}} : x\mapsto \frac{\log x}{\sqrt{x}}\left(\sum_{p\leq x}\sum_{m\geq 0} c_m\lambda_{f_m}(p) + \sum_{m\geq 0} c_m\,\mathrm{ord}_{s=1}(L(s,f_m))\,\mathrm{Li}(x)\right)$$

admet une distribution logarithmique limite $\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}$ qui a pour espérance

$$\mathbf{E}(\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}) = m_{\mathcal{S},\underline{c}} := \sum_{m\geq 0} c_m\left(\mathrm{ord}_{s=1}(L(s,f_m^{(2)})) - 2\,\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,f_m))\right)$$

et variance

$$\mathrm{Var}(\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}) = 2\sum_{\gamma\in\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}}}\frac{|\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma)|^2}{\frac{1}{4}+\gamma^2}.$$

De plus, il existe une constante $a>0$ dépendant de $\mathcal{S}$ et $\underline{c}$, telle que

$$\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}(]-\infty,-R[\cup]R,\infty[) \ll \exp(-a\sqrt{R}).$$

La valeur moyenne de la distribution de probabilités $\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}$ nous donne le comportement moyen de la fonction $E_{\mathcal{S},\underline{c}}$ et donc des coefficients $\sum_m c_m\lambda_{f_m}(p)$ lorsque p varie. L'estimation par la valeur moyenne est d'autant plus crédible que la variance est petite (par une application de l'inégalité de Chebyshev comme suggéré dans [Fio14a]). Ainsi le calcul de ces deux premiers moments est déjà un bon indicateur du comportement de la fonction

$E_{\mathcal{S},\underline{c}}$: si $m_{\mathcal{S},\underline{c}} \neq 0$, on s'attend à un biais dans la répartition des valeurs de $E_{\mathcal{S},\underline{c}}$ dans la direction du signe de $m_{\mathcal{S},\underline{c}}$, biais qui est d'autant plus prononcé que la variance est petite en comparaison.

La borne sur les queues de la distribution montre que $\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}$ admet des moments de tout ordre. Le calcul de moment d'ordre supérieur pourrait nous donner encore plus de renseignements. Notamment le troisième moment centré donne une idée sur la symétrie de la distribution. Cela semble un projet intéressant, une première approche dans le cadre des corps de fonctions semble cependant plus accessible, nous y revenons dans la Section 3.1.

Une autre façon d'avoir plus d'informations sur cette distribution est de faire des hypothèses supplémentaires sur les zéros, qui interviennent comme quasi-périodes dans la somme $\sum_\gamma c_\gamma e^{i\gamma y}$. C'est le sujet de la section suivante.

2.2 Propriétés conditionnelles de la distribution limite

Comme évoqué dans la section précédente, Rubinstein et Sarnak [RS94] ont pu calculer la densité logarithmique de l'ensemble $P_{4,1,3} = \{x \geq 2 : \Delta^\pi(x; 4, 1, 3) > 0\}$ en supposant la conjecture LI (Conjecture 1.4.1) pour la fonction de Dirichlet $L(\cdot, \chi_4)$. Ils montrent qu'alors cette densité est donnée par la distribution logarithmique limite $\mu_{\{\chi_4\}}(]0, +\infty[)$ du Théorème 2.1.3. Dans cette section nous présentons des résultats intermédiaires obtenus dans [Dev20a, Dev20b, Dev26] et principalement motivés par [MN20] en se basant sur des hypothèses plus ou moins fortes sur les relations entre zéros de fonctions L introduites dans la Section 1.4.

Pour discuter des propriétés de la distribution limite, nous nous plaçons dans le contexte de [Dev20b] qui est un peu plus général que précédemment. On va considérer plusieurs courses de nombres premiers en simultané (plutôt qu'une course à deux concurrents comme dans les parties précédentes). Cela revient à comparer simultanément plusieurs termes d'erreur. Cette approche est déjà évoquée dans [RS94] pour traiter de la distribution des nombres premiers dans plusieurs classes de congruences, et a notamment été développée par Lamzouri [Lam13] pour étudier le comportement quand le nombre de concurrents augmente. Plus récemment, Bailleul et Hayani [BH25] on étudié des critères pour obtenir des courses à plusieurs concurrents très biaisées ou au contraire plutôt modérées. Nous restons à un nombre de concurrents D fixé et considérons des fonctions du type

$$\Delta^\pi : \begin{cases} [2, +\infty[& \to \mathbf{R}^D \\ x & \mapsto (\Delta^\pi(x; A_1), \Delta^\pi(x; A_2), \dots, \Delta^\pi(x; A_D)). \end{cases}$$

Un résultat analogue au Théorème 2.1.3 est obtenu composante par composante, et la distribution de probabilités associée μ^Δ est alors supportée sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^D$.

Nous allons principalement nous intéresser au support, à la régularité et à la symétrie de la distribution de probabilités μ^Δ dans les sections suivantes.

2.2.1 Support de la distribution limite et résultats de type Ω

La première question que l'on considère est de savoir si chaque concurrent a une chance d'être en tête de la course une infinité de fois. Nous considérons cette question du point de vue de la densité logarithmique de l'ensemble des instants pour lesquels une position donnée dans la course a lieu. Cela revient en fait à étudier le support de la distribution limite. En effet, si la distribution de probabilité a un support suffisamment grand, par exemple qui intersecte tous les quadrants de $\mathbf{R}^D$, alors on peut déduire que chaque configuration possible de position des concurrents dans la course a lieu une densité positive de fois.

Proposition 2.2.1. *Soit $E : [2, \infty) \to \mathbf{R}^D$ une fonction qui admet une distribution limite μ. Soit $B \subset \mathbf{R}^D$ d'intérieur non vide.*

Si $\mu(B) > 0$ alors $0 < \underline{\delta}(\{x : E(x) \in B\}) \leq \overline{\delta}(\{x : E(x) \in B\})$.
En particulier, dans le cas $D = 1$ et $\mathrm{supp}(\mu) = \mathbf{R}$ on a

$$0 < \underline{\delta}(\{x : E(x) > 0\}) \leq \overline{\delta}(\{x : E(x) > 0\}) < 1.$$

On en déduit aussi que $E(x) = \Omega_{\pm}(1)$ et a donc une infinité de changements de signes.

Comme notre fonction est explicitement définie en terme de somme de fonctions relativement simples, une bonne approximation des premiers zéros à prendre en compte devrait permettre une estimation des constantes implicites dans les symboles $\Omega_{\pm}$, comme suggéré dans [BT15].

Dans [RS94, Th. 1.2], Rubinstein et Sarnak montrent l'infinité de changements de signes en reprenant les idées de la preuve de Littlewood [Lit14]. Ce résultat est seulement conditionnel à l'Hypothèse de Riemann Généralisée mais n'est valide que pour certaines classes de courses de nombres premiers. On généralise cela dans la Proposition 2.2.2 ([Dev20a, Th. 2.5] pour un ensemble $\mathcal{S}$ fini, [Dev26, Prop. 2.3] pour le cas infini). La condition est que les coefficients c_m soient tous de même signe pour ne pas interférer avec les oscillations. On peut alors par le Théorème d'approximation simultanée de Dirichlet trouver suffisamment de valeurs de y pour que les termes oscillants $c_\gamma \cos(\gamma y + \phi_\gamma)$ « pointent » tous dans la même direction (positive ou négative).

Proposition 2.2.2 (Prop. 2.3 de [Dev26]). *Soit $\mathcal{S} = \{L(\cdot, f_m) : m \geq 0\}$ une suite stable par conjugaison de fonctions L analytiques de degrés $(d_m)_{m\geq 0}$ et de conducteurs analytiques $(\mathfrak{q}(f_m))_{m\geq 0}$, et soit $\underline{c} = (c_m)_{m\geq 0}$ une suite de nombres complexes associés, avec $c_{m'} = \overline{c_m}$ si $f_{m'} = \overline{f_m}$, et telle que la série*

$$\sum_{m\geq 0} |c_m| d_m \log \mathfrak{q}(f_m)$$

est convergente.

On suppose de plus que pour tout m, on a $\mathrm{Re}(c_m) \geq 0$ et qu'il existe un m tel que $\mathrm{Re}(c_m) > 0$.

Supposons l'Hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions $L(\cdot, f_m)$, $m \geq 0$ et leur second moment.

Alors il existe une constante $b > 0$, dépendant de $\mathcal{S}$ et $\underline{c}$, telle que l'on a

$$\min\left(\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}(]R, \infty[), \mu_{\mathcal{S},\underline{c}}(]-\infty, -R[)\right) \gg \exp(-\exp bR).$$

En particulier, $\mathrm{supp}(\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}) = \mathbf{R}$.

On rappelle que la preuve de Littlewood est inconditionnelle. L'idée est qu'un zéro en dehors de la droite critique va contribuer avec des oscillations d'ordre plus grand et il est alors plus aisé d'obtenir des changements de signe dans la somme $y \mapsto \sum_\rho c_\rho \frac{e^{\rho y}}{\rho}$ en utilisant le théorème de Landau. Nous obtenons de la même façon la proposition suivante en supposant l'existence d'un zéro contredisant l'Hypothèse de Riemann et non-réel.

Proposition 2.2.3 (Prop. 2.7 de [Dev26]). *Soit $\mathcal{S} = \{L(\cdot, f_m) : m \geq 0\}$ une suite stable par conjugaison de fonctions L analytiques de degrés $(d_m)_{m\geq 0}$ et de conducteurs analytiques $(\mathfrak{q}(f_m))_{m\geq 0}$, et soit $\underline{c} = (c_m)_{m\geq 0}$ une suite de nombres complexes associés, avec $c_{m'} = \overline{c_m}$ si $f_{m'} = \overline{f_m}$, et telle que la série*

$$\sum_{m\geq 0} |c_m| d_m \log \mathfrak{q}(f_m)$$

est convergente.

Soit $\Theta = \sup\{\mathrm{Re}(\rho) : \mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\rho) \neq 0\}$. Supposons que $\Theta > \frac{1}{2}$ et que pour tout $m \geq 0$, on a $L(\Theta, f_m) \neq 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{p\leq x} \sum_{m\geq 0} c_m \lambda_{f_m}(p) + \sum_{m\geq 0} c_m \,\mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f_m)) \,\mathrm{Li}(x) = \Omega_{\pm}(x^{\Theta-\varepsilon}).$$

Notons que l'hypothèse $L(\Theta, f_m) \neq 0$ pour tout m revient à dire qu'il n'y a pas de zéro réel de partie réelle maximale (ou pas de zéro de Siegel). Sans cette hypothèse, la contribution du zéro réel n'étant pas oscillante, on obtiendrait seulement une direction Ω_+ ou Ω_- selon le signe de $-\operatorname{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\Theta)$, de la même façon que dans [FM23, Lem. 2.1].

L'article [Dev20a] développe quelques autres idées dans la direction de l'étude des courses de nombres premiers sans l'Hypothèse de Riemann que nous ne discutons pas plus dans ce mémoire puisqu'elles faisaient déjà partie de ma thèse.

L'idée de supposer l'indépendance linéaire des zéros γ est qu'alors les termes oscillants $c_\gamma \cos(\gamma y + \phi_\gamma)$ ont des périodes indépendantes. Il n'y a plus besoin du Théorème d'approximation simultanée de Dirichlet pour les aligner tous dans la même direction, l'indépendance linéaire nous dit que les valeurs des $\cos(\gamma y + \phi_\gamma)$ se répartissent bien dans $[-1, 1]$ de façon indépendante les unes des autres. Martin et Ng proposent dans [MN20] d'utiliser un grand nombre de γ linéairement indépendant en supposant la Conjecture 1.4.3 pour montrer qu'il y a une infinité de changements de signes. Ils montrent que la distribution de probabilités peut s'écrire comme un produit de convolution de deux mesures, une provenant des zéros autonomes assez simple à étudier, et une provenant des autres zéros pour laquelle on ne sait presque rien. Ainsi en supposant que la contribution des zéros autonomes donne une mesure de probabilité de support $\mathbf{R}$, et sachant que le produit de convolution ne réduit pas le support, ils obtiennent un grand support pour la mesure totale. La généralisation de [MN20, Th. 1.5(b et c)] à notre cadre est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.4 (Prop. 2.5 de [Dev26].). *Soit $\mathcal{S} = \{L(\cdot, f_m) : m \geq 0\}$ une suite stable par conjugaison de fonctions L analytiques de degrés $(d_m)_{m\geq 0}$ et de conducteurs analytiques $(\mathfrak{q}(f_m))_{m\geq 0}$, et soit $\underline{c} = (c_m)_{m\geq 0}$ une suite de nombres complexes associés, avec $c_{m'} = \overline{c_m}$ si $f_{m'} = \overline{f_m}$, et telle que la série*

$$\sum_{m\geq 0} |c_m| d_m \log \mathfrak{q}(f_m)$$

est convergente.

Supposons l'Hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions $L(\cdot, f_m)$, $m \geq 0$ et leur second moment.

Soit $\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}} = \{\gamma > 0 : \operatorname{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma) \neq 0\}$ et $\mathcal{Z}^{\mathrm{LI}}_{\mathcal{S},\underline{c}}$ l'ensemble des éléments autonomes $\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}}$. Supposons que la série

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{Z}^{\mathrm{LI}}_{\mathcal{S},\underline{c}}} \frac{|\operatorname{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma)|}{\gamma}$$

est divergente (Conjecture 1.4.3). Alors $\operatorname{supp}(\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}) = \mathbf{R}$.

Cela nous donne une seconde façon d'obtenir une infinité de changements de signes.

2.2.2 Régularité de la distribution et ensemble des instants à ex æquo

Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons postulé que l'ensemble des moments « à ex æquo » — où l'on a $\pi(x; A) = \pi(x, B)$ ou plus généralement $\Delta^\pi(x) = 0$ pour une fonction de course donnée — est négligeable. Nous cherchons ici des conditions pour garantir que cet ensemble soit de densité nulle, autrement dit, pour que la distribution limite μ^{Δ^π} n'ait pas de concentration de masse au singleton $\{0\}$.

Dans le même ordre d'idée on voudrait pouvoir s'assurer que la densité logarithmique (au sens de la Définition 2.0.2) d'ensembles tels que $\{x : \Delta^\pi(x) > 0\}$ ou plus généralement $\{x : \Delta^\pi(x, A_1, B_1) > 0, \Delta^\pi(x, A_2, B_2) > 0, \ldots, \Delta^\pi(x, A_D, B_D) > 0\}$ existent. Martin et Ng utilisent dans [MN20] le terme de « course faiblement inclusive » pour une course entre propriétés $A_1, A_2, \ldots, A_D$ telle que toutes les densités logarithmiques d'ensembles $\{x : \pi(x, A_{\sigma(1)}) > \pi(x, A_{\sigma(2)}) > \cdots > \pi(x, A_{\sigma(D)})\}$ existent pour toute permutation

$\sigma \in \mathfrak{S}_D$. Le terme « course inclusive » est réservé au courses faiblement inclusives pour lesquelles ces densités sont de plus strictement positives, ce qui se ramène à la discussion de la Section 2.2.1 précédente une fois la faible inclusivité obtenue.

Ces questions sont liées à la régularité de la distribution de probabilités μ par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$. Si celle-ci n'a pas d'atome, ou plus généralement si elle ne concentre pas de masse sur des sous-espaces stricts, alors la course est faiblement inclusive et l'ensemble des ex æquo a une densité logarithmique nulle. Dans [RS94], Rubinstein et Sarnak montrent qu'en supposant l'Indépendance Linéaire, la distribution limite est lisse, dans le sens qu'elle admet une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue et que celle-ci est lisse (il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^D)$ telle que $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$). C'est un résultat trop fort pour ce qu'on veut montrer. Par exemple, il suffit de montrer que la mesure μ admet une densité de probabilités continue, ou même continue au voisinage de 0 pour en déduire que l'ensemble des ex æquo a une densité logarithmique nulle. En effet, ce cas nous autorise à choisir g en escaliers (ou au moins avec des sauts aux endroits de continuité de la densité de probabilité) dans la Définition 2.1.2 plutôt que continue lipschitzienne. Ainsi Martin et Ng montrent en supposant l'existence d'un nombre fini de zéros autonomes, que la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (et donc n'accumule pas de masse sur des sous-ensemble de mesure de Lebesgue nulle).

L'idée de [Dev20b, Th. 1.2] est que la distribution limite d'une fonction presque périodique qui est une combinaison linéaire finie ne concentre pas de masse sur des sous-espaces stricts (et non pas tous les ensembles de mesure de Lebesgue nulle) de son support. Cela suit du fait qu'une telle fonction presque périodique n'est pas localement constante, et donc ne reste pas incluse dans un sous-espace strict de l'espace engendré par ses valeurs, même sur un petit ouvert de densité non nulle. On utilise ensuite le fait que le produit de convolution de deux mesures est au moins aussi régulier que la mesure la plus régulière des deux pour déduire le résultat suivant qui généralise [Dev20a, Th. 2.2] en dimension quelconque et [Dev20b, Cor. 1.4] à des fonctions L plus générales. On présente ici le cas d'une course à D concurrents, on utilise la notation δ de la Définition 2.0.2 pour la densité logarithmique.

Proposition 2.2.5. *Soit $D \geq 2$ un entier. Soit $\mathcal{S} = \{L(\cdot, f_m) : m \geq 0\}$ une suite stable par conjugaison de fonctions L analytiques de degrés $(d_m)_{m\geq 0}$ et de conducteurs analytiques $(\mathfrak{q}(f_m))_{m\geq 0}$, et soit $\underline{c} = (c_m)_{m\geq 0}$ une suite de vecteurs complexes dans $\mathbf{C}^D$ associés, avec $c_{m'} = \overline{c_m}$ si $f_{m'} = \overline{f_m}$, et telle que la série*

$$\sum_{m\geq 0} \|c_m\|_\infty d_m \log \mathfrak{q}(f_m)$$

est convergente.

Supposons l'Hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions $L(\cdot, f_m)$, $m \geq 0$ et leur second moment.

Soit $\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}} = \{\gamma > 0 : \mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma) \neq 0\}$. On suppose qu'il existe $M \geq 1$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_M \in \mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}}$ relativement $\mathbf{Q}$-linéairement indépendant de $\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}} \smallsetminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_M\}$, i.e.

$$\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_M \rangle_{\mathbf{Q}} \cap \langle \mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}} \smallsetminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_M\} \rangle_{\mathbf{Q}} = \{0\}.$$

On note V le sous-espace de $\mathbf{R}^D$ engendré par les vecteurs $\mathrm{Re}(\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma_j)), \mathrm{Im}(\mathrm{ord}_{\mathcal{S},\underline{c}}(\gamma_j))$ pour $1 \leq j \leq M$.

Alors pour tout sous-espace $H \subset \mathbf{R}^D$ ne contenant pas V et tout vecteur $\alpha \in \mathbf{R}^D$, on a $\delta(E_{\mathcal{S},\underline{c}} \in \alpha + H) = 0$.

En particulier, si $V \not\subset \bigcup_{d=1}^D \{x \in \mathbf{R}^D : x_d = 0\}$, alors pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_D \in \mathbf{R}$, on a $\delta(E_{\mathcal{S},\underline{c},d} = \alpha_d) = 0$ (l'ensemble des ex æquo a densité nulle) pour tout $1 \leq d \leq D$, et la densité logarithmique

$$\delta(E_{\mathcal{S},\underline{c},1} > \alpha_1, E_{\mathcal{S},\underline{c},2} > \alpha_2, \ldots, E_{\mathcal{S},\underline{c},D} > \alpha_D)$$

est bien définie.

Quitte à modifier l'ensemble de la dernière condition par une transformation linéaire, l'énoncé nous donne une condition pour que la course soit faiblement inclusive.

Il n'est évidemment pas clair que notre condition, bien que plus faible que la conjecture LI, soit plus facile à vérifier, puisqu'elle implique tout de même une connaissance très précise des zéros entrant en jeu. Nous verrons des résultats analogues dans le cadre des corps de fonctions dans la Section 3.1.

Kaczorowski et Ramaré suivent une approche différente pour montrer [KR03, Th. 4] seulement sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée, dans le cas $D = 1$, que la distribution limite admet une densité qui est continue sauf au plus en deux points. Ainsi si ces deux points évitent 0, l'ensemble des ex æquo a densité nulle et la course est faiblement inclusive.

2.2.3 Symétrie de la distribution

La dernière propriété de la distribution que nous étudions est sa symétrie par rapport à sa valeur moyenne. Rubinstein et Sarnak montrent sous l'hypothèse LI (Conjecture 1.4.1) que la distribution $\mu_{\mathcal{S}}$ est symétrique par rapport à sa moyenne. Encore une fois, on peut affaiblir cette hypothèse pour n'utiliser que la Conjecture 1.4.4 qui repose encore sur une certaine propriété d'indépendance linéaire entre les zéros. On note que cette fois-ci la convolution ne peut pas nous aider et il faut bien supposer une hypothèse qui concerne tous les zéros en jeu.

Théorème 2.2.6 (Th. 2.3 de [Dev20a])**.** *Supposons la Conjecture 1.4.4 vérifiée : pour tout* $(k_\gamma)_\gamma \in \mathbf{Z}^{(\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}})}$ *tel que* $\sum_{\gamma\in\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}}} k_\gamma\gamma = 0$ *on a* $\sum_{\gamma\in\mathcal{Z}_{\mathcal{S},\underline{c}}} k_\gamma \equiv 0 \pmod 2$*. Alors la distribution limite* $\mu_{\mathcal{S},\underline{c}}$ *est symétrique par rapport à sa moyenne* $m_{\mathcal{S},\underline{c}}$*.*

L'idée est que la Conjecture 1.4.4 nous dit exactement que le sous-tore engendré par les zéros contient le point central, ce qui permet de faire le changement de variable $x \mapsto -x$ dans l'intégrale définissant la distribution limite comme image de la mesure de Haar normalisée sur ce sous-tore (2.1.9). Alors que la Conjecture 1.4.1, plus forte, est elle équivalente au fait que l'adhérence de chacun de ces groupes à un paramètre est le tore $\mathbf{T}^N$ tout entier.

2.3 Exemples de courses de nombres premiers

Les articles [Dev20a, Dev26] illustrent le Théorème 2.1.3 par des exemples d'ensembles de fonctions L (finis ou infinis) qui donnent lieu à des courses de nombres premiers. L'idée générale étant de calculer l'espérance et estimer la variance de la distribution (en supposant l'Hypothèse de Riemann Généralisée) de façon à avoir une première approximation sur celle-ci et déduire une intuition sur le comportement de la course qui pourrait être prouvée sous des hypothèses supplémentaires telles que celles discutées à la Section 2.2. Ces intuitions sont justifiées par des graphes des courses calculées dans `sagemath` [SD16]. Pour éviter l'effet catalogue, nous nous concentrons ici sur deux exemples plus ouverts et qui nécessitent l'utilisation d'une suite infinie de fonctions L.

2.3.1 Biais de Fouvry

La course présentée ici a été proposée par Fouvry lors de ma soutenance de thèse, et est depuis dénommée biais de Fouvry en son honneur. La situation est la suivante.

Si l'on prend un nombre premier $p \equiv 1 \bmod 4$, il peut être écrit de façon unique en somme de deux carrés d'entiers positifs (en choisissant lequel est pair) $p = a^2 + 4b^2$ avec $a, b > 0$ entiers. L'étude des nombres premiers de cette forme en imposant des conditions sur les coordonnées a et $2b$, est portée par une littérature riche [FI97, FI98, HBL17, LSX20,

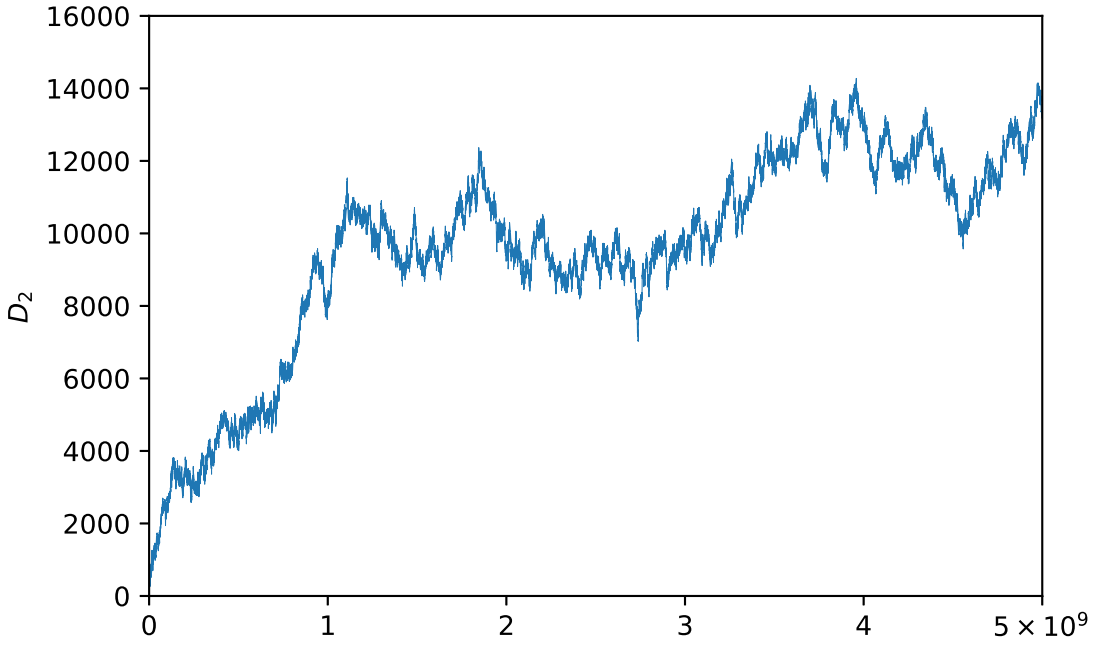


FIGURE 2.1 – $D_2(x)$ for $x \in [2, 5 \cdot 10^9]$.

Pra20, FI22] et des conjectures faciles à énoncer mais largement ouvertes. Une des plus fameuses étant de savoir s'il existe une infinité de premiers de la forme $p = 1 + 4b^2$.

Le nombre a étant un nombre impair a priori quelconque, on s'intéresse à sa répartition dans les classes de congruences modulo 4, la question de Fouvry est

> Y a-t-il un biais dans la répartition des premiers entre ceux pour qui $a \equiv 1 \bmod 4$ comparé avec ceux pour qui $a \equiv 3 \bmod 4$?

D'après les résultat de Hecke [Hec18, Hec20] sur le théorème des nombres premiers pour les fonctions L de caractères de Hecke, les deux comptes sont équivalents asymptotiquement, ainsi l'étude de la fonction

$$D_2 : x \mapsto |\{p < x : p = a^2 + 4b^2, |a| \equiv 1 \bmod 4\}| - |\{p < x : p = a^2 + 4b^2, |a| \equiv 3 \bmod 4\}|$$

se place bien dans le cadre présenté dans l'introduction de ce chapitre. L'ensemble des fonctions L à étudier est un ensemble de fonctions L associé à des caractères de Hecke sur $\mathbf{Q}[i]$. Des calculs directs de valeurs de a sur `sagemath` [SD16] permettent d'obtenir le graphe des valeurs de D_2 présenté à la Figure 2.1. On n'observe pas de changement de signe avant 5×10^9, ce qui donne de la crédibilité à la conjecture énoncée ci-dessous.

Conjecture 2.3.1 (Conj. 1.2 de [Dev26])**.** *Il y a un biais complet vers les valeurs positives dans la répartition des valeurs de la fonction D_2. C'est-à-dire que pour presque tout (en échelle logarithmique) $x \in [2, \infty[$, plus de la moitié des premiers $p \leq x$ s'écrivent comme une somme de carrés d'entiers positifs $p = a^2 + 4b^2$ avec $|a| \equiv 1 \bmod 4$.*

Ou encore, on a $D_2(x) \geq 0$ pour presque tout x en échelle logarithmique et même $D_2(x) = \Omega_+(\frac{\sqrt{x}}{\log x})$.

La notion de biais complet correspond au fait que la fonction de course ne change pas de signe, ou éventuellement peut changer de signe sur un ensemble de densité logarithmique nulle (typiquement un nombre fini). Fiorilli et Martin on étudié dans [FM13, Fio14b]

des courbes extrêmement biaisées, c'est-à-dire pour lesquelles la densité logarithmique de l'ensemble $\{x : \Delta(x) > 0\}$ est très proche de 1 (ou de 0 quitte à étudier $-\Delta$), ils déterminent notamment les courses les plus extrêmes entre carrés et non-carrés modulo un entier. Cependant ils n'obtiennent pas de biais complet (pour lequel la densité est égale à 1) pour des courses utilisant seulement des caractères de Dirichlet. Il y a pour cela besoin de passer à des objets plus compliqués, tels que les caractères d'Artin pour groupes de Galois d'extensions de corps un peu moins simples qu'une extension cyclotomique. Ainsi le premier exemple de biais complet est obtenu par Fiorilli et Jouve dans ce contexte [FJ22], inconditionnellement, et Hayani développe dans [Hay25] une classification des groupes de Galois qui peuvent donner lieu à un biais complet. La théorie comparative des nombres peut s'adapter à d'autres ensembles que celui des nombres premiers, par exemple Porritt montre dans [Por20] un biais complet dans la répartition dans les classes de congruences des nombres avec beaucoup de facteurs premiers. Gorodetsky obtient lui aussi un biais complet dans [Gor23] pour la répartition dans les classes de congruences des nombres pouvant s'écrire comme sommes de deux carrés d'entiers (qui font l'objet de notre Chapitre 4). On reviendra sur le sujet des biais complets dans le cadre des corps de fonctions à la Section 3.2.

La conjecture 2.3.1 est supportée par l'application du Théorème 2.1.3 à un ensemble de fonctions L de caractères de Hecke que nous présentons maintenant en suivant l'exposition de [Dev26].

L'écriture d'un premier comme somme de deux carrés s'explique dans l'anneau des entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$ où les nombres premiers $p \equiv 1 \bmod 4$ se factorisent sous la forme $p = (a + i2b)(a - i2b)$, alors que les premiers $p \equiv 3 \bmod 4$ sont inertes. La course que l'on étudie ici traite ainsi de partie réelle de nombres premiers dans $\mathbf{Z}[i]$.

En fait, il faut faire un peu attention car étudier les nombres premiers dans le cadrant $\mathrm{Re} > 0$, $\mathrm{Im} > 0$ est moins naturel qu'étudier les éléments « primaires », c'est-à-dire qui sont congrus à 1 mod $(2+2i)$. Ainsi on définit l'angle d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans $\mathbf{Z}[i]$ comme l'argument de son unique générateur primaire

$$\theta_{\mathfrak{p}} = \arg(a + 2ib) \in (-\pi, \pi] \text{ où } \mathfrak{p} = (a + 2ib), \quad a + 2ib \equiv 1 \bmod (2 + 2i). \tag{2.3.1}$$

On observe en particulier que si $\mathfrak{p}$ est engendré par $a + 2ib \equiv 1 \bmod (2 + 2i)$, alors on a aussi $a - 2ib \equiv 1 \bmod (2 + 2i)$ et cet entier de Gauss est le générateur de l'idéal $\overline{\mathfrak{p}}$. De sorte qu'on peut définir l'angle d'un premier rationnel $p \equiv 1 \bmod 4$, au signe près (ou comme un angle dans $[0, \pi]$) par $\theta_p = \pm\theta_{\mathfrak{p}} \in [0, \pi]$, où $\mathfrak{p} \mid p$. Alors l'angle d'un premier $p \equiv 3 \bmod 4$ est naturellement $\theta_p = \pi$.

Ce choix, bien que naturel ne voit plus bien la répartition de $|a|$ modulo 4, mais celle de a est plus facile à exprimer. On a pour $p = a^2 + 4b^2$ avec $a + 2ib \equiv 1 \bmod (2 + 2i)$

$$p \equiv 1 \bmod 8 \Leftrightarrow a \equiv 1 \bmod 4$$
$$p \equiv 5 \bmod 8 \Leftrightarrow a \equiv -1 \bmod 4.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} D_2(x) &= \sum_{p=a^2+4b^2 \le x} \left(\mathbf{1}_{|a| \equiv 1 \bmod 4}(p) - \mathbf{1}_{|a| \equiv -1 \bmod 4}(p) \right) \\ &= \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv 1 \bmod 8}} \phi(\theta_p) - \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv 5 \bmod 8}} \phi(\theta_p), \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

en prenant $\phi = \mathbf{1}_{(0,\frac{\pi}{2})} - \mathbf{1}_{(\frac{\pi}{2},\pi)}$ (de façon à ce qu'on compte $+1$ pour $a \equiv 1 \bmod 4$ et $a > 0$, et -1 pour $a \equiv 1 \bmod 4$ et $a < 0$, et dans l'autre sens pour $a \equiv 3 \bmod 4$).

Pour arriver à une expression de D_2 en terme de coefficients de fonctions L, l'idée est alors d'écrire la fonction ϕ comme somme de sa série de Fourier. En effet, définissons la

famille de caractères de Hecke $(\psi_m)_{m\geq 0}$ de la façon suivante. Pour tout $m \geq 0$ le caractère de Hecke ψ_m est défini sur le groupe multiplicatif des idéaux fractionnaires $\mathbf{Z}[i]$ modulo (4) par

$$\psi_m((\alpha)) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^m & \text{si } \alpha \equiv 1 \bmod (4) \\ -\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^m & \text{si } \alpha \equiv 3+2i \bmod (4) \\ 0 & \text{si } (\alpha,(4)) \neq 1. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

De sorte que pour tout $m \geq 0$, ψ_m est un caractère de Hecke primitif unitaire de fréquence m et de conducteur (4). Ainsi, pour tout premier rationnel $p \equiv 1 \bmod 4$ et tout $m \in \mathbf{N}$, on a

$$\psi_m(\mathfrak{p}) + \psi_m(\overline{\mathfrak{p}}) = \begin{cases} 2\cos(m\theta_p) & \text{si } p \equiv 1 \bmod 8 \\ -2\cos(m\theta_p) & \text{si } p \equiv 5 \bmod 8. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

On déduit de (2.3.2), quitte à prolonger ϕ par parité et 2π périodicité, que

$$D_2(x) = \sum_{\substack{p\leq x \\ (p)=\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}}} \sum_{m\geq 0} \tfrac{1}{2} c_m(\phi)\big(\psi_m(\mathfrak{p}) + \psi_m(\overline{\mathfrak{p}})\big),$$

où $c_m(\phi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\cos(mt)\,\mathrm{d}t$ sont les coefficients de Fourier de ϕ. Cette expression est maintenant suffisamment proche du cadre d'application du Théorème 2.1.3 pour la suite de fonctions $\mathcal{S} = \{L(\cdot,\psi_m) : m \geq 0\}$ vue comme des produits eulériens sur les premiers rationnels (elles sont donc toutes de degré 2 et de conducteur $\asymp m^2$), et la suite de coefficients associée $\{\frac{1}{2}c_m(\phi) : m \geq 0\}$. Le seul problème est que ces données ne vérifient pas l'hypothèse de convergence de la série du Théorème 2.1.3 puisque les coefficients de Fourier de la fonction $\phi = \mathbf{1}_{(0,\frac{\pi}{2})} - \mathbf{1}_{(\frac{\pi}{2},\pi)}$ sont de taille $\asymp \frac{1}{m}$. On va alors se contenter de fonctions ϕ légèrement plus lisses, dont les coefficients de Fourier permettent la convergence de la série. C'est l'objet de [Dev26, Th. 3.2]. On peut alors à chaque fonction ϕ paire, 2π-périodique et suffisamment lisse, associer une fonction de course pondérée et normalisée

$$E_\phi : x \mapsto \frac{\log x}{\sqrt{x}}\Big(\sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv 1 \bmod 8}} \phi(\theta_p) - \sum_{\substack{p\leq x \\ p\equiv 5 \bmod 8}} \phi(\theta_p)\Big),$$

qui admet une distribution logarithmique limite μ_ϕ dont on peut calculer l'espérance et la variance en fonction des coefficients de Fourier de ϕ et à condition de connaître des informations sur les points d'annulation des $L(\cdot,\psi_m)$. En particulier pour calculer l'espérance de μ_ϕ on étudie l'annulation au point central de $L(\cdot,\psi_m)$ et l'annulation en $s=1$ pour sa fonction second moment. On montre que

$$\mathrm{ord}_{s=1}(L(s,\psi_m^{(2)})) = \begin{cases} -2 & \text{si } m = 0, \\ -1 & \text{si } m > 0, \text{ est pair}, \\ 1 & \text{si } m \text{ est impair}. \end{cases}$$

Pour l'annulation au point central, comme discuté dans la Section 1.1, on fait l'hypothèse supplémentaire (1.1.1) que l'ordre d'annulation est donné par le signe de l'équation fonctionnelle. On peut calculer ce signe explicitement à l'aide de sommes de Gauss [IK04, (3.85)]. On suppose ainsi

$$\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,\psi_m)) = \begin{cases} 0 & \text{if } m \equiv 0,1,2 \bmod 4, \\ 1 & \text{if } m \equiv 3 \bmod 4. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Cette hypothèse est vérifiée sur les premières 24 valeurs de m dans la base de donnée [LMF], et par calcul sur `PARI/GP` [PAR25] pour $m \leq 2000$ (le code est donné dans l'appendice de

[Dev26]). Une famille proche est discutée du point de vue de la conjecture de Katz–Sarnak dans la Section 5.2.

Sous ces hypothèses, l'espérance de μ_ϕ est alors donnée par

$$\frac{-\hat{\phi}(0)}{2} - \frac{\phi(0)+\phi(\pi)}{4} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\frac{1}{2\cos(t)}\,\mathrm{d}t, \tag{2.3.6}$$

où l'intégrale passant par un pôle doit être comprise comme la valeur principale de Cauchy.

On justifie alors la Conjecture 2.3.1 par le fait que l'expression (2.3.6) devient $+\infty$ si l'on prend $\phi = \mathbf{1}_{(0,\frac{\pi}{2})} - \mathbf{1}_{(\frac{\pi}{2},\pi)}$ alors que la variance de μ_ϕ devrait rester bornée s'il n'y a pas trop de fonctions L différentes qui s'annulent en un même point.

2.3.2 Course pour les premiers d'Artin

Enfin ce chapitre se termine avec un projet en cours. Dans [CDP], nous tentons d'appliquer des techniques de théorie comparative des nombres à l'étude des premiers d'Artin. Pour de bonnes lectures sur le contexte des premiers d'Artin, on pourra consulter [Mur88, Mor12, Per24, GMP25].

Si on fixe un premier p, on dit qu'un entier a est une racine primitive modulo p si c'est un générateur du sous-groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Autrement dit, une racine primitive modulo p est un élément d'ordre multiplicatif exactement $p-1$ modulo p : on a $a^k \equiv 1 \bmod p$ si et seulement si $p-1 \mid k$.

Pour un entier a fixé, on cherche à déterminer les premiers p pour lesquels a est une racine primitive modulo p. On appelle de tels premiers a-Artin. Notons que si $a \in \{\pm 1\}$ ou a est un carré d'entier, alors a n'est jamais une racine primitive modulo un premier. Nous excluons donc cette possibilité dans la suite. Dans le cas $a = 10$, on voit que p est 10-Artin si est seulement si la fraction $\frac{1}{p}$ a une écriture décimale de la plus longue période possible : $p-1$. Ce cas était déjà étudié par Gauss.

La dénomination vient d'une conjecture d'Artin en 1927 affirmant que, sauf obstruction évidente sur a, l'ensemble des premiers a-Artin a une densité positive dans l'ensemble des premiers. Précisément, notons $\mathcal{N}_a(x) = \#\{p \le x,\ a \text{ est une racine primitive } \bmod p\}$, Artin conjecture l'expression d'une constante $A(a)$ sous la forme d'un produit eulérien, telle que

$$\mathcal{N}_a(x) \sim A(a)\pi(x). \tag{2.3.7}$$

La forme exacte de cette constante a été corrigée après calculs numériques de [LL62]. L'asymptotique est prouvée par Hooley [Hoo67] conditionnellement à l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions L de Dedekind d'une famille de corps de nombres. Plusieurs résultats inconditionnels ont aussi été établis [GM84, HB86] mais aucun ne prouve l'asymptotique.

Comme les questions de théorie comparative des nombres que nous avons étudiées dans ce chapitre perdent un certain intérêt si l'Hypothèse de Riemann est fausse, nous partons ici de l'asymptotique prouvée par Hooley et étudions les changements de signes de la fonction différence. Nous allons dans cette section nous intéresser seulement au cas $a = 2$. Les Figures 2.2 et 2.3, fournies par Paul Péringuey, montrent les valeurs de la fonction différence $\mathcal{N}_2(x) - A(2)\,\mathrm{Li}(x)$ en échelle classique puis la fonction différence normalisée $\frac{\log x}{\sqrt{x}}\big(\mathcal{N}_2(x) - A(2)\,\mathrm{Li}(x)\big)$ en échelle logarithmique. Nous observons de longues périodes d'oscillation proche de 0 avec beaucoup de changement de signes dans de relativement courts intervalles.

Pour comprendre plus précisément $\mathcal{N}_2(x)$, nous allons en fait étudier des fonctions telles que

$$\mathcal{P}_2(x,\ell) = \#\{p \le x,\ p \text{ est complètement décomposé dans } \mathbf{Q}[\sqrt[\ell]{2}, \zeta_\ell]\}$$

pour tout ℓ entier sans facteur carré. En effet, le fait que 2 est une racine primitive modulo p, est équivalent au fait que pour tout premier $q \mid p-1$, le polynôme $X^q - 2$ n'a pas de racine

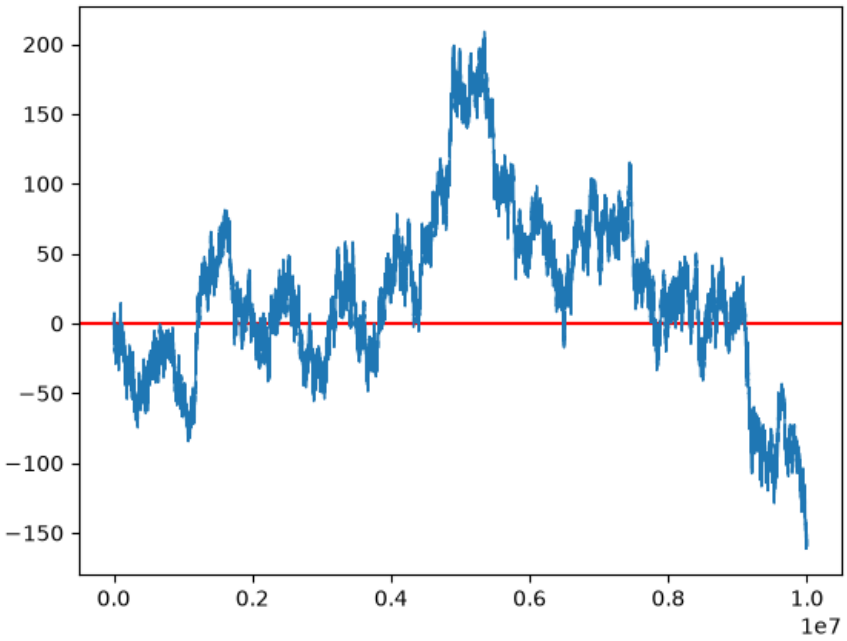


FIGURE 2.2 – $\mathcal{N}_2(x) - A(2)\,\mathrm{Li}(x)$ for $x \in [2, 10^7]$.

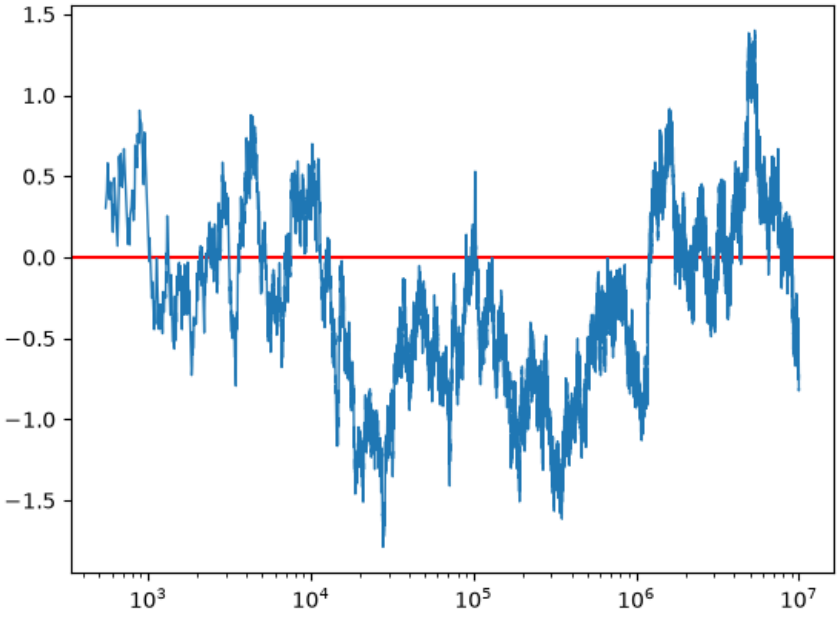


FIGURE 2.3 – $\frac{\log x}{\sqrt{x}}\big(\mathcal{N}_2(x) - A(2)\,\mathrm{Li}(x)\big)$ for $x \in [5 \cdot 10^2, 10^7]$.

modulo p, ou encore, p n'admet pas de facteur de norme p dans l'extension $\mathbf{Q}[\sqrt[q]{2}, \zeta_q]$. Par inclusion-exclusion, la formule est

$$\mathcal{N}_2(x) = \sum_{\ell \geq 1} \mu(\ell) \mathcal{P}_2(x, \ell).$$

Il sera en général nécessaire de couper la somme sur ℓ, de façon à ce que le terme de reste ne soit pas trop grand. On peut déjà voir que pour chaque x la somme est finie puisque $\mathcal{P}_2(x, \ell) = 0$ lorsque $\ell > x$. Prenons ainsi un paramètre $\xi = \xi(x)$, on considère plutôt la somme finie sur les entiers ℓ sans-facteurs carrés qui sont ξ-friables

$$\mathcal{N}_2(x, \xi) = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ P^+(\ell) \leq \xi}} \mu(\ell) \mathcal{P}_2(x, \ell), \tag{2.3.8}$$

où $P^+(\ell)$ est le plus grand facteur premier de ℓ. Notons que $\mathcal{N}_2(x) = \mathcal{N}_2(x, x)$, mais nous n'arrivons à bien étudier $\mathcal{N}_2(x, \xi)$ que pour des valeurs de ξ bien plus petites.

Ecrivons $K_\ell = \mathbf{Q}[\sqrt[\ell]{2}, \zeta_\ell]$, et la fonction zêta de Dedekind associée à ce corps est

$$\zeta_{K_\ell}(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_{K_\ell}} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1} = \prod_p \prod_{\mathfrak{p} | p} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1} = \prod_p \prod_{\substack{k | n_\ell \\ \mathfrak{p} | p \Rightarrow N\mathfrak{p} = p^k}} \left(1 - \frac{1}{p^{ks}}\right)^{-\frac{n_\ell}{k}}.$$

D'après, [IK04, § 5.10] et [GMP25], c'est une fonction L au sens de la Définition 1.0.1, de degré $n_\ell = [K_\ell : \mathbf{Q}] = \ell\varphi(\ell)$ sur $\mathbf{Q}$, et de conducteur analytique $\log \mathfrak{q}(\ell) \asymp n_\ell \log \ell$. L'étude de ces fonctions L permet à Hooley de montrer l'asymptotique 2.3.7. En effet $\mathcal{P}_2(x, \ell)$ est essentiellement encodé par la dérivée logarithmique de ζ_{K_ℓ}. On obtient

$$\mathcal{N}_2(x, \xi) \sim \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ P^+(\ell) \leq \xi}} \frac{\mu(\ell)}{\ell\varphi(\ell)} \operatorname{Li}(x).$$

Notons $A(2, \xi) = \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ P^+(\ell) \leq \xi}} \frac{\mu(\ell)}{\ell\varphi(\ell)} = \prod_{q \leq \xi} \left(1 - \frac{1}{q(q-1)}\right)$. On considère alors les changements de signes de la fonction différence

$$\Delta_2(x, \xi) = \mathcal{N}_2(x, \xi) - A(2, \xi) \operatorname{Li}(x)$$

du point de vue de la théorie comparative des nombres, lorsque x et ξ varient conjointement. Notons que cette étude n'est de nouveau malheureusement pas dans le cadre du Théorème 2.1.3, la série des termes d'erreur ne convergeant pas. Nous avons donc besoin de limiter ξ et d'étudier cette fonction de deux variables.

Dans cette optique, suivant les idées exposées dans la Section 2.1.1 nous considérons d'abord la contribution des carrés de premiers. Pour cela, il nous faut étudier mieux la fonction de Dedekind, et la première simplification est de plutôt la considérer comme un produit de fonctions L d'Artin associées aux représentations irréductibles du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(K_\ell/\mathbf{Q}) = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*$. Ces représentations et fonctions L associées sont bien étudiées, voir par exemple [Viv04] et [FJ24, § 9.2]. Notamment, la conjecture d'Artin pour l'holomorphie des fonctions L est prouvée pour de telles extensions, et donc, la fonction L de chaque représentation irréductible tombe dans le cadre de la Définition 1.0.1.

Nous calculons l'indice de Schur de chacune de ces représentations pour en déduire le résultat suivant.

Proposition 2.3.2. *La contribution des carrés de premiers dans la course* $\mathcal{N}_2(x,\xi) - A(2,\xi)\operatorname{Li}(x)$ *est donnée par*

$$\sum_{\substack{\ell \\ P^+(\ell)\leq \xi}} \frac{\mu(\ell)}{\ell\varphi(\ell)} \sum_{d\mid \ell} \tau'(d)\varphi(\tfrac{\ell}{d}) = 0,$$

où τ' *est une variation de la fonction nombre de diviseurs* τ *définie par* $\tau'(d) = \begin{cases} \tau(d) & \text{si } d \text{ est impair,} \\ \frac{\tau(d)}{2} & \text{si } d \text{ est pair} \end{cases}$.

Ce résultat nous incite à croire que si la fonction différence $\mathcal{N}_2(x,\xi) - A(2,\xi)\operatorname{Li}(x)$ admet une distribution limite, alors sa valeur moyenne sera nulle. Nous nous attendons donc à ce que la course entre $\mathcal{N}_2(x,\xi)$ et son asymptotique soit très peu biaisée, et nous avons espoir de montrer qu'il y a beaucoup de changements de signes. Les travaux de [FM23] nous semblent une bonne inspiration pour montrer les changements de signes pour notre fonction de deux variables.

Chapitre 3

Arithmétique des polynômes, influence des relations entre zéros

Dans ce chapitre, nous changeons d'objet d'étude, de l'arithmétique sur les entiers, nous passons à l'arithmétique sur les anneaux de polynômes à coefficients dans un corps fini. La plupart des résultats présentés ici pourraient s'exprimer dans le cadre plus général des corps de fonctions, mais pour garder l'exposition simple, nous ne parlons ici que d'éléments de $\mathbf{F}_q[t]$ pour q une puissance d'un nombre premier (en général impair). C'est un sujet classique de l'algèbre de Licence qu'un anneau de polynôme sur un corps est euclidien et qu'au même titre que $\mathbf{Z}$, on peut alors étudier ses irréductibles. Une très bonne référence pour toute l'analogie entre $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{F}_q[t]$ est [Ros02].

Ainsi une grande partie des questions de l'arithmétique de $\mathbf{Z}$ trouvent une traduction naturelle dans l'arithmétique de $\mathbf{F}_q[t]$. Mes travaux portent principalement sur les questions de théorie comparative des nombres, telles qu'évoquées au Chapitre 2. La traduction dans ce contexte est l'objet d'un article de Cha [Cha08]. La Section 3.1 présente ce cadre ainsi que mon premier résultat dans ce contexte [DM21] qui traite de théorie comparative des nombres pour la distribution dans les classes de congruences des polynômes ayant k facteurs irréductibles. Il faut noter que beaucoup de questions naturelles liées aux chapitres 4 et 5 ont aussi été explorées dans la littérature et nous éclairent sur ce qu'il est raisonnable d'attendre. En effet, la Conjecture 5.0.1 de Katz–Sarnak prédit la répartition des zéros de fonctions L à l'aide de groupes de matrices car les fonctions L dans le cadre des corps de fonctions sont essentiellement des polynômes caractéristiques de certaines matrices unitaires. L'un des points clefs de ce cadre est que l'on peut ré-encoder les questions d'arithmétique avec des objets géométriques, c'est ainsi que Weil prouve l'Hypothèse de Riemann pour l'arithmétique dans les corps de nombres [Wei48]. Les résultats conditionnels à cette hypothèse dans $\mathbf{Z}$ obtiennent ainsi une version inconditionnelle dans $\mathbf{F}_q[t]$.

Les fonctions L sont donc essentiellement des polynômes. Leur zéros sont alors moins mystérieux, et en nombre fini. Contrairement à ζ ou $L(s, \chi_4)$, si l'on se donne maintenant un caractère de Dirichlet dans $\mathbf{F}_q[t]$, il est en général possible d'exprimer précisément les zéros de sa fonction L. On peut alors concrètement vérifier si des hypothèses telles que celles des Sections 1.1 ou 1.4 sont satisfaites, et il est possible (encore grâce à l'approche géométrique) de trouver, ou construire, des exemples pour lesquels ces hypothèses ne sont en fait pas vérifiées. Une partie des résultats de [DM21] et de [BDKL24] présentés dans la Section 3.2 se concentre alors sur l'étude de ces situations inattendues pour voir l'influence qu'à un zéro au point central ou certaines relations linéaires entre zéros d'une fonction L sur la fonction de différence de comptage associée.

Cependant, ces contre-exemples inattendus sont assez rares, nous n'en trouvons pas en cherchant au hasard. Cela nous a motivé à montrer dans [BDKL24], présenté dans la Section 3.3, que la plupart des fonctions L dans une famille donnée vérifient bien les hypothèses des Sections 1.1 ou 1.4.

3.1 Biais de Chebyshev dans les corps de fonctions

Dans [Cha08], Cha a adapté les résultats de [RS94] aux corps de fonctions. En reliant les idées de Cha à celles de [Fio14a], l'étude des courses de nombres premiers dans les corps de fonctions a été étendue par Cha, Fiorilli et Jouve [CFJ16] à la question des nombres de points rationnels de courbes elliptiques sur les corps de fonctions. S'inspirant aussi de [Sar07], ils donnent alors un premier énoncé général pouvant utiliser une infinité de fonctions L comme discuté dans la Section 2.1.

Nous allons ici nous restreindre au cas de fonctions L associées à des caractères de Dirichlet. Etant donné un corps fini $\mathbf{F}_q$ et χ un caractère de Dirichlet sur $\mathbf{F}_q[t]$, la fonction L associée à χ est donnée par

$$L(s,\chi) = \sum_{a \text{ unitaire}} \frac{\chi(a)}{|a|^s} = \prod_{P \text{ irréductible}} \left(1 - \frac{\chi(P)}{|P|^s}\right)^{-1},$$

Si χ est un caractère non trivial modulo un polynôme $M \in \mathbf{F}_q[t]$, d'après [Ros02, Prop. 4.3], la fonction $L(s,\chi)$ est un polynôme en $q^{-s} = u$ de degré au plus $\deg M - 1$.

On peut alors noter $\alpha_j(\chi) = \sqrt{q}e^{i\theta_j(\chi)}$, $\theta_j(\chi) \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$, les inverses des zéros de la fonction $\mathcal{L}(u,\chi) = \mathcal{L}(q^{-s},\chi) = L(s,\chi)$ de taille $\sqrt{q}$, avec multiplicités $m_{\theta_j}(\chi)$. L'équation fonctionnelle donne une relation de conjugaison entre les zéros de $L(s,\chi)$ et ceux de $L(s,\overline{\chi})$ et les zéros réels jouent un rôle particulier. Ainsi on peut réécrire la fonction L sous la forme

$$\mathcal{L}(u,\chi) = (1-u\sqrt{q})^{m_0(\chi)}(1+u\sqrt{q})^{m_\pi(\chi)} \prod_{j=1}^{d_\chi}(1-u\alpha_j(\chi))^{m_{\theta_j}(\chi)} \prod_{j'=1}^{d'_\chi}(1-u\beta_{j'}(\chi)) \quad (3.1.1)$$

où les $|\beta_{j'}(\chi)| = 1$ son les "zéros triviaux", qui apparaissent par exemple si χ n'est pas un caractère primitif ou si c'est un caractère quadratique et $\deg M$ est pair (voir [Ros02, Prop. 17.7]).

La formule explicite, analogue de (1.3.2), pour $L(s,\chi)$ peut maintenant s'écrire sous la forme [Cha08, Prop. 4.2]

$$\frac{n}{q^{n/2}} \sum_{\substack{\deg h = n \\ h \text{ irréductible}}} \chi(h) = -m_0(\chi) - (-1)^n m_\pi(\chi_f) - \sum_{\theta_j \neq 0,\pi} m_{\theta_j}(\chi_f) e^{in\theta_j(\chi_f)} - \frac{n}{2q^{n/2}} \sum_{\substack{\deg h = \frac{n}{2} \\ h \text{ irréductible}}} \chi(h)^2 + O_f\left(q^{-\frac{n}{6}}\right). \quad (3.1.2)$$

La somme dans le terme de droite correspond à la contribution des carrés de premiers comme dans la Section 2.1.1. Il n'apparaît que lorsque n est pair ; il n'y a pas de carrés de degré impair. Dans le cas où $\chi^2 \neq \chi_0$, il peut être inclus dans le terme d'erreur. Sinon, ce terme va compter, on peut le réécrire comme $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n$ et l'inclure comme un décalage des contributions des zéros réels.

De façon générale on veut donc étudier des fonctions qui sont des combinaisons linéaires de fonctions périodiques $n \mapsto e^{i\theta n}$ dont les périodes ont ou non des relations entre elles. De la même façon que dans la Section 2.1.2, on peut montrer que de telles fonctions admettent une distribution (naturelle) limite, et donner des propriétés de cette distribution selon les relations entre les périodes.

Proposition 3.1.1 (Prop. 2.1 de [DM21])**.** *Soient $\gamma_2,\dots,\gamma_r \in (0,\pi)$ des réels distincts. On se donne des coefficients $C_0, c_1 \in \mathbf{R}$, $c_2,\dots,c_N \in \mathbf{C}^*$, et une fonction $F : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ telle que*

$$F(n) = C_0 + c_1 e^{in\pi} + \sum_{j=2}^{r} \left(c_j e^{in\gamma_j} + \overline{c_j} e^{-in\gamma_j}\right) + o(1) \quad (3.1.3)$$

lorsque $n \to \infty$. Alors la fonction F admet une distribution limite μ au sens que pour toute fonction g bornée, continue et Lipschitzienne, on a

$$\lim_{Y\to\infty} \frac{1}{Y} \sum_{n\leq Y} g(F(n)) = \int_{\mathbf{R}} g(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

La valeur moyenne de la distribution μ est C_0 et sa variance est $c_1^2 + 2\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2$.

De plus la mesure μ est supportée dans $\left[C_0 - |c_1| - \sum_{j=2}^N 2|c_j|, C_0 + |c_1| + \sum_{j=2}^N 2|c_j|\right]$, en particulier, si $|C_0| > |c_1| + \sum_{j=2}^N 2|c_j|$ alors $\mathrm{dens}(C_0F > 0) = 1$ (i.e. avec probabilité 1, la fonction F est su même signe que C_0) ;

On se retrouve ainsi de nouveau avec un terme constant lié à l'annulation au point central, augmenté d'une contribution des carrés de premiers, qui est la valeur moyenne de notre distribution limite, et donc en première approximation la direction du biais (mais voir la Section 3.2.3).

Le support de la distribution est maintenant obligatoirement compact puisque la fonction est une somme finie de termes bornés. Il est donc potentiellement plus difficile de montrer une infinité de changements de signes dans le cas où la valeur moyenne est relativement grande. C'est ainsi que l'on construit les exemples de la Section 3.2.2.

3.1.1 Propriétés conditionnelles de la distribution limite

Comme nous considérons maintenant les fonctions $n \mapsto e^{i\theta n}$ pour des valeurs entières de n (le degré), contrairement au cadre du Chapitre 2 où nous considérions des fonctions $x \mapsto e^{i\theta \log x}$, les valeurs de $\theta \in \mathbf{Q}\pi$ jouent un rôle particulier. De façon plus générale, il faut faire plus attention aux relations rationnelles avec π. L'analogue de la Proposition 2.2.4 est ainsi le résultat suivant.

Théorème 3.1.2 (Th. 1.1 de [Dev21]). *Soit $N \geq 1$ et soient $\gamma_1, \dots, \gamma_N \in (0, \pi)$ distincts tels que $\pi \notin \langle \gamma_1, \dots, \gamma_N \rangle_{\mathbf{Q}}$. Soit $D \geq 1$, on se donne des coefficients $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_N \in \mathbf{C}^D$. Définissons une fonction D-dimensionnelle $F = (F_1, F_2, \dots, F_D) : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^D$ de la façon suivante*

$$F(k) = \sum_{n=1}^{N} \left(\mathbf{c}_n e^{ik\gamma_n} + \overline{\mathbf{c}_n} e^{-ik\gamma_n} \right) = \sum_{n=1}^{N} \left(\mathbf{a}_n \cos(\gamma_n k) + \mathbf{b}_n \sin(\gamma_n k) \right).$$

L'image de F est contenue dans un sous-ensemble compact du sous-espace V_F de $\mathbf{R}^D$ engendré par les vecteurs $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N$.

Alors, pour tout sous-espace $H \subset \mathbf{R}^D$ qui ne contient pas V_F et tout vecteur $\alpha \in \mathbf{R}^D$, on a $\mathrm{dens}(F \in \alpha + H) = 0$.

En particulier, si $V_F \not\subset \bigcup_{d=1}^{D} \{x \in \mathbf{R}^D : x_d = 0\}$, alors, pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_D \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{dens}(F_d = \alpha_d) = 0$ pour tout $1 \leq d \leq D$, et la densité

$$\mathrm{dens}(F_1 > \alpha_1, F_2 > \alpha_2, \dots, F_D > \alpha_D)$$

existe.

Énonçons aussi un analogue du Théorème 2.2.6 pour obtenir la symétrie de la distribution limite.

Proposition 3.1.3 (Lem. 2.11 de [BDKL24]). *La distribution limite d'une fonction*

$$n \mapsto m_0 + m_\pi (-1)^n + \sum_{j=1}^{r} \left(\mathbf{c}_j e^{i\theta_j n} + \overline{\mathbf{c}_j} e^{-i\theta_j n} \right)$$

est symétrique par rapport à sa valeur moyenne m_0 si et seulement s'il n'y a pas de relation

$$k_0\pi + \sum_{j=1}^{r} k_j\theta_j \equiv 0 \mod 2\pi$$

avec $k_0, \dots, k_r \in \mathbf{Z}$ et $k_0 + \sum_{j=1}^{r} k_j \equiv 1 \mod 2$.

3.1.2 Un biais pour la répartition des produits de k polynômes irréductibles

Dans [DM21], nous nous intéressons à la traduction dans les corps de fonctions de la question des biais pour la répartition des produits de nombres premiers dans les classes de congruence étudiée dans [FS10, Men18].

Précisément, pour un polynôme $M \in \mathbf{F}_q[t]$ fixé et A, B deux ensembles de classes de congruences modulo M, nous étudions les fonctions

$$\begin{aligned}&\Delta_{f_k}(X; M, A, B)\\ &:= \frac{X(k-1)!}{q^{X/2}(\log X)^{k-1}}\Big(\frac{1}{|A|}|\{N \in \mathbf{F}_q[t] : N \text{ unitaire, } \deg N \le X,\ f(N) = k, N \bmod M \in A\}|\\ &\qquad - \frac{1}{|B|}|\{N \in \mathbf{F}_q[t] : N \text{ unitaire, } \deg N \le X,\ f(N) = k, N \bmod M \in B\}|\Big)\end{aligned}$$

où $f = \Omega$ ou ω est le nombre de facteurs irréductibles comptés avec ou sans multiplicités.

En particulier, nous illustrons notre étude dans le cas de la course entre les classes des résidus quadratiques ($\square$) et non-quadratiques ($\boxtimes$), dans le cas où q est impair. Nous montrons que pour tout k fixé, la fonction $X \mapsto \Delta_{\Omega_k}(X; M, \square, \boxtimes)$ admet une distribution limite μ_{M,Ω_k} de moyenne

$$\mathbf{E}\mu_{M,\Omega_k} = \frac{(-1)^k}{|\boxtimes|} \sum_{\substack{\chi \bmod M\\ \chi^2=\chi_0\\ \chi\neq\chi_0}} (m_+(\chi) + \frac{1}{2})^k \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}, \tag{3.1.4}$$

et de variance

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\mu_{M,\Omega_k})\\ &= \frac{1}{|\boxtimes|^2}\Bigg(\Bigg(\sum_{\substack{\chi \bmod M\\ \chi^2=\chi_0\\ \chi\neq\chi_0}} (m_-(\chi) + \frac{1}{2})^k\Bigg)^2 \frac{q}{(\sqrt{q}+1)^2} + \sum_{\alpha_j \neq \pm\sqrt{q}} \Bigg(\sum_{\substack{\chi \bmod M\\ \chi^2=\chi_0\\ \chi\neq\chi_0}} m_j^k(\chi)\frac{|\alpha_j|}{|\alpha_j - 1|}\Bigg)^2\Bigg).\end{aligned}$$

Il en est de même pour la fonction $X \mapsto \Delta_{\omega_k}(X; M, \square, \boxtimes)$, avec $(m_\pm(\chi) + \frac{1}{2})$ remplacé par $(m_\pm(\chi) - \frac{1}{2})$.

L'analogue de la conjecture 1.4.1 dans ce cadre est la suivante. On dit que le polynôme M satisfait l'hypothèse (LI✦) si le multi-ensemble

$$\{\pi\} \cup \bigcup_{\substack{\chi \bmod M\\ \chi^2=\chi_0, \chi\neq\chi_0}} \{\gamma \in [0, \pi] : L(\frac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0\}$$

est $\mathbf{Q}$-linéairement indépendant, en particulier les zéros sont tous simples.

Nous montrons un analogue de [Fio14b, Th. 1.1] sur la répartition des valeurs possibles du biais en supposant qu'une famille de polynômes M satisfait cette hypothèse d'indépendance linéaire.

Théorème 3.1.4 (Th. 1.1 de [DM21]). *Soit $\mathbf{F}_q$ un corps fini de caractéristique impaire et soit k un entier strictement positif. On suppose que pour tout $d, r \geq 1$, il existe un polynôme unitaire sans facteur carré $M_{d,r} \in \mathbf{F}_q[t]$ tel que*

1. $\deg M_{d,r} = d$,
2. $\omega(M_{d,r}) = r$,
3. $M_{d,r}$ *satisfait* (LI✦).

Alors pour $f = \Omega$ ou ω, on a

$$\overline{\{\mathrm{dens}((\varepsilon_f)^k \Delta_{f_k}(\cdot; M_{d,r}, \square, \boxtimes) > 0) : d \geq 1, r \geq 1\}} = [\tfrac{1}{2}, 1],$$

avec $\varepsilon_\Omega = -1$ et $\varepsilon_\omega = 1$.

Autrement dit, on s'attend à trouver des situations de biais arbitrairement extrêmes. Dans la section suivante, nous cherchons à mettre à jour des situations qui sortent de ce cadre, où (LI✦) n'est pas vérifiée et où le biais peut valoir 1 (biais complet), $\frac{1}{2}$ (pas de biais) ou même être inférieur à $\frac{1}{2}$ (biais inversé).

3.2 Exemples de situations étonnantes dues à des relations entre zéros

Dans cette section et la suivante on se place dans le cas particulier où χ est le caractère de Dirichlet primitif quadratique modulo un polynôme M sans facteur carrés. La fonction L de Dirichlet associée à χ est alors essentiellement le numérateur de la fonction zêta (ou polynôme de Weil) de la courbe hyperelliptique $\mathcal{C}_M$ donnée par l'équation affine $y^2 = M(x)$.

Nous nous intéressons dans [BDKL24] au terme principal de la formule explicite (3.1.2), en changeant le signe pour considérer plutôt des valeurs positives. On définit

$$\Delta_M(n) = \left(m_0(\chi) + \tfrac{1}{2}\right) + \left(m_\pi(\chi) + \tfrac{1}{2}\right)(-1)^n + \sum_{\theta_j \neq 0, \pi} m_{\theta_j}(\chi) e^{in\theta_j(\chi)}. \tag{3.2.1}$$

Si l'ensemble $\{\theta_1(\chi_f), \ldots, \theta_r(\chi_f)\} \cup \{\pi\}$ est $\mathbf{Q}$-linéairement indépendant, on a vu que $\Delta_f(n) - \left(m_0(\chi_f) + \frac{1}{2}\right)$ oscille autour de la valeur 0 et prend des valeurs positives ou négatives pour la moitié des entiers n. Ainsi, Δ_M est au-dessus (resp. en dessous) de sa valeur moyenne $m_0(\chi_f) + \frac{1}{2}$ pour la moitié des entiers n. On en déduit de la même façon que [Cha08, page 1366] qu'il y a un biais dans la distribution de Δ_M dans la direction des valeurs positives. Et donc, en revenant aux valeurs de χ, on s'attend à avoir en général pour chaque degré n fixé, plus de polynômes irréductibles P de degré n vérifiant $\chi(P) = -1$ que vérifiant $\chi(P) = 1$.

Dans cette section nous donnons des exemples de q et M découverts dans [DM21, BDKL24] pour lesquels l'hypothèse d'indépendance linéaire des zéros n'est pas vérifiée. La situation peut alors être assez différente de celle exposée plus haut. L'idée est de trouver des relations entre zéros qui causent des comportements plus intéressants. Nous faisons alors appel à la théorie de Honda–Tate pour montrer que les relations voulues n'empêchent pas l'existence de fonctions L ayant ces zéros, et qu'il y a même de tels exemples. Les différentes situations font l'objet des sous-parties de cette section, elles ne s'excluent pas nécessairement.

3.2.1 Courses non biaisées

On dit que M donne lieu à une course non biaisée si la fonction Δ_M est positive (resp. négative) pour exactement la moitié des entiers n.

Une telle situation peut avoir lieu par exemple quand la distribution limite consiste en deux masses de Dirac réparties de part et d'autre de 0. Il suffit d'avoir $m_\pi(\chi) > m_0(\chi)$

et la fonction L n'a pas d'autre zéro que les zéros réels. Dans le cas où q est un carré, $(1+\sqrt{q}u)^2$ satisfait bien les hypothèses des polynômes de Weil, et [Wat69, Th. 4.1] affirme l'existence d'une courbe elliptique ayant ce polynôme de Weil. Cela nous fournit donc un exemple de construction de course non biaisée.

3.2.2 Courses complètement biaisées

A l'inverse, on dit que M donne lieu à une course complètement biaisée si pour tout n (avec au plus un ensemble d'exception de densité 0), on a $\Delta_M(n) > 0$.

On montre dans [BDKL24, Cor. 2.15] comme conséquence de résultats sur les suites récurrentes linéaires que si la course est complémentent biaisée, alors l'ensemble d'exceptions est en fait au plus fini.

La situation de biais complet a déjà été évoquée dans la Proposition 3.1.1 comme conséquence du fait que la fonction Δ_M prend ses valeurs dans un intervalle borné. Il suffit que la borne inférieure de cet intervalle soit positive pour avoir un biais complet. Il semble alors utile d'avoir une grande valeur moyenne, autrement dit un grand ordre d'annulation au point central de la fonction L pour compenser les contributions oscillantes des autres zéros [BDKL24, Lem. 4.5].

Un exemple simple de telle situation a lieu si par exemple le polynôme de Weil est $(1-\sqrt{q}u)^2$, dans le cas où q est un carré. De nouveau [Wat69, Th. 4.1] affirme l'existence d'une courbe elliptique ayant ce polynôme de Weil, nous donnant un exemple de course complètement biaisée.

Plus généralement, il se pose la question de l'ordre d'annulation au point central pour les fonctions L de caractères quadratiques. On rejoint ainsi des questionnements plus anciens sur ce sujet. Dans le cadre de l'arithmétique sur $\mathbf{Z}$, suivant la conjecture de minimalité (1.1.1) suppose que les fonctions L de Dirichlet pour les caractères quadratiques ne s'annulent pas au point central. Ce n'est pas le cas dans l'arithmétique de $\mathbf{F}_q[t]$, dans [Li18], Wanlin Li a montré une borne inférieure tendant vers l'infini pour le nombre de polynômes M dont la fonction L du caractère quadratique s'annule au point central¨.

Notons aussi que Cha, Fiorilli et Jouve avaient déjà établi dans [CFJ16, Th. 1.5] l'existence de biais complets dans le contexte du biais de Chebyshev pour les points de courbes elliptiques sur les corps de fonctions.

3.2.3 Courses avec un biais inversé

Nous avons aussi trouvé des situations où le biais s'inverse. On dit que M donne lieu à un biais inversé si la fonction Δ_M prend des valeurs négatives en plus de la moitié des entiers.

Comme la moyenne des valeurs de Δ_M est positive, il faut une grosse asymétrie dans la distribution des valeurs. En particulier, d'après la Proposition 3.1.3, il est nécessaire qu'il y ait des relations linéaires entre les zéros avec une somme de coefficients impaire.

Un exemple simple de telle situation est si on a un angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$. En effet, lorsque q est un carré le polynôme $(1-u\sqrt{q}+u^2q)^2$ est le polynôme de Weil d'une courbe hyperelliptique de genre 2 d'après [HNR09]. On a alors pour cette courbe $\Delta_M(n) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2} + 4\cos(\frac{2\pi}{3}n)$ qui est 6-periodique et prend 2 valeurs positives et 4 valeurs négatives. Donnant donc une proportion $\frac{1}{3}$ de valeurs positives.

Dans [Cha08, Ex. 5.3], Cha avait déjà donné un exemple de biais inversé, lié au compte des irréductibles de degré au plus n dans les classes de congruences.

3.2.4 Cas où le terme principal s'annule

Finalement, il se peut que la fonction Δ_M s'annule en un ensemble d'entiers ayant une proportion positive. Dans ce cas, à ces entiers, le signe de la fonction $n \mapsto \sum_{\substack{h \text{ irréductible} \\ \deg h = n}} \chi(h)$

n'est pas déterminée par le terme principal Δ_M, et il faut étudier les termes d'ordre inférieurs. Dans une telle situation, nous disons que M donne lieux à un biais d'ordre inférieur.

Nous montrons dans [BDKL24, Lem. 5.2] qu'un polynôme de Weil pair donne toujours lieu à un biais d'ordre inférieur, avec Δ_M qui s'annule en tous les entiers impairs.

De nouveau, grâce à [HNR09, Table 1.2], nous pouvons donner quelques exemples de situations de biais d'ordre inférieur. En effet on y lit que le polynôme pair $u^4 - bu^2 + q^2$ avec $b = 2q\cos(2\theta)$ est toujours le polynôme de Weil de la Jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2 si $b \in \mathbf{Z}$, $b \neq q, 2q, 2q-1, 2q-2$ et $b+2q$ n'est pas un carré.

Cette discussion ouvre encore sur des questions classiques de ce domaine. Par exemple, peut-on caractériser les courbes hyperelliptiques dont le polynôme de Weil est un carré parfait ?

3.3 Résultats génériques

Les exemples présentés dans la section précédente sont en fait assez peu nombreux. Kowalski a en effet montré dans [Kow08, Prop. 1.1] que la grande majorité des caractères quadratiques dans une famille de dimension 1 vérifient la conjecture d'indépendance linéaire des zéros de leur fonction L. Ce type de résultat a aussi été développé par Cha, Fiorilli et Jouve dans [CFJ17] pour des familles de fonctions L de courbes elliptiques sur les corps de fonctions. Dans [BDKL24], nous montrons ce même type de résultats pour les conditions plus fortes qui mènent aux situations de biais inattendus de la Section 3.2, et dans la famille complète de tous les caractères quadratiques de Dirichlet modulo un polynôme de degré fixé.

La partie la plus importante de ce travail a été d'établir des conditions nécessaires, ce qui nous permet de trouver une borne supérieure sur le nombre de cas où un biais inattendu peut se produire. Nous obtenons des bornes qui tendent vers zéro lorsque la taille du corps grandit grâce à une version adaptée des méthodes de grand crible développées par Kowalski et plus généralement dans [Kow08, Jou09, CFJ17, PG20].

Théorème 3.3.1 (Th. 1.1 de [BDKL24]). *Soit p un nombre premier impair, q une puissance de p et $d \geq 1$. Notons*

$$\mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q) = \{f \in \mathbf{F}_q[x] \mid f \text{ unitaire, sans facteur carré}, \deg f = d\}.$$

A chaque $f \in \mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q)$ on peut associer une courbe hyperelliptique $\mathcal{C}_f$, de genre $g = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$. Notons aussi $A = 2g^2 + g + 2$.

1. *Pour l'indépendance linéaire, on a*

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q)|}\#\{f \in \mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q) \mid \text{ la fonction zêta de } \mathcal{C}_f \text{ ne vérifie pas LI}\} \ll_{p,g} q^{-\frac{1}{2A}}(\log q)^{1-\delta}$$

   où $\delta \leq 1$ satisfait $\delta \underset{g\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8g}$.

2. *Pour le biais complet, si q est un carré, on a*

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q)|}\#\{f \in \mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q) \mid f \text{ donne lieu à un biais complet}\} \ll_{p,g} q^{-\frac{1}{A}} \log q,$$

   et $\#\{f \in \mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q) \mid f \text{ donne lieu à un biais complet}\} = 0$ sinon.

3. *Pour les biais d'ordre inférieur, on a*

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q)|}\#\{f \in \mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q) \mid f \text{ donne lieu à un biais d'ordre inférieur}\} \ll_{p,g} q^{-\frac{1}{A}} \log q.$$

4. Pour les biais inversés, on a

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q)|}\#\{f \in \mathcal{H}_d(\mathbf{F}_q) \mid f \text{ donne lieu à un biais inversé}\} \ll_{p,g} q^{-\frac{1}{2A}}(\log q)^{1-\delta'},$$

où $\delta' \leq 1$ *satisfait* $\delta' \underset{g\to+\infty}{\sim} \frac{7}{24g}$.

Notons que ces bornes sont bonnes à la limite quand q grandit, avec le degré d fixé. Il serait intéressant d'expliciter mieux la dépendance en le degré ou le genre g afin de pouvoir éventuellement faire la double limite.

L'idée de ce résultat est que la borne sur les exceptions à LI est équivalente à celle obtenue par Kowalski, mais nous obtenons des bornes plus petites, sauvant dans la puissance de q ou dans la puissance de $\log q$ pour les comportements de biais inattendus. Nous espérons ainsi donner l'idée que même si l'hypothèse LI n'est pas satisfaite, il y a de grandes chances pour que le comportement de la fonction Δ_f soit assez standard : biais vers les valeurs de même signe que sa moyenne, avec infinité de changements de signes.

Notons finalement que la borne obtenue pour les biais complets est liée à la proportion de fonctions L de Dirichlet s'annulant au point central comme vu dans la section 3.2.2. Plus généralement les théorèmes de grand crible à la Kowalski nous permettent d'obtenir des bornes sur les exceptions à la conjecture de minimalité (1.1.1) dans les corps de fonction, à la limite quand la taille du corps grandit. Il pourrait être intéressant de développer cette approche, parallèlement à celle du Chapitre 5.

Chapitre 4

Sommes de deux carrés consécutives

Suivant l'idée générale de la décorrélation entre propriétés multiplicatives et additives, il est raisonnable de penser que les suites de nombres définies par des propriétés multiplicatives (telles que les nombres premiers, les nombres sans facteurs carrés, les nombres qui s'écrivent comment sommes de deux carrés) se répartissent bien dans les classes de congruences possibles modulo un entier donné ou dans les petits intervalles et de façon plus générale dans des ensemble définis par des propriétés additives. Les questions de théorie comparative des nombres discutées dans le Chapitre 2 traitent des termes secondaires dans cette bonne répartition dans les classes de congruences pour les nombres premiers. Dans cette section nous nous concentrons sur un autre ensemble multiplicatif : celui des nombres pouvant s'écrire comme une somme de deux carrés d'entiers [1], et sur une autre question : celle de la répartition de couples (ou de n-uplets) de tels entiers consécutifs.

4.1 Sommes de deux carrés dans les classes de congruences

Notons

$$\mathbf{E} = \{a^2 + b^2 : a, b \in \mathbf{Z}\} = \{E_n : n \in \mathbf{N}\}$$

l'ensemble des entiers pouvant s'écrire comme une somme de deux carrés d'entiers, énuméré en ordre croissant, que l'on raccourcira en « sommes de deux carrés » dans la suite. Landau [Lan08] a prouvé que

$$\sum_{n\leq x} \mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} (1-p^{-2})^{-\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{\log x}}, \tag{4.1.1}$$

la constante

$$K := \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} (1-p^{-2})^{-\frac{1}{2}} \tag{4.1.2}$$

est appelée la constante de Landau–Ramanujan. L'ensemble des sommes de carrés est donc comparativement plus grand que l'ensemble des premiers. Il peut alors sembler plus aisé de prouver des propriétés telles que la bonne répartition des éléments de $\mathbf{E}$ dans les classes de congruences. On va cependant se heurter à une nouvelle difficulté qui est que les analogues des fonctions L de Dirichlet dans ce contexte ressemblent à des racines carrées des fonctions L de Dirichlet usuelles. Le pôle en 1 devient alors une singularité essentielle, ce qui fait que l'intégrale analogue à (1.3.1) ne peut pas être déplacé si facilement vers la gauche. On va à la place utiliser des contours de Hankel suivant la méthode de Selberg–Delange,

1. C'est bien un ensemble multiplicatif malgré sa première définition qui semble plus additive, un nombre peut s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers si et seulement si ses facteurs premiers congrus à 3 mod 4 ont une puissance paire.

et c'est ce qui fait apparaître le terme en $\frac{x}{\sqrt{\log x}}$ pour la contribution de la singularité en 1, mais cela permet aussi d'exprimer (4.1.1) plus précisément avec des termes d'erreurs en puissances descendantes de $\log x$. Tout cela est très bien expliqué dans [Ten15, Chap. II.5], voir aussi [Kou19, Chap. 13]. Cela nous permet de préciser dans [DDNS22, Th. 2.4] énoncé ci-dessous, le résultat de Rieger [Rie65, Satz 1] (voir aussi [BW00, Lem. 2.1]) sur la répartition des sommes de carrés dans les classes de congruences. Nous nous restreignons à un module premier et congru à 1 mod 4 pour la simplicité de l'exposition.

Proposition 4.1.1. *Soit $q \equiv 1 \pmod 4$ un premier, et $a \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, alors pour tout $J \geq 0$, on a*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod q}} \mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n) = \frac{K}{q} x \sum_{j=0}^{J} \frac{c_{j,a}}{(\log x)^{1/2+j}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^{J+3/2}}\right),$$

où K est comme en (4.1.2) et où les coefficients $c_{j,a}$ peuvent être donnés explicitement à l'aide des coefficients de Taylor en $s = 1$ de la fonction $s \mapsto \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_E(n) n^{-s}$. En particulier

$$c_{0,a} = 1 \quad \text{et} \quad c_{1,a} := \begin{cases} c_1 + \frac{\log q}{2} & \text{si } a \equiv 0 \pmod q \\ c_1 - \frac{\log q}{2(q-1)} & \text{sinon.} \end{cases} . \tag{4.1.3}$$

On observe en particulier que la classe 0 mod q est favorisée dès le second terme de taille $x(\log x)^{-\frac{3}{2}}$ ce qui est implique un biais complet et d'ordre beaucoup plus important que celui observé par Chebyshev. Schlitt a généralisé ce résultat dans [Sch23] pour des modules q plus généraux, mais surtout pour des formes quadratiques binaires plus générales que $x^2 + y^2$. Il observe également ce biais en faveur de la classe 0 dans le cas q premier. La condition de module premier permet en effet de calculer le compte dans la classe 0 mod q après avoir obtenu celui des classes inversibles. Pour ce qui est des classes inversibles, Gorodetsky étudie l'analogue du biais de Chebyshev dans ce contexte dans [Gor23], et obtient notamment un biais complet en faveur des résidus quadratiques sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée et la Conjecture de Chowla sur la non-annulation au point central des fonctions L de Dirichlet comme énoncée au (1.1.1).

4.2 Paires consécutives de sommes de deux carrés

La motivation pour étudier la répartition des éléments consécutifs de $\mathbf{E}$ dans les classes de congruences est inspirée de [LOS16]. Dans ce papier qui a secoué la communauté mathématique, Lemke Oliver et Soundararajan ont en effet mis à jour un nouveau phénomène de biais, d'ordre plus grand que celui de Chebyshev, dans la répartition des k-uplets de nombres premiers consécutifs dans les classes de congruences. Suivant les idées expliquées plus haut, traduire ces résultats dans le cadre des sommes de deux carrés semblait un exercice intéressant.

Dans [DDNS22] comme dans [LOS16] le biais est observé numériquement, puis justifié de façon heuristique par une version avec bonne estimation des termes d'erreurs de la conjecture de Hardy et Littlewood sur l'écart entre nombres premiers. Un des points clefs est l'estimation d'une somme pondérée des séries singulières (qui sont le terme principal dans la conjecture de Hardy–Littlewood).

Commençons par fixer les notations. Etant donné un premier $q \equiv 1 \bmod 4$ et des entiers a, b, on considère pour tout $x \geq 2$,

$$N(x; q, (a, b)) := \#\{E_n \leq x \ : \ E_n \equiv a \mod q, \ E_{n+1} \equiv b \mod q\}.$$

Si l'on considère que les éléments de $\mathbf{E}$ se répartissent de façon indépendante (l'uniformité découlant de la Proposition 4.1.1) entre les classes de congruences, un premier modèle probabiliste est que chacune des q^2 paires de classes (a, b) donne le même équivalent

asymptotique pour $N(x;q,(a,b))$. Au vu de la Proposition 4.1.1 il est cependant naturel de s'attendre à un biais en faveur des paires (a,b) telles que $ab \equiv 0 \mod q$. Les valeurs numériques présentées dans le Tableau 4.1 et obtenues par `Mathematika` (pour $q=5$ et $x=10^{12}$) montrent de grandes fluctuations et un biais similaire à celui observé dans [LOS16] en défaveur des paires diagonales de type (a,a) (incluant en particulier $(0,0)$), et les paires contenant un 0 ne sont pas clairement les plus représentées.

a	b	$N(10^{12};5,(a,b))$	a	b	$N(10^{12};5,(a,b))$	a	b	$N(10^{12};5,(a,b))$
0	0	4 108 407 474	2	0	8 049 996 586	4	0	7 155 732 959
	1	7 153 121 164		1	5 516 037 772		1	5 356 545 210
	2	5 604 312 560		2	3 754 593 831		2	7 730 855 281
	3	8 054 714 831		3	6 837 553 372		3	5 497 266 920
	4	5 780 373 060		4	5 350 735 550		4	3 768 530 444
1	0	5 777 315 850	3	0	5 609 476 219			
	1	3 765 205 659		1	7 718 021 263			
	2	6 870 009 299		2	5 549 146 140			
	3	5 354 226 097		3	3 765 159 558			
	4	7 742 174 162		4	6 867 117 598			

TABLE 4.1 – $N(x;q,(a,b))$ pour $q=5$ et $x=10^{12}$. La valeur moyenne de $N(x;q,(a,b))$ est 5 949 465 154.

Ce biais en défaveur des paires diagonales est d'autant plus étonnant que ce sont presque les seules pour lesquels il y a des preuves inconditionnelles de l'existence d'une infinité d'éléments. Notamment dans le cas des premiers en progression arithmétique, c'est originellement une conjecture de Chowla, prouvée par Shiu dans [Shi00], qu'il y a une infinité de premiers p_n tels que $p_{n+i-1} \equiv a \mod q$ pour tout $1 \leq i \leq r$, avec a fixé satisfaisant $(a,q)=1$ et $r \geq 2$. Les progrès récents sur le crible ont mené à une nouvelle preuve [BFTB15], et Maynard a montré une proportion positive de tels premiers dans [May16]. Kimmel et Kuperberg ont montré dans [KK24, KK25] des résultats plus forts pour les sommes de deux carrés. Ils montrent notamment que $N(x;q,\underline{a})$ tend vers l'infini quand x grandit pour n'importe quel r-uplet admissible $\underline{a}$ et ils montrent une densité positive pour les r-uplets de la forme $(a,\dots,a,b,\dots,b)$ (incluant le cas $a=b$).

Notre conjecture propose une explication pour ce biais observé.

Conjecture 4.2.1 (Conj. 1.1 de [DDNS22]). *Soit $q \equiv 1 \mod 4$ un premier, et $J \geq 1$. Pour tout $a \in \mathbf{N}$, on a*

$$N(x;q,(a,a)) = \frac{K}{q^2}\frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\varphi(q)}{\pi}\frac{\sqrt{\log\log x}}{\sqrt{\log x}} + \frac{1}{\sqrt{\log x}}\sum_{j=1}^{J} C_j (\log\log x)^{\frac{1}{2}-j}\right) + O\left(\frac{x}{\log x(\log\log x)^{J+\frac{1}{2}}}\right),$$

où les constantes C_j sont explicites et ne dépendent que de q. Pour $a,b \in \mathbf{N}$ tels que $a \not\equiv b \mod q$, on a

$$N(x;q,(a,b)) = \frac{K}{q^2}\frac{x}{\sqrt{\log x}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sqrt{\log\log x}}{\sqrt{\log x}} + \frac{C_{a,b}}{\sqrt{\log x}} - \frac{1}{\varphi(q)\sqrt{\log x}}\sum_{j=1}^{J} C_j (\log\log x)^{\frac{1}{2}-j}\right) + O\left(\frac{x}{\log x(\log\log x)^{J+\frac{1}{2}}}\right),$$

où la constante $C_{a,b}$ est aussi explicite et ne dépend que de q et de $b-a \mod q$.

On observe clairement un second terme assez grand, avec un coefficient négatif dans le cas diagonal et positif dans le cas non-diagonal. Le troisième terme explique aussi la proximité numérique relative entre les valeurs de $N(x;q,(a,b))$ pour $b-a$ constant. Le modèle heuristique pour la conjecture s'adapte bien à des r-uplets au prix d'un peu de travail combinatoire, c'est l'objet de [DDNS22, Conj.1.4]. On prédit que les r-uplets sont d'autant plus favorisés qu'ils ont de coordonnées consécutives différentes.

Le modèle heuristique pour cette conjecture suit assez fidèlement celui de [LOS16]. L'idée est d'abord d'écrire

$$N(x;q,(a,b)) = \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q,\, h\equiv b-a \bmod q}} \sum_{h>0} \mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n)\mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+h)\prod_{t=1}^{h-1}(1-\mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+t)). \tag{4.2.1}$$

En échangeant les sommes, on voit ainsi assez naturellement comment la conjecture de Hardy et Littlewood sur l'écart entre nombres premiers consécutifs entre en jeu.

4.3 Conjecture de Hardy–Littlewood et propriétés de la série singulière pour les sommes de deux carrés

Nous considérons une version de la conjecure de Hardy et Littlewood adaptée aux sommes de deux carrées telle que présentée dans [FKR17]. Soit $k \geq 1$, et $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\} \subseteq \mathbf{Z}$, on définit

$$R_k(\mathcal{H};x) := \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+h_1)\ldots\mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+h_k).$$

La philosophie de la conjecture de Hardy–Littlewood est de commencer par considérer les événements $\mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+h_i)$ comme « indépendants », et la probabilité d'avoir $\mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n)=1$ est $\frac{K}{\sqrt{\log n}}$. Il faut ensuite ajuster par un facteur correcteur qui prend en compte le défaut d'indépendance, c'est la série singulière.

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) := \prod_{p\not\equiv 1 \bmod 4} \frac{\delta_{\mathcal{H}}(p)}{(\delta_{\{0\}}(p))^k}, \tag{4.3.1}$$

avec

$$\delta_{\mathcal{H}}(p) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\#\{0\leq a<p^\alpha : \forall h\in\mathcal{H}, a+h \equiv \square+\square \pmod{p^\alpha}\}}{p^\alpha}.$$

On observe que $\delta_{\mathcal{H}}(p)=1$ si $p\equiv 1 \mod 4$, et en général la limite est bien définie [FKR17]. La version de la conjecture de Hardy et Littlewood que nous utilisons est la suivante.

Conjecture 4.3.1. *(Hardy–Littlewood pour les sommes de deux carrés en progression arithmétique) Soit $k\geq 1$, et $\mathcal{H}=\{h_1,\ldots,h_k\}\subseteq\mathbf{Z}$. Fixons $q\equiv 1 \pmod 4$ un nombre premier, et $a\in\mathbf{Z}$. Si $\mathfrak{S}(\mathcal{H})>0$, alors*

$$\begin{aligned} R_k(\mathcal{H};x,q,a) &:= \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \bmod q}} \mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+h_1)\ldots\mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+h_k) \\ &\sim \frac{\mathfrak{S}(\mathcal{H})}{q}\left(\frac{K}{\sqrt{\log x}}\right)^k. \end{aligned}$$

4.3.1 Application à l'heuristique pour la Conjecture 4.2.1

La Conjecture de Hardy–Littlewood doit être précisée, avec de bons termes d'erreurs pour justifier notre Conjecture 4.2.1. On introduit ainsi une version d'approximation du terme d'erreur dans la Conjecture 4.3.1 inspiré par [MS04] en définissant

$$\mathfrak{S}_0(\mathcal{H}) = \sum_{\mathcal{T}\subseteq\mathcal{H}} (-1)^{|\mathcal{H}\setminus\mathcal{T}|}\mathfrak{S}(\mathcal{T}). \tag{4.3.2}$$

De sorte que Conjecture 4.3.1 est équivalente à

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a \mod q}}\prod_{h\in\mathcal{H}}\left(\mathbf{1}_{\mathbf{E}}(n+h)-\frac{K}{\sqrt{\log n}}\right)\sim\frac{\mathfrak{S}_0(\mathcal{H})}{q}\left(\frac{K}{\sqrt{\log x}}\right)^{|\mathcal{H}|}. \tag{4.3.3}$$

Un des points clefs de l'argument heuristique pour la Conjecture 4.2.1 est le résultat suivant que l'on prouve en adaptant [MS04] au cadre des sommes de deux carrés. Les outils principaux reviennent à une manipulation de sommes d'exponentielles et de combinatoire astucieuse.

Proposition 4.3.2 (Th. 3.4 de [DDNS22]). *Pour tout $k\geq 1$ et $\varepsilon>0$, on a*

$$\sum_{\substack{\mathcal{H}\subseteq[1,h]\\ |\mathcal{H}|=k}}\mathfrak{S}_0(\mathcal{H})\ll_{k,\varepsilon} h^{\frac{k}{2}+\varepsilon}.$$

Cette borne est plus faible que l'équivalent de Montgomery et Soundararajan [MS04, Theorem 2], mais elle est suffisante pour justifier l'heuristique et la preuve n'a donc pas été poussée plus loin.

Finalement, le résultat principal de [DDNS22] est une approximation des sommes pondérées de série singulière et que l'on prouve avec la méthode de Selberg–Delange.

Proposition 4.3.3 (Th. 1.2 de [DDNS22]). *Soit $q\equiv 1 \mod 4$ un premier. Pour tout $J\geq 1$, et $v\neq 0 \mod q$, on a*

$$\sum_{h\geq 1}\mathfrak{S}(\{0,h\})e^{-h/H} = H-\frac{2}{K\pi}\sqrt{\log H}+\sum_{j=1}^{J}c(j)\,(\log H)^{1/2-j}+O\left((\log H)^{-1/2-J}\right)$$

$$\sum_{\substack{h\geq 1\\ h\equiv 0 \mod q}}\mathfrak{S}(\{0,h\})e^{-h/H} = \frac{H}{q}-\frac{2}{K\pi}\sqrt{\log H}+\sum_{j=1}^{J}c_0(j)\,(\log H)^{1/2-j}+O\left((\log H)^{-1/2-J}\right)$$

$$\sum_{\substack{h\geq 1\\ h\equiv v \mod q}}\mathfrak{S}(\{0,h\})e^{-h/H} = \frac{H}{q}+\frac{1}{2K^2\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi \mod q\\ \chi\neq\chi_0}}\bar{\chi}(v)C_{q,\chi}+\sum_{j=1}^{J}c_1(j)\,(\log H)^{1/2-j}+O\left((\log H)^{-1/2-J}\right).$$

Les constantes $c(j)$ sont absolues, les constantes $c_0(j), c_1(j)$ ne dépendent que de q et $C_{q,\chi}$ dépend aussi du caractère de Dirichlet $\chi \mod q$. Toutes ces constantes peuvent êtres explicitées et on a

$$c_0(j)+\varphi(q)c_1(j)=c(j),\ \ j\geq 1.$$

4.3.2 Conjecture de Hardy–Littlewood avec un poids

Comme énoncé dans l'introduction de ce chapitre, certains résultats sont obtenus pour les sommes de deux carrés alors qu'il sont encore ouverts pour les premiers. Cela ne se voit pas dans [DDNS22] ; nous obtenons des résultats tout autant conditionnels que [LOS16]. Il

suffit cependant de comparer les résultats de Hooley [Hoo71] à ceux de Selberg [Sel43] sur les espaces entre éléments consécutifs ; ou encore comparer les résultats de [KK24, KK25] à ceux de [BFTB15, May16] sur l'infinitude d'élements consécutifs dans certaines classes de congruences, pour se convaincre qu'on sait faire plus de choses quand on étudie les sommes de deux carrés.

L'idée principale de Hooley dans [Hoo71] est l'utilisation d'une fonction de poids ρ pour approcher la fonction indicatrice de l'ensemble des sommes de carrés de façon « plus lisse ». Il montre alors des résultats sur cette version pondérée et bien sûr il faut ensuite travailler dur pour déduire les résultats voulus sans le poids. L'idée du projet mené dans [AADKQH] est d'accepter de garder ce poids et de voir la puissance des résultats que l'on peut prouver en version pondérée.

Un premier poids naturel à mettre sur l'ensemble des sommes de carrés est juste le nombre de représentations d'un entier comme somme de carrés. Pour $n \geq 1$, on pose

$$r(n) := \#\{(a,b) \in \mathbf{Z}^2 : n = a^2 + b^2\}.$$

En particulier $r(n) = 0$ si n n'est pas une somme de deux carrés, $r \geq \mathbf{1_E}$ et $4 \mid r(n)$ pour tout n. Le défaut du poids r est qu'il est particulièrement grand en les entiers qui sont multiples de beaucoup de nombres premiers congrus à 1 mod 4, comptés avec ou sans multiplicité. L'idée de Hooley dans [Hoo71], est donc de définir le poids ρ comme une version atténuée de r à l'aide d'un poids t qui est d'autant plus petit aux entiers ayant beaucoup de facteurs premiers congrus à 1 mod 4. On pose

$$\rho(n) = \rho_v(n) = r(n)t_v(n) = r(n) \sum_{\substack{d \mid n \\ p \mid d \Rightarrow p \equiv 1 \bmod 4 \\ d \leq v}} \frac{\mu(d)}{\psi(d)} \Big(1 - \frac{\log d}{\log v}\Big),$$

avec $\psi(d) = \prod_{\substack{p \mid d \\ p \equiv 1 \bmod 4}} (2 - \frac{1}{p})$, et le paramètre v est typiquement choisi de taille $v = x^{\frac{1}{20}}$. On note que $\rho(n) = r(n)$ si n n'a pas de facteur premier congru à 1 mod 4 qui est inférieur à v.

En suivant l'heuristique de [FKR17] pour obtenir la Conjecture 4.3.1 et heuristique exposée dans [NT19] pour les corrélations de fonctions diviseurs, nous établissons un analogue de la conjecture de Hardy–Littlewood pour les versions pondérées des sommes de deux carrés.

Conjecture 4.3.4. *Soit $k \geq 1$, et $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k\} \subseteq \mathbf{Z}$. Lorsque $x \to \infty$, on a*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n+h_1) r(n+h_2) \dots r(n+h_k) \sim \mathfrak{S}_r(\mathcal{H}) \prod_{p \equiv 1 \bmod 4} \frac{(1 + \frac{k}{p-1})}{(1 + \frac{1}{p-1})^k} \prod_{p \equiv 3 \bmod 4} \frac{(1 - \frac{k}{p+1})}{(1 - \frac{1}{p+1})^k} \Big(\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n)\Big)^k$$

et

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \rho(n+h_1)\rho(n+h_2) \dots \rho(n+h_k) \sim \mathfrak{S}_\rho(\mathcal{H}) \cdot \prod_{p \equiv 3 \ (4)} \frac{(1 - \frac{k}{p+1})}{(1 - \frac{1}{p+1})^k} \cdot \left(\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \rho(n)\right)^k.$$

Les séries singulières $\mathfrak{S}_r(\mathcal{H})$ et $\mathfrak{S}_\rho(\mathcal{H})$ ont des expressions explicites en produit eulérien. Leurs facteurs locaux pour les premiers $p \not\equiv 1 \bmod 4$ sont égaux. Elles sont de plus, sont calculables explicitement pour tout ensemble $\mathcal{H}$ donné.

En particulier, la Conjecture 4.3.4 est prouvée dans le cas $k = 2$ par Hooley [Hoo71]. Dans le cas particulier $\mathcal{H} = \{0, 1, 2\}$, les facteurs locaux sont très simples et la conjecture devient

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n) r(n+1) r(n+2) \sim \frac{1}{2} \prod_{p \equiv 1 \bmod 4} \frac{(1 + \frac{3}{p-1})}{(1 + \frac{1}{p-1})^3} \prod_{p \equiv 3 \bmod 4} \frac{(1 - \frac{3}{p+1})}{(1 - \frac{1}{p+1})^3} \Big(\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} r(n)\Big)^3,$$

et

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\rho(n)\rho(n+1)\rho(n+2)\sim\frac{1}{2}\prod_{p\equiv 3 \bmod 4}\frac{(1-\frac{3}{p+1})}{(1-\frac{1}{p+1})^3}\Big(\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\rho(n)\Big)^3.$$

pour $x\to\infty$. Nos premiers tests numériques se sont avérés très satisfaisants.

Chapitre 5

Répartition des zéros de fonctions L

Le sujet principal de ce chapitre est la répartition verticale des zéros de fonctions L. Nous nous basons sur les travaux de Katz et Sarnak [KS99], qui suivent eux-mêmes une heuristique plus ancienne dont l'origine remonte à une discussion entre Dyson et Montgomery [Mon73], et des calculs par Odlyzko [Odl87], sur l'espacement entre zéros consécutifs de ζ. Ils indiquent une similarité entre la répartition des zéros de ζ ou de fonctions L plus générales et la répartition de valeurs propres de grandes matrices unitaires prises aléatoirement dans un ensemble de dimension croissante.

Comme discuté à la suite de la Proposition 1.2.1, pour comparer les zéros de diverses fonctions L, nous allons les normaliser. La normalisation que nous choisissons ici est légèrement différente de celle évoquée dans la Section 1.2 mais on garde bien la propriété d'écart moyen égal à 1 entre les zéros. Dans ce chapitre, nous écrivons toujours un zéro non trivial de fonction L sous la forme $\frac{1}{2}+i\gamma$ même lorsque l'on ne suppose pas l'Hypothèse de Riemann. On s'autorise donc à ce que γ ne soit pas réel, mais on a toujours $|\mathrm{Im}(\gamma)| < \frac{1}{2}$. On normalise alors les zéros d'une fonction L de conducteur analytique $\mathfrak{q}(f)$ en $\widetilde{\gamma} = \gamma \frac{\log \mathfrak{q}(f)}{2\pi}$.

Pour une fonction L de conducteur analytique $\mathfrak{q}(f)$, la loi de répartition de ses zéros normalisés est la mesure

$$\phi \mapsto \sum_{\substack{\gamma \\ L(\frac{1}{2}+i\gamma,f)=0}} \phi\Big(\gamma \frac{\log \mathfrak{q}(f)}{2\pi}\Big).$$

Idéalement, cette mesure serait définie pour un ensemble de fonctions test $\phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ le plus large possible. Une condition minimale d'intégrabilité ou de décroissance à l'infini (telle que par exemple $|\phi(x+iy)| \ll_y (1+|x|)^{-2}$) est aussi nécessaire pour assurer la convergence de la somme sur les zéros. De plus dans le cas d'une fonction L réelle, la symétrie de la répartition des zéros fait qu'il suffit en général de considérer les fonctions ϕ paires. En pratique, dans la suite de ce chapitre, la fonction test ϕ sera généralement une fonction de type Schwartz paire sur l'axe réel, et étendue à $\mathbf{C}$ avec des conditions de décroissance similaires sur chaque axe horizontal.

Une des seules choses que l'on peut faire pour comprendre cette mesure, qui est une somme de deltas de Dirac, est de calculer explicitement les zéros. Cependant, un résultat en moyenne est à notre portée, c'est l'idée de Katz et Sarnak. On va considérer des fonctions L comme faisant partie de « familles » et considérer la mesure limite en moyenne sur la famille. On appelle cette mesure limite la « densité de niveau 1 » pour les zéros de fonctions L dans la famille $\mathcal{F}$. Nous ne donnons pas de définition propre du terme « famille » dans ce mémoire (voir par exemple [Sar08] ou l'introduction de [SST16]), on considérera qu'une famille de fonctions L est un ensemble de telles fonctions qui sont définies de façon similaire, et que l'on peut ordonner par conducteur (analytique). Des exemples de familles sont : l'ensemble des fonctions L de Dirichlet pour des caractères quadratiques de conducteur sans facteur carré, ou encore l'ensemble des fonctions L associés à une courbe elliptique, les Sections 5.2, 5.3 et 5.4 traitent chacune d'un exemple de famille.

Densité de niveau un

Ainsi, étant donnée une famille infinie $\mathcal{F}$ de fonctions L, ordonnée par conducteur, nous étudions la densité de niveau 1 pour les zéros de fonctions L dans $\mathcal{F}$ comme la mesure limite

$$\phi \mapsto \mathcal{D}(\phi, \mathcal{F}) := \lim_{Q\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} \sum_{\substack{\gamma \\ L(\frac{1}{2}+i\gamma,f)=0}} \phi\Big(\gamma \frac{\log(\mathfrak{q}(f))}{2\pi}\Big), \tag{5.0.1}$$

si elle existe, où $\mathcal{F}(Q)$ est l'ensemble des fonctions L dans la famille de conducteur plus petit que Q (ou éventuellement de taille Q). Par abus de notation, on appelle densité de niveau 1 en Q la mesure

$$\phi \mapsto \mathcal{D}(\phi, \mathcal{F}(Q)) := \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} \sum_{\substack{\gamma \\ L(\frac{1}{2}+i\gamma,f)=0}} \phi\Big(\gamma \frac{\log(\mathfrak{q}(f))}{2\pi}\Big), \tag{5.0.2}$$

et on voudra étudier la limite quand Q grandit de $\mathcal{D}(\phi, \mathcal{F}(Q))$ à ϕ fixé.

La classe des fonctions tests ϕ pour la définition de la densité de niveau 1 est déjà limitée pour des questions de convergence individuelle. En pratique, dans chaque cas particulier de famille (comme vu entre autres dans [ÖS93, ILS00, HR03, Mil04, You06, RR10]), on ne sait prouver que la limite existe que pour une classe de fonctions ϕ beaucoup plus restreinte : ϕ est souvent Schwartz et sa transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ a un support compact [1] contenu dans un intervalle fixé. Dans ce chapitre on utilise la normalisation suivante pour la transformée de Fourier d'une fonction ϕ de Schwartz :

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(x) e^{-2\pi i x\xi} dx.$$

Un des points clef de ce domaine d'investigation est de prouver l'existence de la limite pour un intervalle admissible le plus grand possible, afin d'élargir la classe de fonctions test ϕ.

Une avancée récente sur cette question pour les fonction L de Dirichlet a été obtenue par Drappeau, Pratt et Radziwiłł [DPR23]. On observe aussi que si on fait une moyenne sur un plus grand ensemble, il y a plus de chances d'obtenir une bonne convergence, c'est la stratégie suivie dans le résultat récent de Baluyot, Chandee et Li [BCL23]. On garde par exemple en tête qu'une donnée intéressante est le rang moyen de la famille de fonctions L, c'est-à-dire l'ordre d'annulation au point central $\gamma = 0$ qui serait donné par la densité de niveau 1 évaluée en la fonction $\phi = \mathbf{1}_{\{0\}}$, fonction qui n'est malheureusement jamais admissible puisque $\widehat{\mathbf{1}_{\{0\}}}$ est la fonction constante égale à 1.

Dans [KS99], en se basant sur des analogies avec les fonctions L dans les corps de fonctions (voir aussi le Chapitre 3), Katz et Sarnak ont conjecturé que la densité de niveau 1 est liée aux groupes de matrices aléatoires, laissant seulement quatre possibilités pour cette limite. L'heuristique a été développée par la suite par Sarnak, Shin et Templier qui donnent une façon concrète de déterminer lequel des quatre groupes est celui associé à la famille homogène, on pourra voir en particulier [SST16, Conj. 2]. Précisément la conjecture est la suivante :

Conjecture 5.0.1 (Katz–Sarnak)**.** *Etant donné une famille $\mathcal{F}$ essentiellement homogène, il existe un groupe $G \in \{\mathrm{U}, \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}\}$ tel que pour toute fonction ϕ Schwartz, on a*

$$\mathcal{D}(\phi, \mathcal{F}) = \int_{\mathbf{R}} W_G(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} \widehat{W}_G(t)\widehat{\phi}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Certains utilisent le terme fonction de Paley–Wiener pour une telle propriété.

Les densités possibles sont les suivantes,

$$W_G(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } G = \mathrm{U} \\ 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} & \text{si } G = \mathrm{Sp} \\ 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} & \text{si } G = \mathrm{SO(even)} \\ 1 + \delta_0(x) - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} & \text{si } G = \mathrm{SO(odd)}, \end{cases} \tag{5.0.3}$$

où l'on note δ_0 la fonction delta de Dirac en 0. Cet énoncé nous dit notamment que la répartition moyenne des zéros de fonctions L, que l'on pourrait obtenir en construisant un histogramme sur la position des zéros normalisés, est très régulière et relativement indépendante de la famille donnée une fois son type de symétrie connu. On note en particulier que ces mesures sont supportées sur $\mathbf{R}$, la conjecture 5.0.1 implique donc qu'il y a une proportion nulle de zéros de fonctions L en dehors de la droite critique, au moins en moyenne sur chaque famille. On peut donc a priori considérer les questions de densité de niveau 1 inconditionnellement, et cela pourrait nous donner des bornes sur la taille de l'ensemble des contre-exemples à l'Hypothèse de Riemann.

Le côté transformée de Fourier est souvent celui par lequel sont obtenus les résultats, il est alors intéressant de reconnaître facilement les transformées de Fourier des densités

$$\widehat{W}_G(t) = \begin{cases} \delta_0(t) & \text{si } G = \mathrm{U} \\ \delta_0(t) - \frac{1}{2}\eta(t) & \text{si } G = \mathrm{Sp} \\ \delta_0(t) + \frac{1}{2}\eta(t) & \text{si } G = \mathrm{SO(even)} \\ \delta_0(t) + 1 - \frac{1}{2}\eta(t) & \text{si } G = \mathrm{SO(odd)} \end{cases} \tag{5.0.4}$$

où la fonction η est la fonction en escaliers, transformée de Fourier du sinus cardinal, donnée par

$$\eta(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{if } |t| = 1, \\ 0 & \text{if } |t| > 1. \end{cases} \tag{5.0.5}$$

On observe en particulier que $\widehat{W}_{\mathrm{SO(even)}}$ et $\widehat{W}_{\mathrm{SO(odd)}}$ coïncident sur l'intervalle $(-1, 1)$. Ainsi, si l'on souhaite déterminer le type de symétrie de la famille, on aura besoin d'obtenir un support admissible plus grand. Heureusement d'autres données telles que le signe de l'équation fonctionnelle ainsi que d'autres invariants de la famille (comme vu dans [SST16]), ou l'étude des densités de niveau supérieur (impliquant les corrélations de plusieurs zéros) peuvent parfois permettre de déterminer le type de symétrie quand le calcul direct de la densité de niveau 1 ne le permet pas.

Les transformées de Fourier $\widehat{W}_G$ ont une discontinuité en 0 ainsi qu'en -1 et 1 (pour trois d'entre elles), on s'attend alors à ce que ces discontinuités soient visibles dans l'étude des termes secondaires pour le développement asymptotique de la densité de niveau un en Q lorsque Q grandit. On observera cela dans la Section 5.5. La discontinuité en ± 1 est parfois une difficulté pour obtenir un support admissible plus grand que $(-1, 1)$ comme souhaité au paragraphe précédent, en effet on compte alors sur la somme sur les premiers pour nous fournir un terme principal (voir discussion dans la Section 5.1). Dans certains cas, une façon de contourner cette difficulté est de considérer une famille inhomogène composée à part égales d'une famille de type SO(even) et de type SO(odd) — cela se fait assez naturellement en ne séparant pas certaines familles naturelles, telles que les tordues de courbes elliptiques, selon le signe de l'équation fonctionnelle — on dit alors que l'on étudie une famille (inhomogène) de type Orthogonal O pour laquelle la prédiction est

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{O}} :=& \frac{1}{2}(W_{\mathrm{SO(even)}} + W_{\mathrm{SO(odd)}}) = 1 + \frac{1}{2}\delta_0, \\ \widehat{W}_{\mathrm{O}} =& \frac{1}{2}(\widehat{W}_{\mathrm{SO(even)}} + \widehat{W}_{\mathrm{SO(odd)}}) = \frac{1}{2} + \delta_0. \end{aligned}$$

On évite ainsi la transition en 1 dans l'espace des phases.

Application à l'annulation au point central

La Conjecture 5.0.1 permet de revenir sur les questions d'annulation au point central discutées à la Section 1.1. On calcule en effet le rang moyen en évaluant la densité de niveau 1 en la fonction $\phi = \mathbf{1}_{\{0\}}$, ce qui nous donne conjecturalement

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,f)) = \int_{\mathbf{R}} W_G(x)\mathbf{1}_{\{0\}}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } G = \mathrm{U}, \mathrm{Sp} \text{ ou } \mathrm{SO(even)} \\ 1 & \text{si } G = \mathrm{SO(odd)}. \end{cases}$$

On remarque ici que l'un des premiers invariants à considérer pour déterminer le type de symétrie de la famille est le signe de l'équation fonctionnelle. Dans le cas de fonctions L auto-duales, le signe est $+1$ pour des fonctions L dans une famille de type Sp ou SO(even) (donc un ordre d'annulation pair en $s = \frac{1}{2}$), et -1 pour le type SO(odd) (donnant un rang analytique impair).

Dans les faits, on va vérifier la Conjecture 5.0.1 pour une classe de fonctions ϕ dont la transformée de Fourier est supportée dans un intervalle de la forme $(-\sigma, \sigma)$ avec $\sigma > 0$. Si l'on choisit alors une telle fonction ϕ qui satisfait de plus $\phi(0) \geq 1$ et $\phi(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbf{R}$, alors, en supposant aussi l'Hypothèse de Riemann Généralisée dans la famille $\mathcal{F}$ (de façon à ne pas avoir à se poser de question sur comment se comporte ϕ en dehors de la droite réelle), on a

$$\limsup_{Q\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,f)) \leq \mathcal{D}(\phi, \mathcal{F}). \tag{5.0.6}$$

Dans [ILS00, App. A], Iwaniec, Luo et Sarnak montrent que sous contrainte de support de la transformée de Fourier inclus dans $(-\sigma, \sigma) \subset (-1, 1)$, la fonction minimisant cette borne est la fonction sinus cardinal au carré :

$$\phi_\sigma : x \mapsto \left(\frac{\sin(\pi\sigma x)}{\pi\sigma x}\right)^2, \qquad \widehat{\phi}_\sigma : \xi \mapsto \begin{cases} \frac{\nu - |\xi|}{\sigma^2} & \text{si } |\xi| < \sigma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec le léger inconvénient que cette fonction n'est en fait pas de Schwartz, on n'a donc pas de résultat sur la valeur de $\mathcal{D}(\phi_\sigma, \mathcal{F})$. On peut cependant bien l'approcher par de telles fonctions, de façon à ce qu'à la limite leur densité de niveau 1 converge vers $\int_{\mathbf{R}} W_G\phi_\sigma$. La borne (5.0.6) devient alors

$$\limsup_{Q\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,f)) \leq \int_{\mathbf{R}} \widehat{W}_G\widehat{\phi}_\sigma = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma} & \text{si } G = \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma} & \text{si } G = \mathrm{Sp}. \end{cases}$$

Dans le cas d'un support plus grand, on voit la différence entre SO(even) et SO(odd), la borne devient

$$\limsup_{Q\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|} \sum_{f\in\mathcal{F}(Q)} \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,f)) \leq \int_{\mathbf{R}} \widehat{W}_G\widehat{\phi}_\sigma = \begin{cases} \frac{2}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} & \text{si } G = \mathrm{SO(even)} \\ 1 + \frac{1}{2\sigma^2} & \text{si } G = \mathrm{SO(odd)} \\ \frac{1}{2\sigma^2} & \text{si } G = \mathrm{Sp}. \end{cases}$$

Quand σ grandit, ces bornes tendent bien vers 0 pour le cas SO(even) et Sp ou 1 dans le cas SO(odd) ce qui correspond au rang moyen attendu. La fonction ϕ_σ ne donne cependant pas la borne optimale lorsque $\sigma > 1$. En effet, les problèmes de minimisation de $\frac{1}{\phi(0)} \int_{-\sigma}^{\sigma} W_G\phi$ pour ϕ à support compact dans $(-\sigma, \sigma)$ sont résolus dans [ILS00, App. A] pour $G = \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}$ et $\sigma \leq 2$ et donnent des fonctions légèrement plus compliquées que ϕ_σ.

Les travaux [FM15, CCM22] généralisent cette optimisation à tous les groupes et à un choix plus large de supports.

Ensuite, de bornes sur le rang moyen, on peut déduire des bornes supérieures sur la proportion de fonctions L dans la famille qui ne s'annulent pas au point central. On peut en effet utiliser l'astuce que l'on sait que le rang est pair pour une fonction L dont le signe de l'équation est $+1$ pour avoir la borne supérieure

$$\frac{1}{|\mathcal{F}(Q)|}\#\{f\in\mathcal{F}(Q) : \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,f))>0\} \leq \frac{1}{2|\mathcal{F}(Q)|}\sum_{f\in\mathcal{F}(Q)}\mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}}(L(s,f)). \quad (5.0.7)$$

Et une borne similaire pour les fonctions L dont de signe de l'équation fonctionnelle est -1 et s'annulant à un ordre strictement supérieur à 1. Cela permet de montrer des résultats du type « une proportion positive de fonctions L dans la famille $\mathcal{F}$ vérifient la conjecture de minimalité (1.1.1) », avec une borne inférieure explicite sur la proportion, dépendant du support admissible obtenu.

Plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord (Section 5.1) la stratégie générale à suivre pour montrer des résultats dans la direction de la conjecture de Katz–Sarnak. Puis nous présenterons différentes familles de fonctions L étudiées ainsi que les différentes techniques permettant de les étudier. On commence dans la Section 5.2 par une famille de fonctions L associée à des puissances d'un caractère de Hecke, motivé par [Dev26] et la Section 2.3, qui sont de degré 1 sur $\mathbf{Z}[i]$, puis cette famille étant liée aux tordues de la courbe elliptique à multiplication complexe $E : y^2 = x^3 - x$, nous nous intéressons dans la Section 5.3 à cette famille de tordues quartiques. On passe dans la Section 5.4 à des familles plus grandes pour lesquelles nous avons prouvé un plus grand support admissible de façon inconditionnelle. Ce chapitre termine finalement (Section 5.5) avec des commentaires sur la vitesse de convergence de la limite grâce au calcul de termes secondaires pour la quantité $\mathcal{D}(\phi, \mathcal{F}(Q))$ afin de mettre en valeur les particularités de différentes familles.

5.1 Comment prouver la conjecture de Katz–Sarnak ?

Pour étudier les densités de niveau un pour les zéros de fonctions L dans une famille il y a une stratégie générale qui consiste à d'abord transformer la somme sur les zéros d'une fonction L en une somme sur les puissances de premiers et une contribution des termes *à l'infini* grâce à la formule explicite telle qu'évoquée dans la Section 1.3. Plus précisément soit $L(s,f)$ une fonction L réelle et holomorphe[2], réécrivons l'expression (1.3.6), avec un changement de variable $\varphi(s) = \phi\Big(\frac{s-\frac{1}{2}}{2\pi i}\log \mathfrak{q}(f)\Big)$ pour avoir à gauche la somme sur les zéros normalisés. Pour une fonction ϕ paire on a alors $\varphi(s) = \varphi(1-s)$, et sa transformée de Mellin inverse est

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\phi\Big(t\frac{\log \mathfrak{q}(f)}{2\pi}\Big)x^{-\frac{1}{2}-it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}\log \mathfrak{q}(f)}\int_{\mathbf{R}}\phi(t)e^{-2\pi it\frac{\log x}{\log \mathfrak{q}(f)}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}\log \mathfrak{q}(f)}\widehat{\phi}\Big(\frac{\log x}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)$$

2. en particulier $L \neq \zeta$

où $\widehat{\phi}$ est de nouveau utilisé pour la transformée de Fourier. Ainsi pour ϕ paire, Schwartz et dont la transformée de Fourier a support compact, on a après changement de variable

$$\sum_{\substack{\gamma \\ L(\frac{1}{2}+i\gamma,f)=0}} \phi\Big(\gamma\frac{\log(\mathfrak{q}(f))}{2\pi}\Big) = \frac{\log q(f)}{\log \mathfrak{q}(f)}\int_{\mathbf{R}}\phi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\log\mathfrak{q}(f)}\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{\gamma'}{\gamma}\Big(\tfrac{1}{2}+it\frac{2\pi}{\log\mathfrak{q}(f)},f\Big)+\frac{\gamma'}{\gamma}\Big(\tfrac{1}{2}-it\frac{2\pi}{\log\mathfrak{q}(f)},f\Big)\right)\phi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\log\mathfrak{q}(f)}\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda_f(n)}{\sqrt{n}}\widehat{\phi}\Big(\frac{\log n}{\log\mathfrak{q}(f)}\Big) \quad (5.1.1)$$

qui est une réécriture de [RS96, Prop. 2.1].

Dans le terme de droite, on va ensuite distinguer assez naturellement des termes principaux qui correspondent à la conjecture de Katz–Sarnak. On reconnaît par exemple déjà $\widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbf{R}}\phi(t)\,\mathrm{d}t$ dans le premier terme. Ainsi, si $\log q(f)$ et $\log\mathfrak{q}(f)$ sont équivalents en moyenne — c'est-à-dire si les paramètres locaux κ_j sont bornés sur la famille — on obtient exactement le premier terme de la conjecture.

Sinon, les facteurs γ contribuent au terme principal, c'est le sujet de la Section 5.1.1. Un autre terme provient souvent de la somme sur les carrés de premiers comme expliqué dans la Section 5.1.2. En général peut reconnaître ces termes relativement facilement avant de faire la moyenne sur la famille. On peut aussi estimer de façon plus ou moins triviale la somme sur les puissances supérieures de premiers (Section 5.1.3). Il ne reste alors qu'une somme sur les premiers à considérer, et elle n'est pas absolument convergente. La condition de support compact de la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ va alors nous servir à couper cette somme pour s'assurer que sa contribution est finie. C'est aussi là que l'on va utiliser la moyenne sur les fonctions L dans la famille pour échanger les deux sommes (celle sur les premiers et celle sur la famille) avec l'espoir d'obtenir des compensations pour majorer au mieux la somme sur la famille avant de sommer sur les premiers. Les techniques que l'on va utiliser à ce point-là dépendent donc beaucoup plus de la famille que ce qu'on a fait précédemment. On présente dans le reste de ce chapitre différentes techniques utilisées pour différentes familles.

A noter que dans le cas où l'on espère dépasser le support $(-1,1)$ pour une famille de type de symétrie Sp, SO(even) ou SO(odd), on s'attend à ce que la somme sur les premiers contribue un terme principal qui va compenser de la bonne façon le terme venant de la somme sur les carrés de premiers pour obtenir la prédiction de Katz–Sarnak sur ce support étendu. Cette situation apparaît dans [DFS22] (présenté dans la Section 5.5.2) où nous en profitons pour étudier tous les termes secondaires qui viennent de cette transition de phase en 1. Dans les autres cas, nous étudions en général des familles SO(even) et SO(odd) ensemble dans une famille inhomogène Orthogonale de façon à éviter la difficulté de la transition en 1, ou nous ne passons pas ce cap.

5.1.1 Contribution des facteurs γ

D'après (1.0.1) la dérivée logarithmique du facteur $\gamma(\cdot,f)$ est de la forme

$$\frac{\gamma'}{\gamma}(s,f) = -\frac{d}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{s+\kappa_j}{2}\Big)$$

avec les $\kappa_j \in \mathbf{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(\kappa_j) > -\frac{1}{2}$. La contribution à (5.1.1) du premier terme est donc $-d\frac{\log\pi}{\log\mathfrak{q}(f)}\widehat{\phi}(0) = O\big(\frac{1}{\log\mathfrak{q}(f)}\big)$. Tandis que la formule de Stirling $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log(z) + O(|z|^{-1})$ dans la région $\mathrm{Re}(z) > 0$, nous permet, comme dans [DFS22, Lem. 2.2], d'estimer la

contribution des termes en $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ en regroupant les termes conjugués. On trouve ainsi au total une contribution de l'ordre de

$$\frac{\widehat{\phi}(0)}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_{j=1}^{d} \log(\tfrac{1}{2}\kappa_j + \tfrac{1}{4})$$

où les termes de restes sont bornés par $\frac{|\kappa_j|^{-1+\varepsilon}}{\log \mathfrak{q}(f)}$. Ce qui est suffisant. Si de plus les paramètres κ_j tendent vers l'infini dans notre famille, ces termes de restes sont très petits, c'est le cas par exemple dans les familles de « poids variable » discutées aux sections 5.2 et 5.5.2. On peut alors obtenir un bon développement asymptotique de la contribution des facteurs γ.

En associant la contribution des facteurs γ au premier terme de (5.1.1) on compense mieux le $\log \mathfrak{q}(f)$ du dénominateur du terme principal. On obtient donc plus exactement, à la limite quand $\mathfrak{q}(f) \to \infty$, le premier terme $\widehat{\phi}(0)$ qui apparaît dans toutes les prédictions de (5.0.4).

5.1.2 Contribution des carrés de premiers

Etudions maintenant la contribution des carrés de premiers à la dernière somme de (5.1.1). Plus précisément, nous voulons estimer

$$-\frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_{p} \frac{\Lambda_f(p^2)}{p} \widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big). \tag{5.1.2}$$

On observe que c'est une version avec un poids lisse du Théorème des nombres premiers pour la fonction second moment telle que discuté à la Section 2.1.1. On peut en particulier utiliser le résultat (2.1.4) (conditionnel à l'Hypothèse de Riemann Généralisée) avec une intégration par parties (de type Stieltjes) pour obtenir

$$\sum_{p} \frac{\Lambda_f(p^2)}{p} \widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) = -\frac{\mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)}))}{2} \int_1^\infty \frac{1}{t} \widehat{\phi}\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)\, \mathrm{d}t + O(d \log \mathfrak{q}(f))$$

$$-\frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_{p} \frac{\Lambda_f(p^2)}{p} \widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) = \frac{\mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)}))}{2} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi} + O(d). \tag{5.1.3}$$

Cela nous donne potentiellement le second terme de (5.0.4), si $\mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)})) \in \{0, -1, 1\}$, et si $\mathrm{supp}\, \widehat{\phi} \subset (-1, 1)$ pour les trois derniers cas. Si l'on veut un support plus grand, un autre terme principal devrait provenir d'ailleurs pour compenser ou s'ajouter à l'intégrale $\int_1^\infty \widehat{\phi}$. On rappelle que dans le cas d'une fonction L associée à une représentation auto-duale irréductible, $\mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)})) = 1$ ou -1 respectivement selon si la représentation est symplectique ou orthogonale. Ainsi, comme expliqué dans [SST16], une famille composée de représentations orthogonales devrait avoir type de symétrie Sp, et une famille composée de représentations symplectiques devrait avoir type de symétrie SO(even) ou SO(odd) (selon le signe de l'équation fonctionnelle). Pour les fonctions L qui ne sont pas autoduales, la fonction $L(\cdot, f \otimes f)$ n'a a priori pas de pôle en 1, on s'attend à avoir $\mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)})) = 0$ et donc une type de symétrie U pour des familles composées de telles fonctions L. On note alors

$$\varepsilon_G = \mathrm{ord}_{s=1}(L(s, f^{(2)})) = \begin{cases} 1 & \text{si } G = \mathrm{SO(even)} \text{ ou } \mathrm{SO(odd)} \\ -1 & \text{si } G = \mathrm{Sp} \\ 0 & \text{si } G = \mathrm{U}. \end{cases}$$

Notons que (2.1.4) était donné avec un terme d'erreur découlant de l'Hypothèse de Riemann Généralisée, avec une bonne dépendance en la taille de la somme mais la dépendance en le conducteur $\mathfrak{q}(f)$ ne nous permet pas ici d'obtenir un second terme plus petit que le terme principal. Soyons plus précis et inconditionnel.

De la même façon que dans [DFS22, Lem. 4.1] et [DDW26, Lem. 3.5], on garde le terme d'erreur explicite dans le théorème des nombres premiers associé à $L(\cdot, f^{(2)})$ pour écrire les termes secondaires dans (5.1.3). On a

$$\sum_p \frac{\Lambda_f(p^2)}{p}\widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) = -\frac{\varepsilon_G}{2}\int_1^\infty \frac{1}{t}\widehat{\phi}\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)\,\mathrm{d}t + \varepsilon_G\int_1^\infty \frac{E(t)}{t}\Big(-\frac{1}{2}\widehat{\phi}\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) + \frac{1}{\log \mathfrak{q}(f)}\widehat{\phi}'\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)\Big)\,\mathrm{d}t + \sum_p \frac{\Lambda_f(p^2)-\varepsilon_G\log(p)}{p}\widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)$$

avec $E(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{p\le\sqrt{t}}\log(p) - 1$. L'idée, inspirée de [FPS16, FPS17] est de développer $\widehat{\phi}$ en séries de Taylor autour de 0 lorsque $\mathfrak{q}(f)\to\infty$. On écrit

$$\widehat{\phi}\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) = \sum_{j=0}^{J}\frac{\widehat{\phi}^{(j)}(0)}{j!}\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)^j + O\Big(\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)^{J+1}\Big)$$

de façon à avoir

$$-\frac{1}{2}\widehat{\phi}\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) + \frac{1}{\log \mathfrak{q}(f)}\widehat{\phi}'\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) = -\frac{1}{2}\widehat{\phi}(0) + \sum_{j=1}^{J}\frac{\widehat{\phi}^{(j)}}{(\log \mathfrak{q}(f))^j}\frac{(\log t)^{j-1}}{(j-1)!}\Big(1-\frac{\log t}{2j}\Big) + O\Big(\Big(\frac{\log t}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)^{J+1}\Big).$$

On peut observer que comme ϕ est supposée paire, les indices j impairs dans la somme ci-dessus correspondent à un terme nul. On échange somme et intégrale en utilisant une borne sur E le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers. Cela nous donne alors un développement asymptotique de la partie intégrale en puissances descendantes de $\log \mathfrak{q}(f)$ avec des coefficients dépendants des dérivées en 0 de $\widehat{\phi}$ et des intégrales

$$\int_1^\infty \frac{E(t)}{t}(\log t)^{j-1}\Big(1-\frac{\log t}{2j}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Précisément, on obtient une contribution de la forme

$$-\frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)}\sum_p \frac{\Lambda_f(p^2)}{p}\widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) = \frac{\varepsilon_G}{2}\phi(0) + \varepsilon_G\frac{\widehat{\phi}(0)}{\log \mathfrak{q}(f)}\int_1^\infty \frac{E(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \varepsilon_G\sum_{j=1}^{J} C_j\frac{\widehat{\phi}^{(2j)}(0)}{(\log \mathfrak{q}(f))^{2j+1}} + O\big((\log \mathfrak{q}(f))^{-2J-1}\big) - \frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)}\sum_p \frac{\Lambda_f(p^2)-\varepsilon_G\log(p)}{p}\widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big).$$

Autrement dit on a un développement asymptotique en puissances décroissantes de $\log \mathfrak{q}(f)$ de la contribution des carrés de premiers pour chaque f individuel avec des coefficients génériques dont le signe ne dépend que du type de symétrie de la famille (voir aussi la discussion dans la Section 5.5). Pour le dernier terme, notons d'abord que pour une fonction L réelle de degré 1, on aura $\Lambda_f(p^2) = \varepsilon_G\log(p)$ sauf éventuellement en un nombre fini de premiers. Il sera sinon en général plus facile de borner cette contribution après la moyenne sur la famille, ce que nous ferons au cas par cas dans les sections suivantes.

5.1.3 Contribution des puissances supérieures

Le terme

$$-\frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_{\substack{p \\ n\geq 3}} \frac{\Lambda_f(p^n)}{p^{\frac{n}{2}}} \widehat{\phi}\Big(\frac{n\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)$$

peut aussi être borné dans une certaine mesure avant la moyenne sur la famille. Commençons par rappeler que, dans les notations du Chapitre 1, $\Lambda_f(p^n) = \sum_{j=1}^{d}(\alpha_{f,j}(p))^n \log p$. Si l'on fait encore l'hypothèse de la Définition 1.0.1.1 que $|\alpha_{f,j}(p)| = 1$ pour presque tout premier p et indice j, on obtient alors $|\Lambda_f(p^n)| \leq d\log p$, sauf éventuellement pour un nombre fini de termes. En oubliant ces termes, on obtient si $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-\sigma,\sigma)$, on a

$$\Big| -\frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_{\substack{p \\ n\geq 3}} \frac{\Lambda_f(p^n)}{p^{\frac{n}{2}}} \widehat{\phi}\Big(\frac{n\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)\Big| \ll \frac{d}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_{\substack{p \\ n\geq 3 \\ p^n \leq \mathfrak{q}(f)^\sigma}} \frac{\log p}{p^{\frac{n}{2}}} \ll \frac{d}{\log \mathfrak{q}(f)},$$

puisque la somme est alors convergente. L'hypothèse faite ici n'est cependant pas prouvée pour toutes les familles. Dans ce mémoire, seule la famille liée aux formes de Maass discutée à la section 5.4 fait exception. Pour cette famille, la borne de Kim et Sarnak [KS03] donne $|\alpha_{f,j}(p)| \leq p^{\frac{7}{64}}$ pour presque tout premier p et indice j. On peut de façon générale se permettre une hypothèse plus faible, de la forme $|\alpha_{f,j}(p)| \leq p^{\eta}$, pour une certaine valeur de $\eta \geq 0$. On obtient encore une série convergente et donc une contribution facilement bornée par $O\Big(\frac{d}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big)$ si $\eta < \frac{1}{6}$ (qui est satisfaite pour $\eta = \frac{7}{64}$). Il est possible d'obtenir de meilleures bornes grâce à la moyenne sur la famille, de façon à ce que cette contribution n'interfère en fait pas avec les termes secondaires en puissances décroissantes de logarithmes.

5.2 Puissances d'un caractère de Hecke et sommes géométriques

Inspirés par l'étude fine de la répartition des premiers de Gauss [Dev26, RW19, Wax21], discutée aussi à la section 2.3.1 nous nous sommes intéressés avec Chantal David et Ezra Waxman [DDW26] à la répartition des zéros de fonctions L associées à des caractères de Hecke.

Précisément, pour $d \in \mathbf{Z}$ un entier impair et sans facteur carré fixé, nous considérons un [3] caractère de Hecke ξ_d dont la fonction L est égale à la fonction L de la courbe elliptique à multiplication complexe définie par $E_d : y^2 = x^3 - dx$. Il est défini sur les idéaux premiers de $\mathbf{Z}[i]$ de la façon suivante

$$\xi_d((\pi)) := \begin{cases} \frac{\pi}{|\pi|} \cdot \overline{\big(\frac{d}{\pi}\big)_4} & \text{si } (\pi, 1+i) = 1, \\ & \text{où } \pi \text{ est le générateur de } (\pi) \text{ congru à } 1 \bmod (2+2i) \\ 0 & \text{si } (\pi) = (1+i), \end{cases} \tag{5.2.1}$$

où $\big(\frac{\cdot}{\cdot}\big)_4$ est le symbole quartique sur $\mathbf{Z}[i]$ (E_d étant une tordue quartique de E_1), lui-même défini comme une généralisation du symbole de Legendre. La définition du caractère ξ_d est étendue à tous les idéaux fractionnaires de $\mathbf{Z}[i]$ de façon complètement multiplicative. La famille considérée dans cette section est à d fixé,

$$\mathcal{F}_d := \{\xi_{d,k} : k \geq 1\}$$

3. Il y a deux tels caractères : ξ_d et $\overline{\xi_d}$.

où $\xi_{d,k}$ est le caractère primitif qui induit la puissance ξ_d^k. Cela revient à étudier la famille des puissances symétriques de la fonction L associée à la courbe E_d.

Nous montrons qu'il est en fait naturel de séparer la famille $\mathcal{F}_d$ selon la classe de congruence de k modulo 8 et nous prouvons la convergence de la densité de niveau un pour chacune des sous-familles $\mathcal{F}_d^\alpha := \{\xi_{d,k} : k \geq 1, k \equiv \alpha \bmod 8\}$ avec une condition de support dans $(-1, 1)$.

Théorème 5.2.1 (Th. 1.1 de [DDW26]). *Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier impair et sans facteur carré fixé, soit ϕ une fonction paire de Schwartz avec $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-1, 1)$. Fixons $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Alors, lorsque $K \to \infty$, on a*

$$\mathcal{D}(K; \phi, \mathcal{F}_d^\alpha) = \widehat{\phi}(0) - \frac{(-1)^\alpha}{2} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}(u)\, \mathrm{d}u + O\left(\frac{1 + \log|d|}{\log K}\right).$$

Cela nous suggère donc un type de symétrie symplectique dans le cas α pair et orthogonal dans le cas α impair. On observe par ailleurs que pour α impair, il suit de [Iwa97, Th. 12.5] que la famille $\mathcal{F}_d^\alpha$ peut-être vue comme une sous-famille de formes cuspidales de niveau $4N(\mathfrak{f}_d)$ fixé et de poids $k+1$ pair tendant vers l'infini pour lesquelles la conjecture de Katz–Sarnak avec symétrie orthogonale est prouvé dans [ILS00].

Notons que notre résultat est inconditionnel, et il n'est pas clair que supposer l'Hypothèse de Riemann Généralisée permettrait d'augmenter le support admissible.

En supposant l'hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions de notre famille, cela nous fournit, d'après la borne (5.0.7), des bornes inférieurs pour la proportion de fonctions vérifiant la conjecture de minimalité.

Corollaire 5.2.2 (Cor. 1.3 de [DDW26]). *Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier impair et sans facteur carré fixé, et supposons l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions de $\mathcal{F}_d$. Fixons $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.*
Si α est pair, la proportion de fonctions L associées aux éléments de $\mathcal{F}_d^\alpha$ qui ne s'annulent pas au point central est au moins

$$\liminf_{K\to\infty} \frac{8}{K} \#\left\{1 \leq k \leq K : k \equiv \alpha \bmod 8, L(\tfrac{1}{2}, \xi_{d,k}) \neq 0\right\} \geq 75\%.$$

Si α est impair et $W(\xi_{d,\alpha}) = 1$, la proportion de fonctions L associées aux éléments de $\mathcal{F}_d^\alpha$ qui ne s'annulent pas au point central est au moins

$$\liminf_{K\to\infty} \frac{8}{K} \#\left\{1 \leq k \leq K : k \equiv \alpha \bmod 8, L(\tfrac{1}{2}, \xi_{d,k}) \neq 0\right\} \geq 25\%.$$

Enfin, si α est impair et $W(\xi_{d,\alpha}) = -1$, alors on a toujours $L(\frac{1}{2}, \xi_{d,k})$ dans la famille $\mathcal{F}_d^\alpha$, mais la proportion de celle qui s'annulent à un ordre minimal est au moins

$$\liminf_{K\to\infty} \frac{8}{K} \#\left\{1 \leq k \leq K : k \equiv \alpha \bmod 8, \mathrm{ord}_{s=\frac{1}{2}} L(s, \xi_{d,k}) = 1\right\} \geq 75\%.$$

Nous nous concentrons ici sur l'obtention des termes principaux dans le Théorème 5.2.1 et nous reviendrons sur les termes secondaires dans la section 5.5. En particulier, au vu de la discussion développée dans la section 5.1, on se contente ici d'évaluer la contribution des premiers et des carrés de premiers à (5.1.1).

5.2.1 Caractères, fonction L et signe de l'équation fonctionnelle

Revenons tout d'abord sur la définition et les propriétés des objets étudiés dans cette section. Dans l'anneau des entiers de Gauss, tous les idéaux sont principaux et il y a 4 unités : $\pm 1, \pm i$. L'unique premier ramifié de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}[i]$ est 2 et l'on note $\lambda = 1 + i$ de sorte

que $(\lambda)^2 = (2)$. Tout entier de Gauss peut s'écrire de façon unique comme $n = u\lambda^k m$, avec u une unité, $k \geq 0$ et $m \equiv 1 \bmod \lambda^3$ (on dit que m est primaire).

On définit le symbole quartique sur les idéaux premiers $(\pi) \in \mathbf{Z}[i]$ avec $(\pi, \lambda) = 1$, comme le caractère $\left(\frac{\cdot}{\pi}\right)_4 : (\mathbf{Z}[i]/(\pi))^\times \longrightarrow \{\pm 1, \pm i\}$ vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}[i]$,

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)_4 \equiv \alpha^{(N(\pi)-1)/4} \bmod \pi, \tag{5.2.2}$$

que l'on étend à $\mathbf{Z}[i]$ en prenant $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)_4 = 0$ si $(\alpha, \pi) \neq 1$. Ainsi, $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)_4 = 1$ si et seulement si α admet une racine quatrième non nulle dans $\mathbf{Z}[i]/(\pi)$, on a aussi $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)_4 = -1$ si et seulement si α admet une racine carrée mais pas de racine quatrième dans $\mathbf{Z}[i]/(\pi)$.

On peut étendre la définition du symbole quartique pour tout idéal premier à λ de façon multiplicative en utilisant la factorisation unique en idéaux premiers. Si $(\beta) = (\pi_1)^{e_1} \dots (\pi_n)^{e_n}$, on pose pour $\alpha \in \mathbf{Z}[i]$,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 := \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{\alpha}{\pi_i}\right)_4^{e_i}.$$

C'est un caractère de conducteur $\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 4 \nmid e_j}} (\pi_j)$, le radical de la partie sans facteur quartique de (β).

De plus on a la loi de réciprocité quartique [Lem00, Th. 6.9], donnée pour des entiers de Gauss α et β primaires, non-unités,

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_4 = (-1)^{C(\alpha,\gamma)} \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_4, \tag{5.2.3}$$

avec

$$C(\alpha, \gamma) = \frac{(N(\alpha) - 1)}{4} \frac{(N(\gamma) - 1)}{4}. \tag{5.2.4}$$

Notons aussi les lois supplémentaires. Pour $\alpha = a + 2bi$ primaire, on a

$$\left(\frac{i}{\alpha}\right)_4 = i^{\frac{1-a}{2}}, \quad \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)_4 = i^{\frac{a-2b-4b^2-1}{4}}, \quad \text{et } \left(\frac{2}{\alpha}\right)_4 = i^{-b}. \tag{5.2.5}$$

En utilisant la loi de réciprocité quartique, nous parvenons à exprimer la partie finie du caractère de Hecke ξ_d grâce au symbole quartique $\left(\frac{\cdot}{d}\right)_4$ et des caractères modulo les puissances de λ. Cela nous permet d'obtenir l'expression du conducteur de ξ_d^k, puis du signe de l'équation fonctionnelle de la fonction L associée.

Lemme 5.2.3 (Lem. 2.3 et (2.19) de [DDW26])**.** *Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier impair et sans facteur carré. Le conducteur de ξ_d est*

$$\mathfrak{f}_d = \begin{cases} ((2+2i)d) & \text{si } d \equiv 1 \bmod 4 \\ (4d) & \text{si } d \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Pour $k \geq 1$, le conducteur de ξ_d^k est

$$\mathfrak{f}_{d,k} = \begin{cases} \mathfrak{f}_d & \text{si } k \text{ est impair} \\ (2d) & \text{si } k \equiv 2 \bmod 4 \\ (1) & \text{si } k \equiv 0 \bmod 4. \end{cases}$$

En particulier si k est impair, le caractère ξ_d^k est primitif mais ce n'est pas le cas si k est pair. On définit alors la densité de niveau un étudié dans cette section de la façon suivante

$$\phi \mapsto \mathcal{D}(K; \phi, \mathcal{F}_d^\alpha) := \frac{8}{K} \sum_{\substack{1 \leq k \leq K \\ k \equiv \alpha \bmod 8}} \sum_{L(\frac{1}{2} + i\gamma, \xi_{d,k}) = 0} \phi\Big(\frac{\gamma \log\left(k^2 N(\mathfrak{f}_{d,k})\right)}{2\pi}\Big),$$

Le calcul du signe de l'équation fonctionnelle se fait grâce à l'évaluation de sommes de Gauss en suivant la formule donnée dans [IK04, (3.85),(3.86)]. On a besoin pour cela de séparer en de nombreux sous-cas.

Lemme 5.2.4 (Lem. 2.5 de [DDW26]). *Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier impair et sans facteur carré. Soit $k \geq 1$. Si k est pair, le signe de l'équation fonctionnelle de la fonction L associée à $\xi_{d,k}$ est*

$$W(\xi_{d,k}) = 1.$$

Si $d \equiv 1 \bmod 4$, on a

$$W(\xi_{d,k}) = \begin{cases} -\mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 5,9 \bmod 16 \text{ et } k \equiv 1,3 \bmod 8 \\ \mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 5,9 \bmod 16 \text{ et } k \equiv 5,7 \bmod 8 \\ \mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 1,13 \bmod 16 \text{ et } k \equiv 1,3 \bmod 8 \\ -\mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 1,13 \bmod 16 \text{ et } k \equiv 5,7 \bmod 8, \end{cases}$$

enfin, si $d \equiv 3 \bmod 4$, on a

$$W(\xi_{d,k}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 3 \bmod 8 \text{ et } k \equiv 1 \bmod 4 \\ -\mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 3 \bmod 8 \text{ et } k \equiv 3 \bmod 4 \\ -\mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 7 \bmod 8 \text{ et } k \equiv 1 \bmod 4 \\ \mathrm{sgn}(d) & \text{si } d \equiv 7 \bmod 8 \text{ et } k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

L'information courte à retenir de ce résultat est qu'à d fixé, le signe de l'équation fonctionnelle est toujours $+1$ pour les puissances paires du caractères, tandis que pour les puissances impaires il se répartit équitablement entre les valeurs ± 1 selon la congruence de la puissance modulo 4 ou 8. Cela soutient en première intuition le résultat du Théorème 5.2.1 : la famille des puissances paires semble être de type de symétrie symplectique tandis que la famille des puissances impaires serait plutôt de type de symétrie orthogonal.

Donnons finalement une expression pour la fonction L associée à $\xi_{d,k}$. Comme c'est un caractère défini sur les idéaux de $\mathbf{Z}[i]$, le produit eulérien est naturellement défini sur les idéaux premiers $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Z}[i]$, mais on peut les regrouper pour voir la fonction L plutôt comme une fonction de degré 2 sur $\mathbf{Q}$. On écrit ainsi, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned} L(s, \xi_{d,k}) &= \prod_{\mathfrak{p}} \big(1 - \tfrac{\xi_{d,k}(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\big)^{-1} \\ &= \big(1 - \tfrac{\xi_{d,k}(\lambda)}{2^s}\big)^{-1} \prod_{\substack{p \equiv 1 \bmod 4 \\ (p) = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}}} \big(1 - \tfrac{\xi_{d,k}(\mathfrak{p})}{p^s}\big)^{-1} \big(1 - \tfrac{\overline{\xi_{d,k}(\mathfrak{p})}}{p^s}\big)^{-1} \prod_{p \equiv 3 \bmod 4} \big(1 - \tfrac{\xi_{d,k}((p))}{p^{2s}}\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Le facteur en $p = 2$ n'est pas trivial seulement quand $k \equiv 0 \bmod 4$. Pour $p \equiv 3 \bmod 4$, c'est $-p$ qui est primaire, et $\left(\frac{\cdot}{p}\right)_4$ est le caractère trivial sur $\mathbf{Z}$, on a donc $\xi_{d,k}((p)) = (-1)^k$ si $p \nmid d$. D'après les travaux de Hecke [Hec18, Hec20] (voir aussi [IK04, Th. 3.8]), la fonction $L(s, \xi_{d,k})$ satisfait la Définition 1.0.1 avec degré $d = 2$, conducteur $q = 4N(\mathfrak{f}_{d,k})$, paramètres locaux à l'infini $\kappa_1 = \frac{k}{2}$, $\kappa_2 = \frac{k}{2} + 1$. Ses paramètres locaux en des premiers $p \nmid 2d$ peuvent s'exprimer comme

$$(\alpha_{d,k,1}(p), \alpha_{d,k,2}(p)) = \begin{cases} (\xi_{d,k}(\mathfrak{p}), \overline{\xi_{d,k}(\mathfrak{p})}) & \text{si } p \equiv 1 \bmod 4, (p) = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \\ (1, -1) & \text{si } p \equiv 3 \bmod 4, k \text{ pair} \\ (i, -i) & \text{si } p \equiv 3 \bmod 4, k \text{ impair.} \end{cases}$$

Il est ainsi plus naturel de faire la séparation premiers totalement décomposés et inertes plutôt que premiers et carrés de premiers.

La contribution des premiers inertes peut alors s'évaluer sans moyenne, de la même façon que dans la section 5.1.2. Ceux-ci apparaissent en effet seulement avec des puissances paires. En négligeant les puissances supérieures comme indiqué dans la section 5.1.3, on estime la quantité suivante :

$$-\frac{2}{\log(k^2N(\mathfrak{f}_{d,k}))}\sum_{\substack{p\equiv 3 \bmod 4\\ p\nmid d}}\frac{2(-1)^k\log p}{p}\widehat{\phi}\Big(\frac{2\log p}{\log(k^2N(\mathfrak{f}_{d,k}))}\Big)=\frac{(-1)^{k+1}}{2}\phi(0)+O((\log k)^{-1}).$$

On a utilisé le théorème des nombres premiers dans la progression arithmétique 3 mod 4, et l'on note le facteur 2 au numérateur compense le fait que l'on ne prend que la moitié des premiers.

5.2.2 Contribution des premiers totalement décomposés

La partie plus délicate est maintenant de borner la contribution des premiers totalement décomposés. Comme on n'a pas non plus de borne a priori sur la contribution de leurs carrés, et que le terme principal attendu de la contribution des carrés est déjà donné par la contribution des premiers inertes (au moins pour le support admissible donné dans le Théorème 5.2.1), nous voulons en fait borner la contribution de toutes les puissances de premiers totalement décomposés. De plus, nous avons maintenant besoin de la moyenne sur la famille pour espérer obtenir une borne utile.

Autrement dit, étant donné $\alpha\in\{1,\dots 8\}$, cette section se concentre sur la somme

$$-\frac{8}{K}\sum_{\substack{\alpha\le k\le K\\ k\equiv\alpha \bmod 8}}\frac{2}{\log(k^2N(\mathfrak{f}_{d,k}))}\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4,\\ (p)=\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}}}\sum_{n\ge 1}\frac{(\xi_{d,k}(\mathfrak{p})^n+\overline{\xi_{d,k}(\mathfrak{p})^n})\log p}{p^{\frac{n}{2}}}\widehat{\phi}\Big(\frac{n\log p}{\log(k^2N(\mathfrak{f}_{d,k}))}\Big).$$

Nous montrons [DDW26, Prop. 6.3] que cette somme est bornée par $O_{d,\sigma}(K^{\sigma-1}(\log K)^3)$ si $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})\subset(-\sigma,\sigma)$. Cela nous autorise donc un support strictement inclus dans $(-1,1)$ pour que ce terme soit bien négligeable devant le terme principal.

Pour présenter les idées de la preuve, nous négligeons ici le logarithme moyenné sur k, la dépendance en d et considérons que la fonction $\widehat{\phi}$ ne fait que couper la somme sur les premiers de façon à avoir $p^n\le K^{2\sigma}$. On observe alors que pour tout premier totalement décomposé $p\nmid 2d$, on peut définir un angle $\theta_{d,p}\in(0,\pi)$ tel que

$$\xi_d(\mathfrak{p})+\overline{\xi_d(\mathfrak{p})}=2\cos(\theta_{d,p})$$

et alors, par complète multiplicativité, pour tout $k,n\ge 1$, on a

$$\xi_{d,k}(\mathfrak{p})^n+\overline{\xi_{d,k}(\mathfrak{p})^n}=2\cos(kn\theta_{d,p}).$$

La somme sur k est alors essentiellement une somme géométrique, qui donne un noyau de Dirichlet en progression arithmétique,

$$\begin{aligned}D_{K,\alpha}(n\theta_{d,p}):=&\sum_{\substack{\alpha\le k\le K\\ k\equiv\alpha \bmod 8}}(\xi_{d,k}(\mathfrak{p})^n+\overline{\xi_{d,k}(\mathfrak{p})^n})\\ =&\frac{\sin((8\lfloor\frac{K-\alpha}{8}\rfloor+\alpha+4)n\theta_{d,p})-\sin((\alpha-4)n\theta_{d,p})}{\sin(4n\theta_{d,p})}\\ \ll&\frac{1}{|\sin(4n\theta_{d,p})|}\asymp\frac{1}{\|8n\theta_{d,p}\|_{2\pi}},\end{aligned}$$

où $\|\cdot\|_{2\pi}$ est la distance au multiple entier de 2π le plus proche. A $n\ll\log K$ fixé on utilise la continuité de $D_{K,\alpha}$ pour comparer la somme sur p à une intégrale de surface.

On utilise crucialement le fait que les points $p^{\frac{n}{2}}e^{in\theta_{d,p}}$ sont des points du réseau $\mathbf{Z}[i]$. En effet, $\pi = p^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_{1,p}}$ est l'un des générateur de $\mathfrak{p}$ ou $\overline{\mathfrak{p}}$ les diviseurs de (p). Puis on le multiplie par une unité pour obtenir $p^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_{d,p}} = p^{\frac{1}{2}}e^{i\theta_{1,p}}\overline{\left(\frac{d}{\pi}\right)}_4$. Finalement la puissance n-ème d'un entier de Gauss est toujours un entier de Gauss.

Cela permet d'une part de placer autour de chacun de ces points de petites surfaces de taille constante que ne s'intersectent pas et sur lesquelles la valeur $\frac{D_{K,\alpha}(n\theta_{d,p})\log p^{\frac{n}{2}}}{p^{\frac{n}{2}}}$ est comparable à celle de l'intégrale de la fonction continue $(r,\theta)\mapsto \frac{D_{K,\alpha}(\theta)\log r}{r}$. D'autre part, ces points ne sont pas sur les axes réels, imaginaires, ou sur les deux diagonales ($y=\pm x$), et cela nous permet donc de restreindre la zone d'intégration aux points du réseau qui ne sont pas sur ces droites, nous fournissant ainsi une borne inférieure (dépendant du module) pour la distance à ces droites, $\|8\theta\|_{2\pi} \gg \frac{1}{r}$. On obtient ainsi

$$\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4,\\ (p)=\mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}\\ p\nmid d\\ p^n<K^{2\sigma}}} \frac{D_{K,\alpha}(n\theta_{d,p})\log p}{p^{\frac{n}{2}}} \ll \frac{1}{n}\int_1^{K^\sigma}\int_{\|8\theta\|_{2\pi}\geq\frac{1}{2r}} \frac{\log r}{r\|8\theta\|_{2\pi}} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \ll \frac{1}{n}K^\sigma(\log K)^2.$$

Pour que cette contribution soit négligeable devant le terme principal il nous suffit donc d'avoir $\sigma<1$.

Ici la moyenne sur la famille apporte beaucoup d'annulation, transformant une somme géométrique de K termes en un terme essentiellement borné, la limite devient alors juste la taille de la somme sur les premiers. Si on prend une somme plus longue, $\sigma>1$, cette somme devrait contribuer un terme principal pour compenser le terme $\frac{(-1)^{k+1}}{2}\phi(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\int\widehat{\phi}$ venant des premiers inertes, qui ne correspond à un des termes prédits que si $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})\subset(-1,1)$. Nous n'avons cependant pas pu mettre en avant cette contribution, puisque nous bornons trop brutalement avec l'intégrale sur un trop grand secteur. L'utilisation plus fine d'un théorème des nombres premiers de Gauss dans les secteurs serait nécessaire pour obtenir ce terme, mais la dépendance en le secteur n'est pas suffisante dans les résultats actuels pour conclure.

5.3 Une famille de tordues quartiques d'un courbe elliptique à multiplication complexe et sommes de Gauss

La famille de caractères de Hecke discutée dans la section précédente (section 5.2, et [DDW26]) est liée à une courbe elliptique avec multiplication complexe. Nous étudions maintenant la famille des tordues quartiques de cette courbe, c'est le sujet de [DDFW26]. Autrement dit, nous fixons $k=1$ et varions d dans les entiers qui ne sont pas multiple d'une puissance quatrième. Dans ce cadre, la conjecture de Katz–Sarnak permet de donner des bornes sur le rang moyen de cette famille de courbes elliptiques (via la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer). Notre resultat s'inscrit ainsi naturellement dans la littérature récente sur ce sujet déjà évoquée dans la Section 1.1. On note en particulier que les résultats de Smith [Smi26a, Smi26b, Smi25] ne permettent pas de traiter le cas des tordues quartiques.

Par ailleurs la famille que nous étudions ici est la seule famille de tordues quartiques de courbes elliptiques. En effet, toute courbe elliptique $\mathcal{E}: y^2=x^3+ax+b$ admet une famille de tordues quadratiques dont l'équation réduite peut s'écrire comme $\mathcal{E}_d: y^2=x^3+ad^2x+d^3b$, mais il existe seulement une famille de tordues cubiques : $E'_d: y^2=x^3+d$, tordues de la courbe elliptique à multiplication complexe E'_1, et une seule famille de tordues quartiques : $E_d: y^2=x^3-dx$ tordues de la courbe elliptique à multiplication complexe E_1. Notons finalement le résultat récent de Castillo, de Faveri et Dunn [CdFD26] qui montre aussi une proportion non-négative de non-annulation au point central pour la famille des tordues

quartiques E_d, lorsque d varie dans les entiers de Gauss sans facteur puissance quatrième (ce qui en fait une plus grande famille que celle étudiée ici). Leur preuve est basée sur le calcul de moments mollifiés et est donc inconditionnelle.

Plus précisément, le sujet d'étude de cette partie est le suivant. Pour $d \in \mathbf{Z}$ sans facteur puissance quatrième nous considérons la courbe elliptique de modèle $E_d : y^2 = x^3 - dx$. Dans [DDW26], nous avons calculé que pour d sans facteur carré, le signe de l'équation fonctionnelle de la fonction L associée à E_d dépend de la classe de congruence de d modulo 16 (voir Lemme 5.2.4 ci-dessus). Nous commençons par généraliser ce calcul aux entiers d sans puissance quatrième, mais seulement dans le cas $k = 1$ afin de déterminer la séparation de la famille selon le signe de l'équation fonctionnelle. Le résultat suit de nouveau des calculs explicites de sommes de Gauss avec un théorème des restes chinois. La partie sans facteur carré de d, qui est alors le conducteur du caractère ξ_d sépare les cas.

Lemme 5.3.1 (Lem. 3.1 de [DDFW26]). *Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier impair sans facteur puissance quatrième. Si $\mathrm{rad}(d) \equiv 1 \bmod 4$, alors le signe de l'équation fonctionnelle de la fonction L associée à ξ_d est*

$$W(\xi_d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \equiv 1, 7, 13, 15 \bmod 16 \\ -1 & \text{si } d \equiv 3, 5, 9, 11 \bmod 16, \end{cases}$$

si $\mathrm{rad}(d) \equiv 3 \bmod 4$, on a plutôt

$$W(\xi_d) = \begin{cases} -1 & \text{si } d \equiv 1, 7, 13, 15 \bmod 16 \\ 1 & \text{si } d \equiv 3, 5, 9, 11 \bmod 16. \end{cases}$$

Il est donc naturel de séparer notre famille de paramètre d selon la classe de congruence de $\mathrm{rad}(d)$ mod 4 et de d mod 16. On définit ainsi pour des entiers impairs a, b la famille

$$\mathcal{F}_{a,b} := \{\xi_d : d \text{ sans facteur puissance quatrième}, d \equiv a \bmod 16, \mathrm{rad}(d) \equiv b \bmod 4\}.$$

De nouveau, on note que le signe de l'équation fonctionnelle se répartit équitablement entre les valeurs ± 1 lorsque d varie parmi les entiers impairs sans facteur puissance quatrième. On s'attend à une famille de type de symétrie orthogonale.

Nous utilisons cette fois-ci un poids lisse w pour localiser les entiers d dans chaque famille $\mathcal{F}_{a,b}$. Cela nous permet d'utiliser la formule de Poisson pour la sommation sur d (après un crible pour retrouver la somme sur tous les entiers). Fixons donc pour le reste de cette section une fonction w lisse à support compact ne contenant pas 0, positive, non identiquement nulle. On définit alors la densité de niveau 1 en D la mesure

$$\phi \mapsto \mathscr{D}_{\mathcal{F}_{a,b}}(\phi, w, D) := \frac{1}{\sum_{d \in \mathcal{F}_{a,b}} w(\frac{d}{D})} \sum_{d \in \mathcal{F}_{a,b}} w(\tfrac{d}{D}) \sum_{\substack{\gamma \\ L(\frac{1}{2}+i\gamma, \xi_d)=0}} \phi\Big(\gamma \frac{\log(D^2)}{2\pi}\Big).$$

Notons la normalisation un peu différente de celle de (5.0.2), nous y reviendrons.

Notre résultat est le suivant.

Théorème 5.3.2 (Th. 1.2 de [DDFW26]). *Etant donnés a, b des entiers impairs et une fonction w lisse à support compact ne contenant pas 0, positive, non identiquement nulle.*

Supposons l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions $L(s, \xi_d)$.

Soit ϕ une fonction paire de Schwartz avec $\mathrm{supp}\, \widehat{\phi} \subset (-\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$. On a

$$\mathscr{D}_{\mathcal{F}_{a,b}}(\phi, w, D) = \widehat{\phi}(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}(u)\, \mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{\log D}\right).$$

Si l'on suppose de plus une version explicite de la conjecture de Patterson pour la distribution des sommes de Gauss indexées par les premiers (voir Conjecture 5.3.4 ci-dessous), on a le même résultat avec la condition de support plus faible $\mathrm{supp}\, \widehat{\phi} \subset (-1, 1)$.

De nouveau, on en déduit une borne sur le rang moyen qui permet de déduire dans certains cas des proportions de non-annulation.

Théorème 5.3.3 (Th. 1.1 de [DDFW26]). *Etant donnés a, b des entiers impairs et une fonction w lisse à support compact ne contenant pas 0, positive, non identiquement nulle.*

Supposons l'Hypothèse de Riemann Généralisée pour les fonctions $L(s, \xi_d)$. Alors on a la borne suivante

$$\limsup_{D\to\infty} \frac{1}{\sum_{d\in\mathcal{F}_{a,b}} w(\frac{d}{D})} \sum_{d\in\mathcal{F}_{a,b}} w(\tfrac{d}{D}) r(E_d) w\left(\frac{d}{D}\right) \leq \frac{13}{6}.$$

Si l'on suppose de plus une version explicite de la conjecture de Patterson pour la distribution des sommes de Gauss indexées par les premiers (voir Conjecture 5.3.4 ci-dessous), la borne devient $\frac{3}{2}$.

Le reste de cette section présente quelques idées pour la preuve du Théorème 5.3.2, l'idée est principalement d'éclairer comment les sommes de Gauss quartiques entrent en jeu, pour amener naturellement l'énoncé de la Conjecture 5.3.4. Commençons tout de même par trouver les termes principaux de Katz–Sarnak.

5.3.1 Termes principaux

On se souvient que dans la section 5.2.1 on a vu qu'il n'y avait pas besoin de moyenne pour trouver les termes principaux attendus pour la quantité $\sum_{L(\frac{1}{2}+i\gamma,\xi_d)=0} \phi\Big(\frac{\gamma \log D^2}{2\pi}\Big)$. En particulier pour le cas $k = 1$ et en généralisant à d sans facteur puissance quatrième, on obtient

$$\sum_{L(\frac{1}{2}+i\gamma,\xi_d)=0} \phi\Big(\frac{\gamma \log D^2}{2\pi}\Big) = \frac{\log N(\mathfrak{f}_d)}{\log D^2}\widehat{\phi}(0) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}(u)\,\mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{\log D}\right)$$
$$- \frac{1}{\log D} \sum_{\substack{N(\pi)=p\equiv 1 \bmod 4 \\ \pi\equiv 1 \bmod (\lambda^3) \\ k\geq 1}} \frac{\log p}{p^{\frac{k}{2}}}\, \xi_d^k((\pi))\ \widehat{\phi}\left(\frac{k\log p}{2\log D}\right).$$

La normalisation un peu brutale se voit ici : on a remplacé pour toutes les fonctions L de la famille leur conducteur qui est une puissance de 2 multipliée par $\mathrm{rad}(d)^2$ par l'approximation D^2. Le premier terme principal n'est donc plus exactement donné par la contribution des facteurs à l'infini. En échelle logarithmique, cette approximation est suffisante. On peut en effet montrer, de la même façon que la condition du conducteur de Young [You06], que, comme w a support compact ne contenant pas 0, on a $d \approx \pm D$ à l'endroit où w compte le plus et le logarithme du conducteur pondéré par $w(\frac{d}{D})$ est en moyenne $\log D^2$.

Tout le travail est alors de borner le dernier terme en moyenne pondérée sur d avec le support de $\hat{\phi}$ le plus grand possible. Une inégalité de type Pólya–Vinogradov donne un support $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, dans la suite nous améliorons ce support.

5.3.2 Sommes de Gauss

Notre argument suit la preuve de Heath-Brown dans [HB04] dans le cas d'une famille de tordues quadratiques d'une courbe elliptique générale. Une première étape est d'utiliser la sommation de Poisson sur la somme pondérée de façon lisse sur les entiers d. La preuve

se ramène alors à estimer une somme du type

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\Big|\sum_{\substack{\pi\equiv 1 \bmod (\lambda^3)\\ N(\pi)=p\equiv 1 \bmod 4\\ (\pi,M)=1\\ k\geq 1\\ \pi^k\equiv\beta \bmod 4}}\frac{g_4\big(Mm,\pi^k\big)}{N(\pi^k)^{\frac{3}{2}}}\log N(\pi)\frac{\overline{\pi^k}}{|\pi^k|}\,\widehat{\phi}\left(\frac{k\log N(\pi)}{2\log D}\right)\widehat{w}\left(\frac{mD}{2N(\pi)^kM}\right)\Big|$$

où M est un paramètre que l'on peut essentiellement borner (une puissance de logarithme) venant du crible pour passer des entiers sans facteurs puissances quatrième à la somme sur tous les entiers. La formule de Poisson appliquée à des caractères quartiques fait apparaître des sommes de Gauss associées.

Dans [HB04], les sommes de Gauss qui apparaissent sont associées aux caractères quadratiques et sont bien étudiées. En particulier, si l'on sépare la somme sur les premiers selon leur congruence modulo 4 et on obtient essentiellement la même double somme qu'avant l'application de la formule de Poisson, mais la somme sur les entiers a un intervalle réduit : $d\approx D$ devient $m\approx D^{2\nu-1}$, où $\operatorname{supp}\hat{\phi}\subset(-\nu,\nu)$. Cette somme peut alors être évaluée avec des connaissances sur les fonctions L des courbes elliptiques d'origine ou en supposant l'Hypothèse de Riemann pour ces fonctions L. C'est ainsi qu'Heath-Brown obtient un support admissible de $(-1,1)$ sous l'Hypothèse de Riemann pour les fonctions L de courbes elliptiques.

Dans notre cas, les sommes de Gauss associées aux caractères quartiques ne sont pas aussi aisées à traiter. On se trouve face à un défaut de multiplicativité. Une somme de Dirichlet telle que par exemple la fonction

$$\psi_\beta(s,r,\ell):=\sum_{\substack{c\in\mathbf{Z}[i]\\ c\equiv\beta \bmod 4}}\frac{g_4(r,c)}{N(c)^s}\left(\frac{\overline{c}}{|c|}\right)^\ell,$$

qui servirait à étudier la somme ci-dessus, n'admet pas de produit Eulérien. Ce type de fonction est étudiée par [Dia04, Suz83]. En particulier elles admettent un prolongement méromorphe dans le plan complexe, sur lequel elles satisfont une équation fonctionnelle, liant les valeurs en s et en $2-s$ de 24 fonctions étendues de ce type. Il n'est pas raisonnable de supposer un analogue de l'Hypothèse de Riemann pour ces fonctions, mais on peut supposer une compensation de taille racine carrée dans la somme des coefficients. C'est la conjecture ci-dessous, légère variante de [DDHL26, Conj. 1.2] inspirée de la conjecture de Patterson [Pat78, HBP79] pour les sommes de Gauss cubiques, récemment démontrée par Dunn et Radziwiłł [DR24], qui nous permet d'obtenir le support admissible $(-1,1)$ dans le Théorème 5.3.2.

Conjecture 5.3.4 (Conjecture de type Patterson pour les sommes de Gauss quartiques)**.** *Soit $\beta\in\{1,3+2i\}$ et $r\in\mathbf{Z}[i]$, il existe une constante $b_{r,\beta}\neq 0$ telle que pour tout $\varepsilon>0$ et $\ell\in\mathbf{Z}$, $\ell\neq 0$, on a*

$$\sum_{\substack{c\in\mathbf{Z}[i]\\ c\equiv\beta \bmod 4\\ N(c)\leq X}}\frac{g_4(r,c)}{N(c)^{\frac{1}{2}}}\Lambda(c)\left(\frac{\overline{c}}{|c|}\right)^\ell=O\left(N(r)^\varepsilon X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

lorsque $X\to\infty$.

5.3.3 Un résultat de type Lindelöf en moyenne

Pour éviter le recours à la Conjecture 5.3.4, nous prouvons un résultat en moyenne, de type Lindelöf pour les fonctions métaplectiques $\psi_\beta(s,hm^2,\ell)$ pour s proche de la droite

critique, h fixe (qui sera ensuite sommé dans un intervalle relativement petit) et m variant plus librement. Le fait que le paramètre peut varier seulement dans les carrés d'entiers nous permet d'utiliser le crible quadratique, plutôt que quartique, nous permettant de gagner ainsi un peu sur le support admissible.

Proposition 5.3.5 (Lindelöf en moyenne pour le second moment)**.** *Pour tout $0 \neq h \in \mathbf{Z}[i]$, $\ell \neq 0 \in \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{R}$, $1 < \sigma < \frac{5}{4}$ et $U \geq 1$, on a la borne*

$$\sum_{N(m)\leq U} \mu(m)^2 |\psi_\beta(\sigma + it, hm^2, \ell)|^2 \ll_{\sigma,\varepsilon} U^{1+\varepsilon} N(h)^{1/2+\varepsilon} (1+|t|)^{3+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

5.4 Formes modulaires et de Maass avec des formules de trace

Les fonctions L des sections précédentes 5.2 et 5.3 sont de degré 2 sur $\mathbf{Z}$ mais peuvent être vues comme des fonctions de degré 1 sur $\mathbf{Z}[i]$. Dans cette partie nous étudions des fonctions L qui sont « vraiment » de degré 2.

Les travaux présentés ici sont issus de travaux avec Daniel Fiorilli et Anders Södergren [DFS25], puis avec en plus Martin Čech et Kaisa Matomäki [ČDF$^+$25]. Nous étudions d'abord des familles de fonctions L associée à des formes modulaires cuspidales, à poids fixé et niveau tendant vers l'infini. Ces familles ont fait l'objet d'un article fondateur par Iwaniec, Luo et Sarnak [ILS00] qui ont montré la conjecture de Katz–Sarnak pour ces familles ainsi que plusieurs autres, conditionnellement à l'Hypothèse de Riemann Généralisée et pour un support admissible de $(-2, 2)$. En particulier, elles sont de type de symétrie orthogonale, paire ou impaire si l'on sépare selon le signe de l'équation fonctionnelle. Dans [DFS25, ČDF$^+$25] nous nous affranchissons de l'Hypothèse de Riemann Généralisée tout en obtenant tout de même un bon support admissible. Nous améliorons ainsi les résultats inconditionnels précédents [ILS00, RR11] sur le sujet.

L'idée nouvelle dans l'approche de [DFS25] est d'utiliser des informations sur la répartition des zéros de fonctions L de Dirichlet (mieux connues) pour déduire les informations sur les zéros de fonctions L modulaires. En effet, la formule de Petersson lie une somme pondérée des valeurs propres de formes modulaires à des sommes pondérées de sommes de Kloosterman qui peuvent elles-mêmes s'écrire en fonction de sommes de caractères de Dirichlet. Cette idée a été optimisée dans [ČDF$^+$25], utilisant les techniques plus récentes sur les premiers en progressions arithmétiques issues de l'étude des polynômes de Dirichlet.

Pour pouvoir énoncer les résultats, nous avons d'abord besoin d'établir les notations. Fixons une base $B_k^*(N)$ de vecteurs propres normalisés des opérateurs de Hecke dans l'espace $H_k^*(N)$ des formes nouvelles de niveau premier N et poids k, un entier pair. Les éléments de $B_k^*(N)$ sont des formes modulaires, fonctions définies sur le demi-plan $\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Leur niveau N, et leur poids k indiquent les propriétés de périodicité de ces fonctions : pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ avec $c \equiv 0 \bmod N$ on a $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$. Ainsi, un élément f de $B_k^*(N)$ admet un développement en série de Fourier sous la forme $f(z) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e^{2\pi i n z}$, où la normalisation nous permet d'avoir les $\lambda_f(n)$ comme valeurs propres pour l'opérateur de Hecke $T_n : f \mapsto m^{k-1} \sum_{\substack{ad=m \\ a,d>0}} \frac{1}{d^k} \sum_{b \bmod d} f\left(\frac{a\cdot+b}{d}\right)$ et en particulier $\lambda_f(1) = 1$. La fonction L associée à f est alors donnée par $L(s,f) = \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{-s}$ pour $\operatorname{Re}(s) > 1$.

De nouveau, nous étudions une version pondérée de la densité de niveau 1. Nous utilisons les poids harmoniques qui sont définis de la façon suivante :

$$\omega_f(N) := \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}(f,f)_N}; \qquad \text{où } (f,f)_N := \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathbf{H}} y^{k-2} |f(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

D'après [HL94, Iwa90], on peut considérer ces poids comme essentiellement constants, de taille $|B_k^*(N)|^{-1\pm\varepsilon}$. Nous considérons donc la densité de niveau 1 pondérée par les poids harmoniques de la même façon qu'on aurait considéré un poids lisse. Précisément, étant donnée une fonction test ϕ, nous considérons dans cette section la quantité

$$\mathcal{D}_{k,N}^*(\phi;N) := \frac{1}{\sum_{f\in B_k^*(N)}\omega_f(N)} \sum_{f\in B_k^*(N)} \omega_f(N) \sum_{\substack{\gamma \\ L(\frac{1}{2}+i\gamma,f)=0}} \phi\Big(\frac{\log(k^2N)}{2\pi}\gamma\Big).$$

Théorème 5.4.1 (Th. 1.2 de [ČDF+25]). *Soit $k\geq 2$ un entier pair et $\Theta_k = 2-\frac{1}{5k-2}$. Soit ϕ une fonction paire de Schwartz avec $\mathrm{supp}(\widehat{\phi})\subset(-\Theta_k,\Theta_k)$. Alors lorsque N tend vers l'infini dans l'ensemble des nombres premiers, on a l'estimation*

$$\mathcal{D}_{k,N}^*(\phi;N) = \int_{\mathbf{R}} W_O(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + o_{N\to\infty}(1).$$

Le reste de cette section présente les idées principales de la preuve. Ces idées sont aussi utilisées pour prouver un résultat semblable pour la famille des fonctions L associées aux formes de Maass. C'est le sujet de la section 5.4.4.

5.4.1 Termes principaux

Les termes venant de la contribution des facteurs γ et des carrés de premiers peuvent de nouveau essentiellement être obtenus avant la sommation sur la famille. Comme dans la section 5.3, nous n'avons pas normalisé les zéros exactement par le conducteur de la fonction L, mais par une bonne approximation en moyenne.

Pour la contribution des carrés de premiers, le point clef est la relation de Hecke : $\Lambda_f(p^2) = (\lambda_f(p^2)-1)\log(p)$ pour les premiers $p\nmid N$. On en déduit $\mathrm{ord}_{s=1}(L(s,f^{(2)})) = 1$ dans (5.1.3), avec une contribution des termes $\lambda_f(p^2)$ à borner.

Pour cela, et de façon générale pour borner la contribution des termes associés aux $\lambda_f(p^\nu)$, p premier, $\nu\geq 1$, nous avons besoin de la sommation sur la famille. Les poids harmoniques nous permettent naturellement d'utiliser la formule des traces de Petersson, que nous utilisons sous la forme suivante, dérivée de [ILS00, § 2].

Lemme 5.4.2 (Formule de Petersson). *Soit N un nombre premier, soient m,n des entiers positifs tels que $(m,N)=1$, $(n,N^2)\mid N$, et soit $k\geq 2$ un entier pair, on a pour tout $\varepsilon>0$,*

$$\begin{aligned}&\sum_{f\in B_k^*(N)} \omega_f(N)\lambda_f(m)\lambda_f(n)\\ &= \delta(m,n) + 2\pi i^k \sum_{c\equiv 0 \bmod N} c^{-1}S(m,n;c)J_{k-1}(4\pi\sqrt{mn}/c) + O_\varepsilon\Big((N\nu((n,N)))^{-1}(kmn)^\varepsilon\Big),\end{aligned}$$

où $\nu(M) := M\prod_{p\mid M}(1+\frac{1}{p})$. On a aussi utilisé la somme de Kloosterman

$$S(m,n;c) := \sideset{}{^*}\sum_{x \bmod c} e\Big(\frac{mx+n\overline{x}}{c}\Big),$$

et la fonction J_{k-1} de Bessel.

On obtient ainsi, après application de la formule de Petersson le résultat intermédiaire suivant.

Corollaire 5.4.3 (Cor. 2.6 de [DFS25]). *Soit $k\geq 2$ un entier pair. Soit ϕ une fonction paire de Schwartz avec $\sigma = \sup(\mathrm{supp}(\widehat{\phi})) < 2$. Alors, lorsque N tend vers l'infini dans*

l'ensemble des nombres premiers, on a l'estimation

$$\mathcal{D}^*_{k,N}(\phi;N) = \widehat{\phi}(0) + \frac{\phi(0)}{2} + O_k\Big(\frac{1}{\log N}\Big)$$
$$- \frac{4\pi i^k}{\sum \omega_f(N)} \sum_{\substack{p\nmid N\\ \nu\geq 1}} \frac{1}{p^{\nu/2}} \widehat{\phi}\Big(\frac{\nu\log p}{\log k^2N}\Big)\frac{\log p}{\log k^2N} \sum_{c\equiv 0 \bmod N} c^{-1}S(p^\nu,1;c)J_{k-1}(4\pi\sqrt{p^\nu}/c). \quad (5.4.1)$$

On observe que le type de symétrie attendu ici est Orthogonal (O), c'est en effet déjà prouvé dans [ILS00], et on ne sépare pas la famille selon le signe de l'équation fonctionnelle. On s'attend donc à ce que le terme de la deuxième ligne de l'expression (5.4.1) ne contribue pas au terme principal, même quand le support de la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ dépasse $(-1,1)$. C'est cela qu'il nous reste à présenter.

Notons d'abord que les fonctions de Bessel sont très aplaties en 0. On a essentiellement $J_{k-1}(x) \asymp_k x^{k-1}$ lorsque $x \to 0$. Comme on n'a pas d'espoir d'améliorer inconditionnellement le support $(-2,2)$ obtenu en supposant l'Hypothèse de Riemann. On peut imaginer que dans la somme sur les puissances de premiers de (5.4.1) on a $p^\nu = o(N^2)$ et donc, comme $N \mid c$, l'argument dans la fonction de Bessel tend vers 0. Heuristiquement, on peut remplacer la fonction de Bessel par cette approximation. On voit alors que l'utilisation de la borne de Weil pour les sommes de Kloosterman ; $S(m,n,c) \leq c^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ donne le Théorème 5.4.1 pour la valeur plus petite $\Theta_k = 2 - \frac{1}{k}$. Ceci est déjà principalement contenu dans [ILS00, Th. 5.1] et plus clairement dans [RR11]. On observe déjà que $\Theta_k \to 2$ lorsque $k \to \infty$, autrement dit, la borne de Weil fournit déjà un support admissible digne de de ce qui est prouvé sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée dans la limite quand le poids k tend vers l'infini.

5.4.2 Densité verticale des zéros de fonctions de Dirichlet

Pour améliorer ce support, suivant [ILS00, § 6], on ouvre la somme de Kloosterman à l'aide de caractères de Dirichlet modulo c pour obtenir des sommes de Gauss. La somme de la deuxième ligne de (5.4.1) devient alors

$$-4\pi i^k \frac{1}{\log k^2N} \sum_{\substack{c\equiv 0 \bmod N\\ c<N^{1+\frac{1}{2k-3}}}} \frac{1}{c\varphi(c)} \sum_{\substack{\chi \bmod c\\ \chi\neq\chi_0}} \tau(\bar{\chi})^2 \sum_{\substack{p\nmid c\\ \nu\geq 1}} \frac{\log p}{p^{\nu/2}} \widehat{\phi}\Big(\frac{\nu\log p}{\log k^2N}\Big)\chi(p^\nu)J_{k-1}(4\pi\sqrt{p^\nu}/c). \quad (5.4.2)$$

et on souhaite la borner par quelque chose qui tend vers 0.

C'est ici que [ILS00] utilise l'Hypothèse de Riemann pour les fonctions L de Dirichlet, ce qui leur permet de bien estimer la somme sur les premiers. On peut en effet utiliser la formule explicite pour réécrire la somme sur les puissances de premiers comme une somme sur les zéros de fonctions L de Dirichlet. Et, si l'on veut s'affranchir de l'Hypothèse de Riemann, on peut tout de même utiliser des résultats connus sur la répartition de ces zéros, telles qu'une zone sans-zéro, ou encore mieux, des résultats de densité sur la répartition horizontale tels que discutés à la Définition 1.2.3. C'est le parti pris de [DFS25].

Nous utilisons en particulier le Theorème 1.2.5 qui donne une borne supérieure sur le nombres de zéros de fonctions L de caractères de Dirichlet dans une famille de produits de caractères qui est exactement celle dont on a besoin. On obtient alors le Théorème 5.4.1 pour la valeur légèrement plus petite

$$\Theta_k := \begin{cases} 1+\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } k=2;\\ 2\big(1-\frac{1}{10k-5}\big) & \text{si } k\geq 4. \end{cases}$$

Cette valeur est le minimum de la fonction $\beta \mapsto \frac{k-(1-\beta)\min(\frac{3}{2-\beta},\frac{3}{3\beta-1})}{\beta+\frac{k}{2}-1}$ sur $(\frac{1}{2},1)$, et dans le cas $k=2$ ce minimum n'est pas atteint au point de jonction $\beta=\frac{3}{4}$.

Si l'on suppose la Conjecture 1.2.6 de Densité Zéro Généralisée, on obtient un support admissible de $(-2,2)$. Autrement dit, on retrouve le résultat de [ILS00] pour cette famille, sous une hypothèse plus faible.

5.4.3 Polynômes de Dirichlet

L'idée nouvelle de [ČDF+25] est principalement d'ouvrir la preuve du Théorème 1.2.5 plutôt que de l'utiliser comme une boîte noire. Pour étudier la somme sur les premiers dans (5.4.2), on ne se contente plus de la formule explicite. On utilise à la place l'identité de Heath-Brown (telle que présentée par exemple dans [IK04, Prop. 13.3]).

Lemme 5.4.4 (Identité de Heath-Brown)**.** *Soient $K, z \geq 1$, pour tout $n < 2z^K$, on a*

$$\Lambda(n) = -\sum_{k=1}^{K}(-1)^k\binom{K}{k}\sum_{\substack{m_1\cdots_k n_1\ldots n_k=n\\ m_1,\ldots,m_k\leq z}}\mu(m_1)\ldots\mu(m_k)\log(n_k).$$

L'intérêt de cette formule est que l'on peut alors réécrire une somme sur les puissances de premiers comme un produit de sommes, potentiellement plus courtes, sur les entiers. Les sommes sur les entiers étant a priori plus agréables à évaluer. Le paramètre z permet d'optimiser pour que les sommes sur les paramètres m_j qui viennent avec un poids $\mu(m_j)$ (à peine plus sympathique que Λ) soient relativement courtes, alors que les sommes sur les entiers n_j qui sont pondérées par des fonctions lisses (constante égale à 1 ou log) peuvent elles êtres plus longues.

Il nous reste alors à évaluer des sommes du type

$$\sum_{n\leq X} a(n)\chi(n)$$

où $a(n)$ est un poids, lisse ou non. Evaluer des moments, en moyenne sur les caractères est en fait suffisant. En particulier des bornes classiques de grand crible conviennent.

Après optimisation des paramètres, on obtient le support admissible énoncé au Théorème 5.4.1. Contrairement au cas de l'utilisation des résultats de Densité Zéro, le support admissible obtenu par cette méthode ne semble pas pouvoir être amélioré par une potentielle meilleure borne de grand crible ou une autre optimisation des paramètres dans l'identité de Heath-Brown.

5.4.4 Formes de Maass

Les méthodes décrites dans la section 5.4 s'adaptent très bien aux fonctions L associées aux formes de Maass.

Donnons d'abord les notations associées. Dans cette sous-section N est encore un nombre premier qui sera le niveau (variable) de notre famille de formes de Maass. Fixons une base de vecteurs propres normalisés $B^*(N)$ de l'espace des formes de Maass nouvelles de niveau N, pour le Laplacien hyperbolique, les opérateurs de Hecke et l'opérateur de réflexion qui envoie f sur $z \mapsto f(-\bar{z})$. On note les valeurs propres respectivement associées $\lambda_f = \frac{1}{4}+t_f^2$, $\lambda_f(n)$, $n \geq 1$, et ε_f.

De telles fonctions admettent encore un développement en série de Fourier (à l'infini) sous la forme

$$f(x+iy) = \sqrt{y}\sum_{n\neq 0}\rho_f(n)K_{it_f}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx},$$

où $K_\nu(x)$ est la fonction K de Bessel, et la normalisation permet de choisir $\rho_f(1) = 1$. On a ainsi $\rho_f(n) = \lambda_f(n)$, si $(n, N) = 1$, $n \geq 1$. La fonction L associée à f est alors donnée par $L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s}$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. C'est une fonction L de degré 2 qui est bien analytiquement prolongeable à tout le plan complexe mais elle ne satisfait pas toute la Définition 1.0.1. La meilleure borne actuelle sur les paramètres locaux est due à Kim et Sarnak [KS03] et donne $|\alpha_{f,j}(p)| \leq p^{\frac{7}{64}}$. Le signe de son équation fonctionnelle est exactement donné par la valeur propre ε_f (voir par exemple [IK04, p. 132]).

$$\Lambda_f(s) := \Big(\frac{N}{\pi}\Big)^s \Gamma\Big(\frac{s + \delta_f + it_f}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s + \delta_f - it_f}{2}\Big) L(s, f) = \varepsilon_f \Lambda_f(1 - s),$$

où $\delta_f = 0$ si $\varepsilon_f = 1$ et $\delta_f = 1$ si $\varepsilon_f = -1$ [DFI02, § 8].

Le paramètre correspondant aux poids des formes modulaires est la valeur propre pour le Laplacien hyperbolique. De la même façon que nous avons fixé le poids k dans la section 5.4, nous localisons maintenant le paramètre t_f. Comme c'est un paramètre continu, nous utilisons pour cela une famille de poids $\mathscr{H}(A, \delta)$. Pour des paramètres fixés $A > 13$ et $\delta > 0$, les fonctions $h \in \mathscr{H}(A, \delta)$ sont des fonctions réelles paires et à valeurs positives, non identiquement nulles, qui peuvent s'étendre de façon holomorphe à une bande horizontale $|\mathrm{Im}(s)| \leq A$, et qui sont bornées uniformément sur cette bande de la façon suivante

$$h(s) \ll (1 + |s|)^{-2-\delta}.$$

Finalement, nous étudions une version doublement pondérée de la densité de niveau 1 pour les fonctions L associées aux formes de Maass. Précisément, étant donné une fonction test ϕ, nous considérons dans cette section la quantité

$$\mathcal{D}^*(\phi, h; N) := \frac{1}{\sum_{f \in B^*(N)} \omega_f(N) h(t_f)} \sum_{f \in B^*(N)} \omega_f(N) h(t_f) \sum_{\substack{\gamma \\ L(\frac{1}{2} + i\gamma, f) = 0}} \phi\Big(\frac{\log N}{2\pi}\gamma\Big).$$

Les poids ω sont de nouveau liées à la norme de Petersson, on a

$$\omega_f(N) := \frac{1}{\|f\|_N^2 \cosh(\pi t_f)}; \quad \text{où } \|f\|_N^2 := \int_{\Gamma_0(N)\backslash \mathbf{H}} |f(x + iy)|^2 \frac{dxdy}{y^2}.$$

Ils peuvent de nouveau être considérés comme des poids essentiellement constants de taille $|B^*(N)|^{-1\pm\varepsilon}$ d'après [HL94, Iwa90].

L'étude de la densité de niveau 1 pour les formes de Maass peut principalement suivre les idées exposées dans la section 5.4. La borne sur la contribution des puissances supérieures de premiers est légèrement plus difficile du fait que la conjecture de Ramanujan–Petersson n'est pas satisfaite, mais la borne de Kim–Sarnak est suffisamment bonne pour que cela ne soit pas le facteur limitant pour la taille du support admissible. L'analogue de la formule des traces de Petersson (Lemme 5.4.2) est donnée par la formule des traces de Kuznetsov que nous utilisons sous la forme suivante, issue de [KL13].

Lemme 5.4.5 (Formule de Kuznetsov)**.** *Soit $h \in \mathscr{H}(A, \delta)$, et soit N un nombre premier. Etant donnés des entiers positifs m, n tels que $(mn, N) = 1$, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{f \in B(N)} \omega_f(N) h(t_f) \lambda_f(m) \lambda_f(n) =& \frac{\delta_{m,n}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \tanh(\pi t) t \, \mathrm{d}t \\ &- \frac{1}{\pi N}\big(1 + \frac{1}{N}\big) \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \frac{\sigma_{2it}(m)\sigma_{2it}(n)}{(mn)^{it} |\zeta_N(1 + 2it)|^2} \, \mathrm{d}t \\ &+ \sum_{c \equiv 0 \bmod N} c^{-1} S(m, n; c) H^+\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right),\end{aligned}$$

où

$$H^+(x) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) J_{2it}(x) \frac{t}{\cosh(\pi t)}\, dt,$$

$\zeta_N(s) = \prod_{p\nmid N}(1-p^{-s})^{-1}$ *et* $J_\nu(x)$ *est la fonction* J *de Bessel.*

La comparaison des deux formules, Lemme 5.4.5 et Lemme 5.4.2 nous éclaire sur plusieurs points. D'abord, la formule de Kuznetsov contient un terme supplémentaire, lié aux fonctions d'Eisenstein. Ce terme ne pose pas de difficulté particulière dans son estimation. Les derniers termes des deux formules sont très similaires, la fonction J_{k-1} de Bessel dans la formule de Petersson a juste été remplacée par une transformée intégrale H^+ dans la formule de Kuznetsov. De la même façon, on est surtout intéressés par une estimation de cette fonction pour des valeurs de l'argument positives et proches de zéro.

On prouve en particulier que $H^+(x) \ll x$ lorsque $x \to 0^+$, pour toute fonction $h \in \mathscr{H}(A,\delta)$. La situation présente est donc essentiellement identique au cas $k = 2$ de la section 5.4. On prouve en effet le résultat suivant.

Théorème 5.4.6 (Th. 1.1 de [ČDF$^+$25])**.** *Soit* ϕ *une fonction paire de Schwartz avec* $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-\frac{15}{8}, \frac{15}{8})$*. Alors lorsque* N *tend vers l'infini dans l'ensemble des nombres premiers, on a l'estimation*

$$\mathcal{D}^*(\phi, h; N) = \int_{\mathbf{R}} W(O)(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + o_{N\to\infty}(1).$$

Une question encore ouverte à ce sujet serait de voir si, comme dans la section 5.4, il y a un analogue à « faire tendre le poids k vers l'infini », qui pourrait de la même façon, à la limite donner un support admissible qui tendrait vers $(-2, 2)$.

5.5 Termes secondaires : vitesse de convergence et transition en 1

La conjecture de Katz–Sarnak (Conjecture 5.0.1) discutée dans ce chapitre donne une valeur limite semblable pour de nombreuses densités de niveau 1 pour la répartition des zéros de fonctions L dans des familles assez variées. Dans cette partie, nous cherchons à trouver une dépendance plus particulière en chaque famille de fonctions L en étudiant les termes secondaires ou, autrement dit, la vitesse de convergence de la densité de niveau 1 vers la prédiction de la conjecture de Katz–Sarnak.

Mes travaux sur ce sujet se concentrent sur deux familles. Dans la Section 5.5.1 je présente celle de la puissance des caractères ξ_d présentée à la Section 5.2. Tandis que la Section 5.5.2 traite d'une famille de formes modulaires telles que discutée à la Section 5.4 mais dans la direction orthogonale : on fixe cette fois le niveau $N = 1$ et l'on fait varier le poids k. Dans les deux cas, nous explicitons les termes secondaires en puissances décroissantes du logarithme du paramètre Q, ou conducteur, jusqu'à un ordre arbitraire. Les travaux précédents sur ce sujet [FPS16, FPS17, RR10] montrent que ces termes peuvent s'écrire comme des fonctions des valeurs de dérivées de la transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ en 0 et en 1 si le support $[-1, 1]$ est admissible et que la densité W_G liée au type de symétrie a aussi une irrégularité en 1 dans l'espace des phases ($G = \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)}$ ou $\mathrm{SO(odd)}$). Cette "transition de phase" en 1 semble être la raison du phénomène des "murmurations" qui a fait l'actualité récemment et qui est discuté brièvement à la Section 5.5.3.

L'idée générale pour obtenir les termes secondaires a déjà été discutée dans la Section 5.1, il n'est donc pas nécessaire de nouveau s'étendre sur ces preuves ici. Il a en particulier été noté dans la section 5.1.2 que la contribution des carrés de premiers devrait de nouveau donner des termes secondaires en puissances décroissantes de logarithmes avec

des coefficient ne dépendant essentiellement que du type de symétrie, ce n'est donc encore pas sur ces termes que l'on voit la spécificité de la famille.

On remarque enfin que la normalisation précise des zéros en $\frac{\log \mathfrak{q}(f)}{2\pi}$ plutôt qu'en $\frac{\log Q}{2\pi}$ avec $\mathfrak{q}(f) \asymp Q$ permet d'avoir des termes secondaires plus satisfaisants, comme déjà remarqué à la Section 5.1.1 où l'on obtient directement le bon terme principal sans limite ou moyenne.

5.5.1 Retour sur la famille des puissances de caractère de Hecke

Revenons sur le Théorème 5.2.1, nous obtenons en fait un résultat plus précis :

Théorème 5.5.1 (Th. 1.1 de [DDW26]). *Soit $d \in \mathbf{Z}$ un entier impair et sans facteur carré, soit ϕ une fonction paire de Schwartz avec $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-1,1)$. Fixons $\alpha \in \{1,2,\dots,8\}$. Alors pour tout $J \in \mathbf{N}$ fixé, lorsque $K \to \infty$, on a*

$$\mathcal{D}(K;\phi,\mathcal{F}_d^\alpha) = \widehat{\phi}(0) - \frac{(-1)^\alpha}{2}\int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}(u)\,\mathrm{d}u + \sum_{m=1}^{J} \frac{C_m(d,\alpha,\phi)}{(\frac{1}{2}\log(K^2 N(\mathfrak{f}_{d,\alpha})))^m} + O_J\left(\frac{1+\log|d|}{(\frac{1}{2}\log(K^2N(\mathfrak{f}_{d,\alpha})))^{J+1}}\right).$$

Les coefficients $C_m(d,\alpha,\phi)$ ont des expressions qui ne sont pas vraiment éclairantes, qui dépendent des valeurs $\widehat{\phi}^j(0)$ pour les valeurs paires de $j<m$, et avec des particularités selon si $\alpha \equiv 0 \bmod 4$ ou pas. Si vous voulez vraiment les voir, les voici :

$$C_m(d,\alpha,\phi) := (m-1)! \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{m-1} c_j(d,\alpha)\frac{\widehat{\phi}^{(j)}(0)}{j!},$$

avec si $\alpha \equiv 0 \mod 4$ et $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} c_j(d,\alpha) = c_j(\alpha) := &-\delta_0(j)\log 2\pi + B_j + \frac{(\log 2)^{j+1}}{j!}\mathrm{Li}_{-j}(\tfrac{1}{2}) + (-1)^j\frac{2^{j+1}}{j!}\left(\frac{\zeta_{4,3}'}{\zeta_{4,3}}\right)^{(j)} \quad (2)\\ &- \frac{2}{j!}\left(\frac{\log 2}{2}\right)^{j+1}\mathrm{Li}_{-j}\left(\frac{(-1)^{\frac{\alpha}{4}}}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

et si $\alpha \not\equiv 0 \mod 4$ et $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} c_j(d,\alpha) = &-\delta_0(j)\log 2\pi + (-1)^\alpha\left(B_j + \frac{(\log 2)^{j+1}}{j!}\mathrm{Li}_{-j}(\tfrac{1}{2})\right) + (-1)^j\frac{2^{j+1}}{j!}\left(\frac{\zeta_{4,3}'}{\zeta_{4,3}}\right)^{(j)} \quad (2)\\ &+ \frac{2}{j!}\sum_{\substack{p\equiv 3 \bmod 4 \\ p\mid d}} (\log p)^{j+1}\mathrm{Li}_{-j}\left(\frac{(-1)^\alpha}{p}\right). \end{aligned}$$

On a encore introduit des notations pour cela, on note

$$B_j := \frac{(-1)^j}{j!}\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^{(j)}(1) - \left(\frac{L'}{L}\right)^{(j)}(1,\chi_4)\right), \qquad f(s) := (s-1)\zeta(s),$$

$$\mathrm{Li}_{-j}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^j z^n$$

et $\zeta_{4,3}(s) := \prod_{p\equiv 3 \bmod 4}(1-p^{-s})^{-1}$ sur $\mathrm{Re}(s)>1$.

On rappelle que dans cette famille, la contribution des carrés de premiers était en fait celle des premiers inertes $\equiv 3 \bmod 4$. De la même façon que dans la Section 5.1.2, nous écrivons initialement cette contribution sous la forme

$$c_{0,\mathrm{inert}}(k) := (-1)^{k+1}\left(1+2\int_1^\infty \frac{(\psi_k(t;3,4)-\frac{t}{2})}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) \tag{5.5.1}$$

et pour $j \geq 1$,

$$c_{j,\mathrm{inert}}(k) := 2(-1)^k \int_1^\infty \frac{(\psi_k(t;3,4)-\frac{t}{2})}{t^2}\,\frac{(\log t)^{j-1}}{(j-1)!}\left(1-\frac{\log t}{j}\right)\mathrm{d}t, \tag{5.5.2}$$

avec

$$\psi_k(t;3,4) := (-1)^k \sum_{\substack{p^n\leq t\\ p\equiv 3 \bmod 4\\ n\geq 1}} (-1)^{kn}\log p = \frac{t}{2}+O_A\left(\frac{t}{(\log t)^A}\right), \tag{5.5.3}$$

pour tout $A > 0$. On intègre donc bien un reste de Théorème des Nombres Premiers, comme indiqué dans la Section 5.1.2.

Nous donnons ensuite une expression pour calculer plus facilement des valeurs. Par exemple, dans le cas $j = 0$ un travail de réécriture donne

$$c_{0,\mathrm{inert}}(k) = (-1)^k\left(\gamma_0 - \frac{L'}{L}(1,\chi_4)+\log 2\right)+2\frac{\zeta'_{4,3}}{\zeta_{4,3}}(2). \tag{5.5.4}$$

On reconnaît bien une partie des termes dans B_0.

Les termes contenant les fonctions polylogarithmes Li_{-j} viennent de la ramification, en 2 ou en les premiers divisant d.

5.5.2 Moyenne supplémentaire pour la famille de niveau 1 et poids variable

Dans [DFS22], nous mettons à jour une transition en 1 dans les termes secondaires pour la famille des formes de niveau fixé égal à 1, et de poids k pair tendant vers l'infini. De telles transitions ont déjà été observées dans des travaux sur des familles de symétrie symplectique [FI03, Rud10, FPS16, FPS17, Wax21], tandis que pour certaines familles orthogonales cette transition n'apparaît pas [Mil09, RR10]. Dans [DFS22] nous montrons donc la première occurrence de termes de transition en 1 dans des familles spéciale orthogonale paire et impaire.

On sépare en effet les formes modulaires de $B_k(1)$ (suivant la même notation qu'à la Section 5.4, il n'y a pas d'anciennes formes) selon le signe de l'équation fonctionnelle que $L(s,f)$ qui est simplement donné par $(-1)^{\frac{k}{2}}$. Et, précisément, la densité de niveau 1 que nous étudions ici est de nouveau une version pondérée. Fixons h une fonction lisse positive, non identiquement nulle, à support compact dans $\mathbf{R}_{>0}$, on considère

$$\mathscr{D}^{\pm}_{K,h}(\phi) := \frac{1}{\sum\limits_{k\equiv 3\pm 1 \bmod 4} h\left(\frac{k-1}{K}\right)} \sum_{k\equiv 3\pm 1 \bmod 4} h\Big(\frac{k-1}{K}\Big)\frac{1}{\sum\limits_{f\in B_k(1)}\omega_f}\sum_{f\in B_k(1)}\omega_f \sum_{\substack{\gamma\\ L(\frac{1}{2}+i\gamma,f)=0}} \phi\Big(\gamma_f\frac{\log X}{2\pi}\Big).$$

Nous obtenons alors le résultat suivant pour ces deux densités de niveau 1, où l'on note $W^{\pm}$ pour les fonctions de poids $W_{\mathrm{SO(even)}}$ et $W_{\mathrm{SO(odd)}}$ définie au (5.0.3).

Théorème 5.5.2 (Th. 1.1 de [DFS22]). *Soit ϕ une fonction paire de Schwartz avec $\mathrm{supp}(\widehat{\phi}) \subset (-2,2)$. Supposons l'Hypothèse de Riemann pour les fonctions L de Diritchlet, on a alors l'estimation suivante*

$$\mathscr{D}^{\pm}_{K,h}(\phi) = \int_{\mathbf{R}} \widehat{\phi}\cdot\widehat{W}^{\pm} + \sum_{1\leq j\leq J}\frac{R_{j,h}\widehat{\phi}^{(j-1)}(0)\pm S_{j,h}\widehat{\phi}^{(j-1)}(1)}{(\log K)^j} + O_{\phi,h,J}\Big(\frac{1}{(\log K)^{J+1}}\Big), \tag{5.5.5}$$

où les constantes $R_{j,h}$ et $S_{j,h}$ qui apparaissent dans les termes d'ordre inférieur dépendent uniquement de la fonction de poids h et sont définies par les équations (5.5.8), (5.5.6), *et* (5.5.7) *ci-dessous.*

On observe en particulier qu'une singularité en 1 apparaît dans les termes secondaires, au même endroit que pour le terme principal. On rappelle en effet que ϕ et donc $\widehat{\phi}$ est supposée paire, donc la singularité en ± 1 de la fonction η définie au (5.0.5) peut être considérée seulement en 1. De plus, de la même façon que la fonction η apparaît avec des signes opposées dans $W_{\mathrm{SO(odd)}}$ définie au (5.0.3), la singularité en 1 disparaît quand on moyenne sur la famille de tous les poids k pairs pour obtenir une famille inhomogène de type Orthogonal.

Donnons tout de même l'expression pour les constantes. Celles liées à la valeur de $\widehat{\phi}$ en 0 sont

$$R_{1,h} = \frac{\int_{\mathbf{R}^+} h \cdot \log}{\int_{\mathbf{R}^+} h} - \log(4\pi) + 1 + \int_1^\infty \frac{\theta(t) - t}{t^2}\,\mathrm{d}t; \tag{5.5.6}$$

et

$$R_{j,h} = \frac{1}{(j-2)!}\int_1^\infty (\log t)^{j-2}\Big(\frac{\log t}{j-1} - 1\Big)\frac{\theta(t)-t}{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{5.5.7}$$

pour $j \geq 2$. On observe en particulier que la dépendance en le poids h n'apparaît qu'au premier terme d'erreur. Les termes avec intégrale viennent, comme prévu à la Section 5.1.2, de la contribution des carrés de premiers et sont comparables à la contribution des premiers inertes de (5.5.1) et (5.5.2).

Les termes liés à la valeur en 1, viennent eux d'une analyse fine de la contribution de la somme des premiers, qui est non négligeable lorsque l'on passe le support $[-1, 1]$. Ils sont de la forme

$$S_{j,h} = \frac{4\pi(-1)^j}{j!\int_{\mathbf{R}^+} h}\frac{\mathrm{d}^j}{(\mathrm{d}s)^j}\Big(sZ(s)(4\pi)^{s-1}\mathcal{M}h(1-s)\Big)\Big|_{s=0} \tag{5.5.8}$$

où la fonction Z est définie comme

$$Z(s) = \zeta(s+1)\prod_p \Big(1 + \frac{1}{p-1}\Big(\frac{1}{p^{s+1}} - \frac{1}{p^{2s+1}}\Big)\Big). \tag{5.5.9}$$

Il faut noter que le Théorème 5.5.2 est le résultat de ce mémoire qui obtient le plus grand support admissible. Remarquons cependant que c'est un résultat conditionnel à l'Hypothèse de Riemann Généralisée, et que ce support est déjà obtenu par [ILS00, Th. 1.3], la nouveauté de ce résultat consiste surtout dans l'étude des termes d'ordre inférieur. Une raison pour obtenir un grand support est que la famille étudiée ici est assez grande comparativement à la taille du conducteur : on a $\mathfrak{q}(f) \asymp k^2$ et la famille est essentiellement l'union $\bigcup_{\substack{k\equiv 3\pm 1 \bmod 4\\ k\sim K}} B_k(1)$ qui est de taille $\sum_{\substack{k\equiv 3\pm 1 \bmod 4\\ k\sim K}} |B_k(1)| \asymp \sum_{k\sim K} k \asymp K^2$.

Cette idée d'obtenir un plus grand support si on élargit la famille a aussi été développé dan [DPR23, BCL23, CLM26].

Observons aussi que l'Hypothèse de Riemann n'est nécessaire que pour les fonctions L de Dirichlet, de la même façon que la Section 5.4.2 n'utilise que les propriétés des zéros de ces fonctions.

5.5.3 Le phénomène des "volées" ou "murmurations"

La "transition en 1" discutée dans la Section 5.5.2 a été remise au goût du jour récemment grâce à des outils d'intelligence artificielle utilisés par des mathématiciens [HLOP25] qui cherchaient un lien entre signe de l'équation fonctionnelle et comportement des coefficients $a_p(E)$ pour les courbes elliptiques. Leurs beaux graphiques ont suscité beaucoup d'intérêt et ont donné lieu à une formalisation et des explications théoriques menées principalement par Zubrilina [Zub25], mais voir aussi entre autres [BBLLD26, KL25, BKL$^+$26].

Dans sa lettre [Sar23], Sarnak explique en effet le lien entre le phénomène des "murmurations" observées dans [HLOP25] et le phénomène de transition en 1 observé dans les calculs de densité de niveau 1. Dans le projet [DLR], forts de notre expérience pour l'étude des densités de niveau 1 nous reprenons cette lettre pour en justifier les points clefs et en offrir une version plus accessible.

Nous nous concentrons de nouveau sur les familles de la Section 5.5.2 des formes modulaires de $B_k(1)$ séparées selon le signe $(-1)^{\frac{k}{2}}$ avec une moyenne supplémentaire sur les poids k pairs, et nous gardons le poids harmonique dans la normalisation. Il est en effet intéressant de comparer aux résultats précédents [Zub25, BBLLD26] pour des familles semblables mais qui n'utilisent pas les poids harmoniques, et qui utilisent alors la formule des traces d'Eichler–Selberg quand nous pouvons utiliser celle de Petersson. Nous prouvons le résultat suivant

Théorème 5.5.3 (Th. 1 de [DLR]). *Soit $K \geqslant 1$ et Φ une fonction lisse positive avec $\mathrm{supp}(\Phi) \subset (1,2)$. Soit $I = [A,B]$ un intervalle de la forme $A \asymp K$ et $B = A + K^\gamma$ pour un certain $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$. Supposons l'Hypothèse de Riemann pour ζ. Alors,*

$$\frac{\sum_{p\in I} \log p \sum_{f\in\mathcal{H}^\pm} \Phi\left(\frac{c(f)}{K}\right) \omega_f a_f(p)}{\sum_{p\in I} \log p \sum_{f\in\mathcal{H}^\pm} \Phi\left(\frac{c(f)}{K}\right) \omega_f} \sim \pm \frac{1}{|I| K^{\frac{1}{2}}} \int_I M_\Phi(\tfrac{x}{K})\,\mathrm{d}x, \tag{5.5.10}$$

lorsque $K \to \infty$, où la fonction de murmuration M_Φ est définie comme

$$M_\Phi(x) = \frac{4\pi}{\widetilde{\Phi}(\frac{1}{2})} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{\mu(c)^2}{c\phi(c)} \Phi\left(\frac{16\pi^2}{c^2} x\right). \tag{5.5.11}$$

Dans la fonction de murmuration, $\widetilde{\Phi}$ est la transformée de Mellin de Φ. Cette valeur est en fait liée à normalisation par la taille de la famille. On a

$$\sum_{p\in I} \log p \sum_{f\in\mathcal{H}^\pm} \Phi\left(\frac{c(f)}{K}\right) \omega_f = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t^2)\,\mathrm{d}t \left(|I| + O\left(K^{1/2+\varepsilon}\right)\right) K^{\frac{1}{2}}$$

par le théorème des nombres premiers dans l'intervalle I, le terme d'erreur en $K^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ vient du fait que l'on suppose l'Hypothèse de Riemann.

Pour faire le lien entre densité de niveau 1 et murmurations, reprenons la contribution des premiers dans (5.1.1). Nous avons affirmé que le terme

$$-\frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_p \frac{\lambda_f(p)\log p}{\sqrt{p}} \widehat{\phi}\big(\frac{\log p}{\log \mathfrak{p}(f)}\big)$$

est celui qui permet de faire la différence entre $W_{\mathrm{SO(even)}}$ et $W_{\mathrm{SO(odd)}}$ lorsque le support de $\widehat{\phi}$ dépasse $[-1,1]$. On s'attend donc à avoir, en moyenne sur une famille de type orthogonal,

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}^\pm(Q)|} \sum_{f\in\mathcal{F}^\pm(Q)} -\frac{2}{\log \mathfrak{q}(f)} \sum_p \frac{\lambda_f(p)\log p}{\sqrt{p}} \widehat{\phi}\Big(\frac{\log p}{\log \mathfrak{q}(f)}\Big) = \pm\frac{1}{2} \int \widehat{\phi}(t)(\eta(t)-1)\,\mathrm{d}t,$$

où $\pm$ est le signe de l'équation fonctionnelle dans la famille. En prenant pour $\widehat{\phi}$ une fonction lisse approximant l'indicatrice d'un intervalle I très petit autour d'un réel $a \neq 1$, on s'attend donc à avoir

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{F}^\pm(Q)| \log Q} \sum_{f\in\mathcal{F}^\pm(Q)} \sum_{p\sim Q^a} \frac{\lambda_f(p)\log p}{\sqrt{p}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 1 \\ \pm\frac{1}{4} & \text{si } a > 1 \end{cases}.$$

Le terme de gauche de (5.5.10) est une version lisse de cette somme pour a très proche de 1.

Bibliographie

[AADKQH] Rebecca Abi Abdallah, Lucile Devin, Vivian Kuperberg, and Emily Quesada-Herrera. Correlations for weighted sums of two squares. en préparation.

[AK23] Miho Aoki and Shin-ya Koyama. Chebyshev's bias against splitting and principal primes in global fields. *J. Number Theory*, 245 :233–262, 2023.

[ANS14] Amir Akbary, Nathan Ng, and Majid Shahabi. Limiting distributions of the classical error terms of prime number theory. *Q. J. Math.*, 65(3) :743–780, 2014.

[Bai21] Alexandre Bailleul. Chebyshev's bias in dihedral and generalized quaternion Galois groups. *Algebra Number Theory*, 15(4) :999–1041, 2021.

[Bai22] Alexandre Bailleul. Explicit Kronecker-Weyl theorems and applications to prime number races. *Res. Number Theory*, 8(3) :34, 2022. Id/No 43.

[BBH+71] P. T. Bateman, J. W. Brown, R. S. Hall, K. E. Kloss, and R. M. Stemmler. Linear relations connecting the imaginary parts of the zeros of the zeta function. Computers in Number Theory, Proc. Atlas Sympos. No. 2, Oxford 1969, 11-19 (1971)., 1971.

[BBLLD26] J. Bober, A. R. Booker, M. Lee, and D. Lowry-Duda. Murmurations of modular forms in the weight aspect. *Algebra & Number Theory*, 20(2) :299–332, 2026.

[BCDT01] Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, and Richard Taylor. On the modularity of elliptic curves over Q : wild 3-adic exercises. *J. Am. Math. Soc.*, 14(4) :843–939, 2001.

[BCL23] Siegfred Baluyot, Vorrapan Chandee, and Xiannan Li. Low-lying zeros of a large orthogonal family of automorphic L-functions. Preprint, arXiv :2310.07606 [math.NT] (2023), 2023.

[BDKL24] Alexandre Bailleul, Lucile Devin, Daniel Keliher, and Wanlin Li. Exceptional biases in counting primes over function fields. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 109(3) :32, 2024. Id/No e12876.

[BFTB15] William D. Banks, Tristan Freiberg, and Caroline L. Turnage-Butterbaugh. Consecutive primes in tuples. *Acta Arith.*, 167(3) :261–266, 2015.

[BH25] Alexandre Bailleul and Mounir Hayani. Prime Ideal Races With Several Competitors. Preprint, arXiv :2508.04087 [math.NT] (2025), 2025.

[BKL+26] Claire Burrin, Vivian Kuperberg, Min Lee, Catinca Mujdei, and Hsin-Yi Yang. Murmurations in the depth aspect. Preprint, arXiv :2603.25564 [math.NT] (2026), 2026.

[BMP25] Kübra Benli, Greg Martin, and Paul Péringuey. Joint distributions of error terms for primes in arithmetic progressions modulo 11. Preprint, arXiv :2510.05427 [math.NT] (2025), 2025.

[BSD65] B. J. Birch and H. P. F. Swinnerton-Dyer. Notes on elliptic curves. II. *J. Reine Angew. Math.*, 218 :79–108, 1965.

[BT15] D. G. Best and T. S. Trudgian. Linear relations of zeroes of the zeta-function. *Math. Comput.*, 84(294) :2047–2058, 2015.

[BW00] Antal Balog and Trevor D. Wooley. Sums of two squares in short intervals. *Can. J. Math.*, 52(4) :673–694, 2000.

[CCM22] Emanuel Carneiro, Andrés Chirre, and Micah B. Milinovich. Hilbert spaces and low-lying zeros of L-functions. *Adv. Math.*, 410 :48, 2022. Id/No 108748.

[ČDF+25] Martin Čech, Lucile Devin, Daniel Fiorilli, Kaisa Matomäki, and Anders Södergren. Low-lying zeros in families of Maass form L-functions : an extended density theorem. Preprint, arXiv :2505.18712 [math.NT] (2025), 2025.

[CdFD26] Cruz Castillo, Alexandre de Faveri, and Alexander Dunn. Non-vanishing for quartic Hecke L-functions and ranks of elliptic curves. Preprint, arXiv :2604.01316 [math.NT] (2026), 2026.

[CDP] Sneha Chaubey, Lucile Devin, and Paul Péringuey. Comparative number theory for artin primes. en préparation.

[CFJ16] Byungchul Cha, Daniel Fiorilli, and Florent Jouve. Prime number races for elliptic curves over function fields. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(5) :1239–1277, 2016.

[CFJ17] Byungchul Cha, Daniel Fiorilli, and Florent Jouve. Independence of the zeros of elliptic curve L-functions over function fields. *Int. Math. Res. Not.*, 2017(9) :2614–2661, 2017.

[Cha08] Byungchul Cha. Chebyshev's bias in function fields. *Compos. Math.*, 144(6) :1351–1374, 2008.

[Che99] P.L. Chebyshev. *Oeuvres de P.L. Tchebychef*, volume I, chapter Lettre de M. le professeur Tchebychev à M. Fuss, sur le nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formes $4n + 1$ et $4n + 3$., pages 697–698. St. Petersbourg, Commissionaires de l'Academie imperiale des sciences, 1899.

[Cho65] Sarvadaman Chowla. The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.*, 38 :62–64, 1965.

[CLM26] Vorrapan Chandee, Xiannan Li, and Micah B. Milinovich. One-level densities of large even and odd orthogonal families of automorphic L-functions. Preprint, arXiv :2605.17012 [math.NT] (2026), 2026.

[Con05] Keith Conrad. Partial Euler products on the critical line. *Can. J. Math.*, 57(2) :267–297, 2005.

[DDFW26] Chantal David, Lucile Devin, Alessandro Fazzari, and Ezra Waxman. Average rank in a family of cm quartic twists. Preprint, arXiv :2608.06286 [math.NT] (2026), 2026.

[DDHL26] Chantal David, Alexander Dunn, Alia Hamieh, and Hua Lin. Quartic Gauss sums over primes and metaplectic theta functions. Preprint, arXiv :2306.11875 [math.NT] (2026), 2026.

[DDNS22] Chantal David, Lucile Devin, Jungbae Nam, and Jeremy Schlitt. Lemke Oliver and Soundararajan bias for consecutive sums of two squares. *Math. Ann.*, 384(3-4) :1181–1242, 2022.

[DDW26] Chantal David, Lucile Devin, and Ezra Waxman. One-level densities in families of Grössencharakters associated to CM elliptic curves. *Mathematika*, 72(1) :49, 2026. Id/No e70067.

[Del73] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. I. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 43 :273–307, 1973.

[Dev20a] Lucile Devin. Chebyshev's bias for analytic L-functions. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 169(1) :103–140, 2020.

[Dev20b] Lucile Devin. Limiting properties of the distribution of primes in an arbitrarily large number of residue classes. *Can. Math. Bull.*, 63(4) :837–849, 2020.

[Dev21] Lucile Devin. Erratum to : "Limiting properties of the distribution of primes in an arbitrarily large number of residue classes". *Can. Math. Bull.*, 64(4) :1041–1044, 2021.

[Dev26] Lucile Devin. Discrepancies in the distribution of Gaussian primes. *Math. Z.*, 312(1) :29, 2026. Id/No 31.

[DFI02] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec. The subconvexity problem for Artin L-functions. *Invent. Math.*, 149(3) :489–577, 2002.

[DFS22] Lucile Devin, Daniel Fiorilli, and Anders Södergren. Low-lying zeros in families of holomorphic cusp forms : the weight aspect. *Q. J. Math.*, 73(4) :1403–1426, 2022.

[DFS25] Lucile Devin, Daniel Fiorilli, and Anders Södergren. Extending the unconditional support in an Iwaniec-Luo-Sarnak family. *Algebra Number Theory*, 19(8) :1621–1635, 2025.

[Dia04] Adrian Diaconu. Mean square values of Hecke L-series formed with r-th order characters. *Invent. Math.*, 157(3) :635–684, 2004.

[DLR] Lucile Devin, Didier Lesesvre, and Emmanuel Royer. Murmurations for GL(2) in the weight aspect. en préparation.

[DM21] Lucile Devin and Xianchang Meng. Chebyshev's bias for products of irreducible polynomials. *Adv. Math.*, 392 :45, 2021. Id/No 108040.

[DPR23] Sary Drappeau, Kyle Pratt, and Maksym Radziwiłł. One-level density estimates for Dirichlet L-functions with extended support. *Algebra Number Theory*, 17(4) :805–830, 2023.

[DR24] Alexander Dunn and Maksym Radziwiłł. Bias in cubic Gauss sums : Patterson's conjecture. *Ann. Math. (2)*, 200(3) :967–1057, 2024.

[DS74] Pierre Deligne and Jean-Pierre Serre. Formes modulaires de poids 1. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 7 :507–530, 1974.

[Fel68] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I.* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, third edition, 1968.

[FI97] Étienne Fouvry and Henryk Iwaniec. Gaussian primes. *Acta Arith.*, 79(3) :249–287, 1997.

[FI98] John Friedlander and Henryk Iwaniec. The polynomial $X^2 + Y^4$ captures its primes. *Ann. Math. (2)*, 148(3) :945–1040, 1998.

[FI03] Étienne Fouvry and Henryk Iwaniec. Low-lying zeros of dihedral L-functions. *Duke Math. J.*, 116(2) :189–217, 2003.

[FI22] John Friedlander and Henryk Iwaniec. Coordinate distribution of Gaussian primes. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 24(3) :737–772, 2022.

[Fio14a] Daniel Fiorilli. Elliptic curves of unbounded rank and Chebyshev's bias. *Int. Math. Res. Not.*, 2014(18) :4997–5024, 2014.

[Fio14b] Daniel Fiorilli. Highly biased prime number races. *Algebra Number Theory*, 8(7) :1733–1767, 2014.

[FJ22] Daniel Fiorilli and Florent Jouve. Unconditional Chebyshev biases in number fields. *J. Éc. Polytech., Math.*, 9 :671–679, 2022.

[FJ24] Daniel Fiorilli and Florent Jouve. Distribution of Frobenius elements in families of Galois extensions. *J. Inst. Math. Jussieu*, 23(3) :1169–1258, 2024.

[FK02] Kevin Ford and Sergei Konyagin. The prime number race and zeros of L-functions off the critical line. *Duke Math. J.*, 113(2) :313–330, 2002.

[FK03] Kevin Ford and Sergei Konyagin. The prime number race and zeros of L-functions off the critical line. II. In *Proceedings of the session in analytic number theory and Diophantine equations held in Bonn, Germany, January–June, 2002*, page 40. Bonn : Univ. Bonn, Mathematisches Institut, 2003.

[FKR17] Tristan Freiberg, Pär Kurlberg, and Lior Rosenzweig. Poisson distribution for gaps between sums of two squares and level spacings for toral point scatterers. *Commun. Number Theory Phys.*, 11(4) :837–877, 2017.

[FL94] Aimé Fuchs and Giorgio Letta. Le problème du premier chiffre décimal pour les nombres premiers. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL, V. Ser., Mem. Mat.*, 18(1) :81–87, 1994.

[FLK13] Kevin Ford, Youness Lamzouri, and Sergei Konyagin. The prime number race and zeros of Dirichlet L-functions off the critical line. III. *Q. J. Math.*, 64(4) :1091–1098, 2013.

[FM13] Daniel Fiorilli and Greg Martin. Inequities in the Shanks-Rényi prime number race : an asymptotic formula for the densities. *J. Reine Angew. Math.*, 676 :121–212, 2013.

[FM15] Jesse Freeman and Steven J. Miller. Determining optimal test functions for bounding the average rank in families of L-functions. In *SCHOLAR – a scientific celebration highlighting open lines of arithmetic research. Conference in honour of M. Ram Murty's mathematical legacy on his 60th birthday, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Canada, October 15–17, 2013*, pages 97–116. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) ; Montreal : Centre de Recherches Mathématiques (CRM), 2015.

[FM23] Daniel Fiorilli and Greg Martin. Disproving Hooley's conjecture. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 25(12) :4791–4812, 2023.

[FPS16] Daniel Fiorilli, James Parks, and Anders Södergren. Low-lying zeros of elliptic curve L-functions : beyond the ratios conjecture. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 160(2) :315–351, 2016.

[FPS17] Daniel Fiorilli, James Parks, and Anders Södergren. Low-lying zeros of quadratic Dirichlet L -functions : lower order terms for extended support. *Compos. Math.*, 153(6) :1196–1216, 2017.

[FS10] Kevin Ford and Jason Sneed. Chebyshev's bias for products of two primes. *Exp. Math.*, 19(4) :385–398, 2010.

[FSZ09] Kevin Ford, Kannan Soundararajan, and Alexandru Zaharescu. On the distribution of imaginary parts of zeros of the Riemann zeta function. II. *Math. Ann.*, 343(3) :487–505, 2009.

[GM84] Rajiv Gupta and M. Ram Murty. A remark on Artin's conjecture. *Invent. Math.*, 78 :127–130, 1984.

[GM06] Andrew Granville and Greg Martin. Prime number races. *Am. Math. Mon.*, 113(1) :1–33, 2006.

[GMP25] Leo Goldmakher, Greg Martin, and Paul Péringuey. Refinements of Artin's primitive root conjecture. Preprint, arXiv :2502.19601 [math.NT] (2025), 2025.

[Gol79] Dorian Goldfeld. Conjectures on elliptic curves over quadratic fields. In *Number theory, Carbondale 1979 (Proc. Southern Illinois Conf., Southern Illinois Univ., Carbondale, Ill., 1979)*, volume 751 of *Lecture Notes in Math.*, pages 108–118. Springer, Berlin, 1979.

[Gor23] Ofir Gorodetsky. Sums of two squares are strongly biased towards quadratic residues. *Algebra Number Theory*, 17(3) :775–804, 2023.

[GZ86] Benedict H. Gross and Don B. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. *Invent. Math.*, 84 :225–320, 1986.

[Hay25] Mounir Hayani. On the influence of the Galois group structure on the Chebyshev bias in number fields. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 153(3) :793–829, 2025.

[Hay26] Mounir Hayani. Chebyshev's bias without linear independence. Preprint, arXiv :2512.23302 [math.NT] (2026), 2026.

[HB86] D. R. Heath-Brown. Artin's conjecture for primitive roots. *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.*, 37 :27–38, 1986.

[HB04] D. R. Heath-Brown. The average analytic rank of elliptic curves. *Duke Math. J.*, 122(3) :591–623, 2004.

[HBL17] D. R. Heath-Brown and Xiannan Li. Prime values of $a^2 + p^4$. *Invent. Math.*, 208(2) :441–499, 2017.

[HBP79] D. R. Heath-Brown and S. J. Patterson. The distribution of Kummer sums at prime arguments. *J. Reine Angew. Math.*, 310 :111–130, 1979.

[Hec18] E. Hecke. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I. *Math. Z.*, 1 :357–376, 1918.

[Hec20] E. Hecke. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. II. *Math. Z.*, 1 :357–376, 1920.

[HL94] Jeffrey Hoffstein and Paul Lockhart. Coefficients of Maass forms and the Siegel zero. Appendix : An effective zero-free region, by Dorian Goldfeld, Jeffrey Hoffstein and Daniel Lieman. *Ann. Math. (2)*, 140(1) :161–176, appendix 177–181, 1994.

[HLOP25] Yang-Hui He, Kyu-Hwan Lee, Thomas Oliver, and Alexey Pozdnyakov. Murmurations of elliptic curves. *Exp. Math.*, 34(3) :528–540, 2025.

[HNR09] Everett W. Howe, Enric Nart, and Christophe Ritzenthaler. Jacobians in isogeny classes of abelian surfaces over finite fields. *Ann. Inst. Fourier*, 59(1) :239–289, 2009.

[Hol25] Kristian Holm. The 1-level density for zeros of Hecke L-functions of imaginary quadratic number fields of class number 1. *J. Théor. Nombres Bordx.*, 37(1) :237–283, 2025.

[Hoo67] Christopher Hooley. On Artin's conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 225 :209–220, 1967.

[Hoo71] Christopher Hooley. On the intervals between numbers that are sums of two squares. *Acta Math.*, 127 :279–297, 1971.

[HR03] C. P. Hughes and Z. Rudnick. Linear statistics of low-lying zeros of L-functions. *Q. J. Math.*, 54(3) :309–333, 2003.

[Hum10] Peter Humphries. The Summatory Function of Liouville's Function and Pólya's Conjecture. `https://sites.google.com/view/peterhumphries/the-summatory-function-of-liouvilles-function-and-pólyas-conjecture`, October 2010. Honours thesis.

[IK04] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *Colloq. Publ., Am. Math. Soc.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2004.

[ILS00] Henryk Iwaniec, Wenzhi Luo, and Peter Sarnak. Low lying zeros of families of L-functions. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 91 :55–131, 2000.

[Ing42] A. E. Ingham. On two conjectures in the theory of numbers. *Am. J. Math.*, 64 :313–319, 1942.

[Iwa90] Henryk Iwaniec. Small eigenvalues of Laplacian for $\Gamma_0(N)$. *Acta Arith.*, 56(1) :65–82, 1990.

[Iwa97] Henryk Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI : American Mathematical Society, 1997.

[Jou09] Florent Jouve. Maximal Galois group of L-functions of elliptic curves. *Int. Math. Res. Not.*, 2009(19) :3557–3594, 2009.

[Kac95] Jerzy Kaczorowski. On the distribution of primes $\pmod 4$. *Analysis*, 15(2) :159–171, 1995.

[KK22] Shin-Ya Koyama and Nobushige Kurokawa. Chebyshev's bias for Ramanujan's τ-function via the deep Riemann hypothesis. *Proc. Japan Acad., Ser. A*, 98(6) :35–39, 2022.

[KK23] Ikuya Kaneko and Shin-Ya Koyama. A new aspect of Chebyshev's bias for elliptic curves over function fields. *Proc. Am. Math. Soc.*, 151(12) :5059–5068, 2023.

[KK24] Noam Kimmel and Vivian Kuperberg. Consecutive runs of sums of two squares. *J. Number Theory*, 264 :135–147, 2024.

[KK25] Noam Kimmel and Vivian Kuperberg. Positive density for consecutive runs of sums of two squares. *J. Inst. Math. Jussieu*, 24(5) :1995–2046, 2025.

[KL13] A. Knightly and C. Li. *Kuznetsov's trace formula and the Hecke eigenvalues of Maass forms*, volume 1055 of *Mem. Am. Math. Soc.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2013.

[KL25] C. I. Kuan and D. Lesesvre. Murmurations using Petersson trace formula, July 2025. arXiv :2507.11418.

[Kol89] V. A. Kolyvagin. Finiteness of $E(\mathbb{Q})$ and $\mathrm{Sh}(E, \mathbb{Q})$ for a subclass of Weil curves. *Math. USSR, Izv.*, 32(3) :523–541, 1989.

[Kou19] Dimitris Koukoulopoulos. *The distribution of prime numbers*, volume 203 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2019.

[Kow08] Emmanuel Kowalski. The large sieve, monodromy, and zeta functions of algebraic curves. II : Independence of the zeros. *Int. Math. Res. Not.*, 2008 :57, 2008. Id/No rnn091.

[Kow21] Emmanuel Kowalski. *An introduction to probabilistic number theory*, volume 192 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge : Cambridge University Press, 2021.

[KP99] Jerzy Kaczorowski and Alberto Perelli. The Selberg class : A survey. In *Number theory in progress. Proceedings of the international conference organized by the Stefan Banach International Mathematical Center in honor of the 60th birthday of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland, June 30–July 9, 1997. Volume 2 : Elementary and analytic number theory*, pages 953–992. Berlin : de Gruyter, 1999.

[KP23] Makoto Kawashima and Anthony Poëls. Padé approximation for a class of hypergeometric functions and parametric geometry of numbers. *J. Number Theory*, 243 :646–687, 2023.

[KR03] Jerzy Kaczorowski and Olivier Ramaré. Almost periodicity of some error terms in prime number theory. *Acta Arith.*, 106(3) :277–297, 2003.

[KS99] Nicholas M. Katz and Peter Sarnak. *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, volume 45 of *Colloq. Publ., Am. Math. Soc.* Providence, RI : American Mathematical Society, 1999.

[KS03] Henry H. Kim and Peter Sarnak. Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1) :175–181, 2003. Appendix to H. H. Kim, Functoriality for the exterior square of GL4 and the symmetric fourth of GL2.

[KT62] S. Knapowski and P. Turán. Comparative prime-number theory. I. Introduction. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 13 :299–314, 1962.

[Lam13] Youness Lamzouri. Prime number races with three or more competitors. *Math. Ann.*, 356(3) :1117–1162, 2013.

[Lan08] Edmund Landau. On the partition of positive integers in four classes according to the minimal number of squares needed to their additive composition. *Arch. der Math. u. Phys. (3)*, 13 :305–312, 1908.

[Lem00] Franz Lemmermeyer. *Reciprocity laws. From Euler to Eisenstein.* Springer Monogr. Math. Berlin : Springer, 2000.

[Li18] Wanlin Li. Vanishing of hyperelliptic L-functions at the central point. *J. Number Theory*, 191 :85–103, 2018.

[Lit14] J. E. Littlewood. Sur la distribution des nombres premiers. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 158 :1869–1872, 1914.

[LL62] Derrick H. Lehmer and Emma Lehmer. Heuristics, anyone ? Stud. Math. Anal. related Topics, Essays in Honor of G. Pólya, 202-210 (1962)., 1962.

[LMF] The LMFDB Collaboration. The L-functions and modular forms database. [Online ; accessed April 2021].

[LMP19] Jared Duker Lichtman, Greg Martin, and Carl Pomerance. Primes in prime number races. *Proc. Am. Math. Soc.*, 147(9) :3743–3757, 2019.

[LOS16] R. J. Lemke Oliver and K. Soundararajan. Unexpected biases in the distribution of consecutive primes. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 113(31) :E4446–E4454, 2016.

[LR15] Xiannan Li and Maksym Radziwiłł. The Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions. *Int. Math. Res. Not.*, 2015(2) :325–354, 2015.

[LSX20] Peter Cho-ho Lam, Damaris Schindler, and Stanley Yao Xiao. On prime values of binary quadratic forms with a thin variable. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 102(2) :749–772, 2020.

[May16] James Maynard. Dense clusters of primes in subsets. *Compos. Math.*, 152(7) :1517–1554, 2016.

[Maz08] Barry Mazur. Finding meaning in error terms. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 45(2) :185–228, 2008.

[Men18] Xianchang Meng. Chebyshev's bias for products of k primes. *Algebra Number Theory*, 12(2) :305–341, 2018.

[Mil04] Steven J. Miller. One- and two-level densities for rational families of elliptic curves : evidence for the underlying group symmetries. *Compos. Math.*, 140(4) :952–992, 2004.

[Mil09] Steven J. Miller. An orthogonal test of the L-functions ratios conjecture. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 99(2) :484–520, 2009.

[MN13] Greg Martin and Nathan Ng. Nonzero values of Dirichlet L-functions in vertical arithmetic progressions. *Int. J. Number Theory*, 9(4) :813–843, 2013.

[MN20] Greg Martin and Nathan Ng. Inclusive prime number races. *Trans. Am. Math. Soc.*, 373(5) :3561–3607, 2020.

[Mon73] H. L. Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. Analytic Number Theory, Proc. Sympos. Pure Math. 24, St. Louis Univ. Missouri 1972, 181-193 (1973)., 1973.

[Mor12] Pieter Moree. Artin's primitive root conjecture – a survey. *Integers*, 12(6) :1305–1416, a13, 2012.

[MS04] Hugh L. Montgomery and K. Soundararajan. Primes in short intervals. *Commun. Math. Phys.*, 252(1-3) :589–617, 2004.

[Mur88] M. Ram Murty. Artin's conjecture for primitive roots. *Math. Intell.*, 10(4) :59–67, 1988.

[MW89] C. Moeglin and J.-L. Waldspurger. Le spectre résiduel de GL(n). (The residual spectrum for GL(n)). *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 22(4) :605–674, 1989.

[MYB+25] Greg Martin, Pu Justin Scarfy Yang, Aram Bahrini, Prajeet Bajpai, Kübra Benli, Jenna Downey, Yuan Yuan Li, Xiaoxuan Liang, Amir Parvardi, Reginald Simpson, Ethan Patrick White, and Chi Hoi Yip. An annotated bibliography for comparative prime number theory. *Expo. Math.*, 43(3) :124, 2025. Id/No 125644.

[Ng00] Nathan Ng. *Limiting distributions and zeros of Artin L-functions*. PhD thesis, University of British Colombia, 2000.

[NT19] Nathan Ng and Mark Thom. Bounds and conjectures for additive divisor sums. *Funct. Approximatio, Comment. Math.*, 60(1) :97–142, 2019.

[Odl87] A. M. Odlyzko. On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. *Math. Comput.*, 48 :273–308, 1987.

[ÖS93] Ali E. Özlük and C. Snyder. Small zeros of quadratic L-functions. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 47(2) :307–319, 1993.

[PAR25] *PARI/GP version `2.18.1`*. Univ. Bordeaux, 2025. The PARI Group, available from `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

[Pat78] Samuel J. Patterson. On the distribution of Kummer sums. *J. Reine Angew. Math.*, 303/304 :126–143, 1978.

[Per24] Paul Peringuey. On a generalization of Artin's conjecture among almost primes. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 152(3) :377–442, 2024.

[PG20] Corentin Perret-Gentil. Roots of L-functions of characters over function fields, generic linear independence and biases. *Algebra Number Theory*, 14(5) :1291–1329, 2020.

[Por20] Samuel Porritt. Character sums over products of prime polynomials. Preprint, arXiv :2003.12002 [math.NT] (2020), 2020.

[Pra20] Kyle Pratt. Primes from sums of two squares and missing digits. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 120(6) :770–830, 2020.

[Rie65] G. J. Rieger. Über die Anzahl der als Summe von zwei Quadraten darstellbaren und in einer primen Restklasse gelegenen Zahlen unterhalb einer positiven Schranke. II. *J. Reine Angew. Math.*, 217 :200–216, 1965.

[Ros02] Michael Rosen. *Number theory in function fields*, volume 210 of *Grad. Texts Math.* New York, NY : Springer, 2002.

[RR10] Guillaume Ricotta and Emmanuel Royer. Lower order terms for the one-level densities of symmetric power L-functions in the level aspect. *Acta Arith.*, 141(2) :153–170, 2010.

[RR11] Guillaume Ricotta and Emmanuel Royer. Statistics for low-lying zeros of symmetric power L-functions in the level aspect. *Forum Math.*, 23(5) :969–1028, 2011.

[RS94] Michael Rubinstein and Peter Sarnak. Chebyshev's bias. *Exp. Math.*, 3(3) :173–197, 1994.

[RS96] Zeév Rudnick and Peter Sarnak. Zeros of principal L-functions and random matrix theory. volume 81, pages 269–322. 1996.

[Rud10] Zeév Rudnick. Traces of high powers of the Frobenius class in the hyperelliptic ensemble. *Acta Arith.*, 143(1) :81–99, 2010.

[RW19] Zeév Rudnick and Ezra Waxman. Angles of Gaussian primes. *Isr. J. Math.*, 232(1) :159–199, 2019.

[Sar07] P. Sarnak. Letter to : Barry Mazur on "Chebyshev's bias" for $\tau(p)$, 2007.

[Sar08] P. Sarnak. Definition of families of L-functions. unpublished, 2008.

[Sar23] P. Sarnak. Letter to Drew and Nina on murmurations, 2023.

[Sch] Frobenius–Schur indicator on wikipedia.

[Sch23] Jeremy Schlitt. Biases Towards the Zero Residue Class for Quadratic Forms in Arithmetic Progressions. Preprint, arXiv :2308.13959 [math.NT] (2023), 2023.

[SD16] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.3)*, 2016. `http://www.sagemath.org`.

[Sel43] Atle Selberg. On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes. *Arch. Math. Naturvid.*, 47(6) :1–19, 1943.

[She25] Arshay Sheth. Euler products at the centre and applications to Chebyshev's bias. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 179(2) :331–349, 2025.

[Shi00] D. K. L. Shiu. Strings of congruent primes. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 61(2) :359–373, 2000.

[Smi25] Alexander Smith. The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture implies Goldfeld's conjecture. Preprint, arXiv :2503.17619 [math.NT] (2025), 2025.

[Smi26a] Alexander Smith. The distribution of ℓ^∞-Selmer groups in degree ℓ twist families. I. *J. Am. Math. Soc.*, 39(1) :1–72, 2026.

[Smi26b] Alexander Smith. The distribution of ℓ^∞-Selmer groups in degree ℓ twist families. II. *J. Am. Math. Soc.*, 39(2) :453–514, 2026.

[SST16] Peter Sarnak, Sug Woo Shin, and Nicolas Templier. Families of L-functions and their symmetry. In *Families of automorphic forms and the trace formula. Proceedings of the Simons symposium, Puerto Rico, January 26 – February 1, 2014*, pages 531–578. Cham : Springer, 2016.

[Suz83] Toshiaki Suzuki. Some results on the coefficients of the biquadratic theta series. *J. Reine Angew. Math.*, 340 :70–117, 1983.

[Suz25] Masatoshi Suzuki. On variants of Chebyshev's conjecture. *Ramanujan J.*, 68(4) :31, 2025. Id/No 95.

[Ten15] Gérald Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory. Transl. from the 3rd French edition by Patrick D. F. Ion*, volume 163 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 3rd expanded ed. edition, 2015.

[TW95] Richard Taylor and Andrew Wiles. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Ann. Math. (2)*, 141(3) :553–572, 1995.

[Viv04] Filippo Viviani. Ramification groups and Artin conductors of radical extensions of $\mathbb{Q}$. *J. Théor. Nombres Bordx.*, 16(3) :779–816, 2004.

[Wat69] William C. Waterhouse. Abelian varieties over finite fields. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 2 :521–560, 1969.

[Wax21] Ezra Waxman. Lower order terms for the one-level density of a symplectic family of Hecke L-functions. *J. Number Theory*, 221 :447–483, 2021.

[Wei48] André Weil. *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, volume 7 of *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*. Hermann, Paris, 1948.

[Wil95] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Ann. Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.

[Win41] Aurel Wintner. On the distribution function of the remainder term of the prime number theorem. *Am. J. Math.*, 63 :233–248, 1941.

[You06] Matthew P. Young. Low-lying zeros of families of elliptic curves. *J. Am. Math. Soc.*, 19(1) :205–250, 2006.

[Zub25] Nina Zubrilina. Murmurations. *Invent. Math.*, 241(3) :627–680, 2025.

Résumé

L'objet principal de ce mémoire est l'utilisation de la formule explicite de fonctions L. C'est une formule centrale de la théorie analytique des nombres qui grâce à l'analyse complexe permet de lier des propriétés des nombres premiers aux propriétés de répartition des points d'annulation de certaines fonctions définies sur le plan complexe : les fonctions L. Cette formule peut être lue dans un sens donnant des informations sur les premiers à l'aide d'information sur les zéros, tel que présenté dans la première partie qui traire de théorie comparative des nombres et se base sur l'hypothèse de Riemann et des hypothèses sur les relations diophantiennes entre les zéros. Dans l'autre sens, on étudie dans la seconde partie la loi de répartition des zéros de fonctions L grâce à de bonnes estimations de sommes de nombres premiers. On observe à chaque fois que le comportement des carrés de nombres premiers joue un rôle prépondérant dans la compréhension des phénomènes sous-jacents.