

Particules classiques et quantiques en interaction avec leur environnement : analyse de stabilité et problèmes asymptotiques

Soutenance de thèse de Léo Vivion

Sous la direction de Thierry Goudon

Mardi 8 septembre 2020, Laboratoire J.A. Dieudonné, Nice



Le problème de la modélisation d'effets dissipatifs au niveau quantique

- ▶ Une équation dissipative au niveau classique :

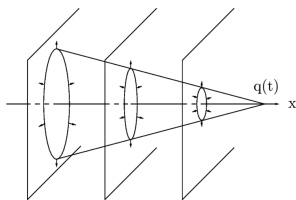
$$\ddot{q}(t) = -\nabla_x V(q(t)) - \gamma \dot{q}(t), \quad \gamma > 0.$$

- ▶ Le problème au niveau quantique : la procédure de quantification nécessite l'existence d'un hamiltonien.
- ▶ Intérêt d'avoir des modèles de dissipations quantiques : 1) tester la validité de la MQ à des échelles macroscopiques 2) étudier certains phénomènes de dissipation classique à basse température (supraconducteur) 3) ...
- ▶ Une solution proposée par A.O. Caldeira et A.J. Leggett (1982) : *[We] regard the "system" and its environment as together forming a closed system (the "universe") which can be described by a Lagrangian or Hamiltonian [...]. In this picture **the phenomenon of dissipation is simply the transfer of energy from the single degree of freedom characterising the "system" to the very complex set of degrees of freedom describing the "environment"**; it is implicitly assumed that the energy, once transferred, effectively disappears into the environment and is not recovered within any time of physical interest.*
- ▶ Le modèle de L. Bruneau et S. De Bièvre (2000) : permet d'obtenir de la friction linéaire.

Le modèle de L. Bruneau et S. de Bièvre

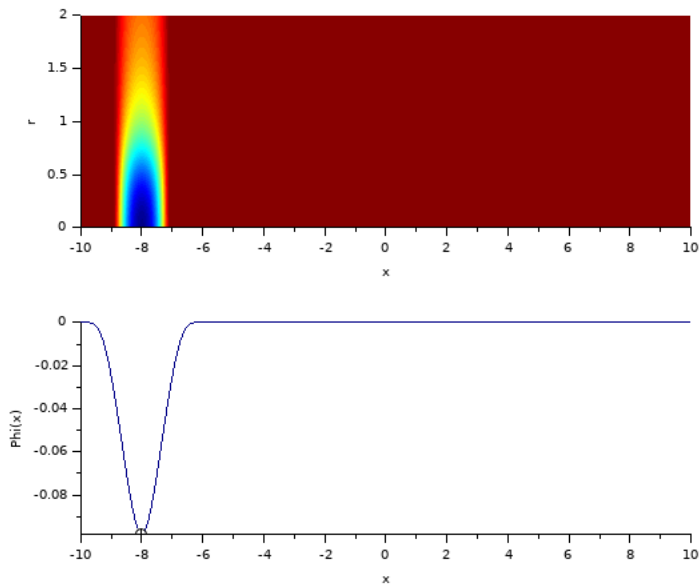
$$(\text{BdB})_{\lambda, c} \begin{cases} (\partial_{tt}^2 - c^2 \Delta_z) \psi(t, x, z) = -\lambda^2 \sigma_2(z) \sigma_1(x - q(t)) \\ \Phi[\psi](t, x) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n} \sigma_1(x - y) \sigma_2(z) \psi(t, y, z) dy dz \\ \ddot{q}(t) = -\nabla_x V(q(t)) - \nabla_x \Phi[\psi](t, q(t)) \end{cases}$$

- ▶ $\psi = \psi(t, x, z)$ avec $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) représente l'état du milieu.
- ▶ $q = q(t) \in \mathbb{R}_x^d$ représente la position de la particule.

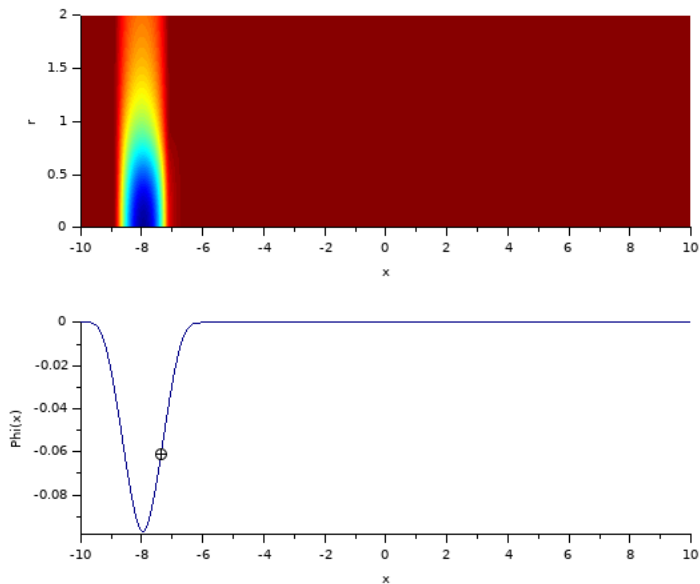


- ▶ $\sigma_1 = \sigma_1(x)$ et $\sigma_2 = \sigma_2(z)$ sont des fonctions C^∞ à support compact, positives et radiales telles que leur profil radial soit décroissant. Elles représentent les "zones" d'interaction entre la particule et le milieu.
- ▶ c est la vitesse de propagation des ondes transversales.
- ▶ λ est un paramètre du système. Dans la suite les cas $\lambda \sim 1$ et $\lambda \sim c$ seront étudiés.

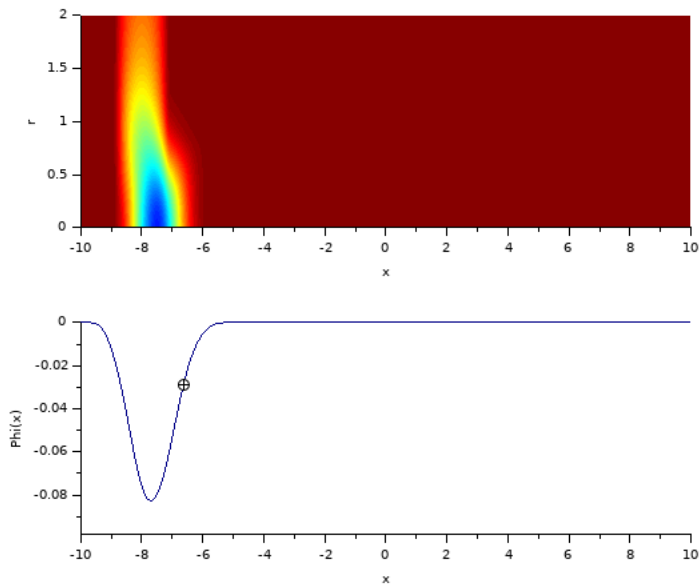
Un exemple de dynamique



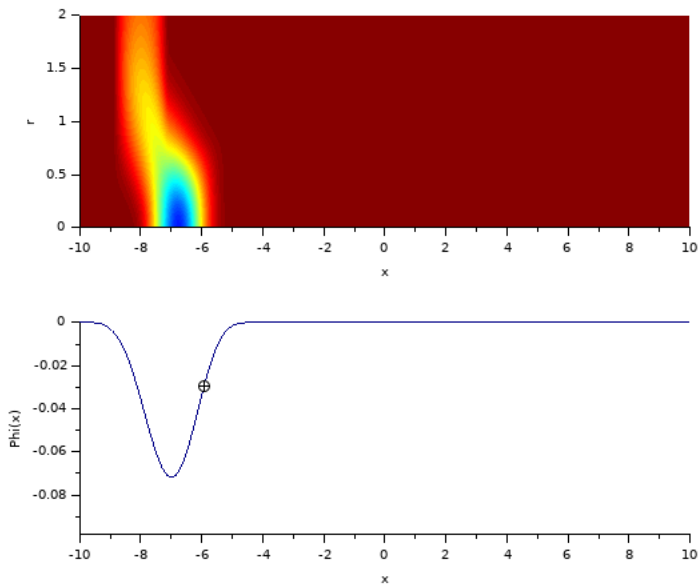
Un exemple de dynamique



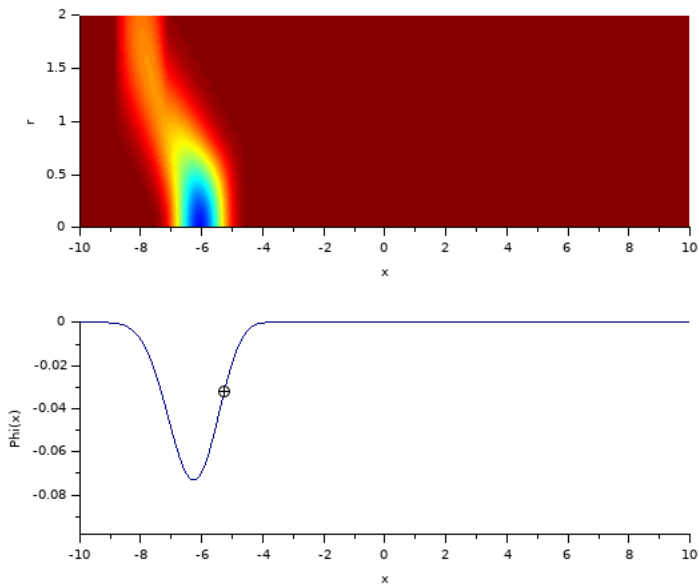
Un exemple de dynamique



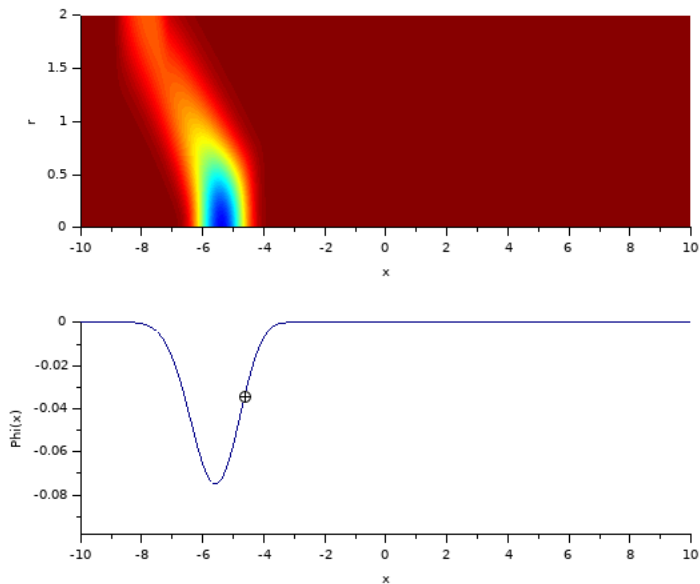
Un exemple de dynamique



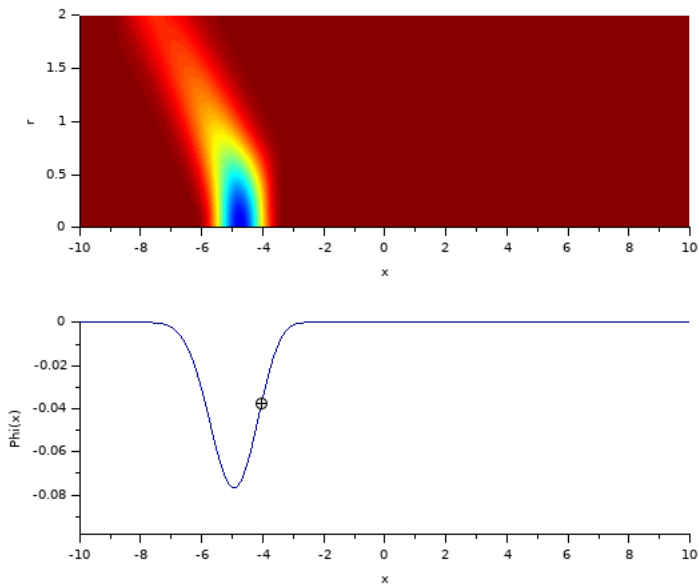
Un exemple de dynamique



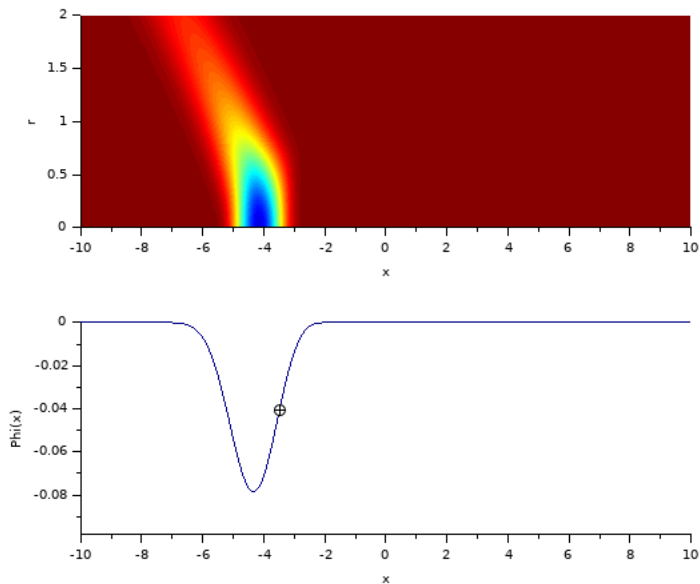
Un exemple de dynamique



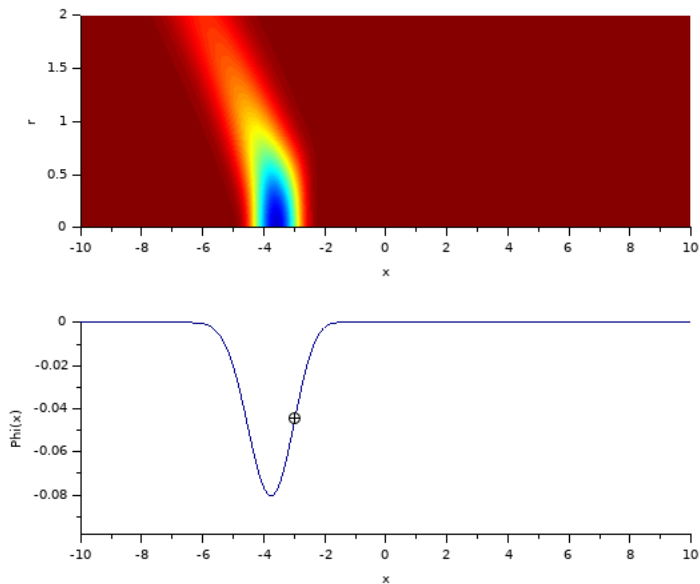
Un exemple de dynamique



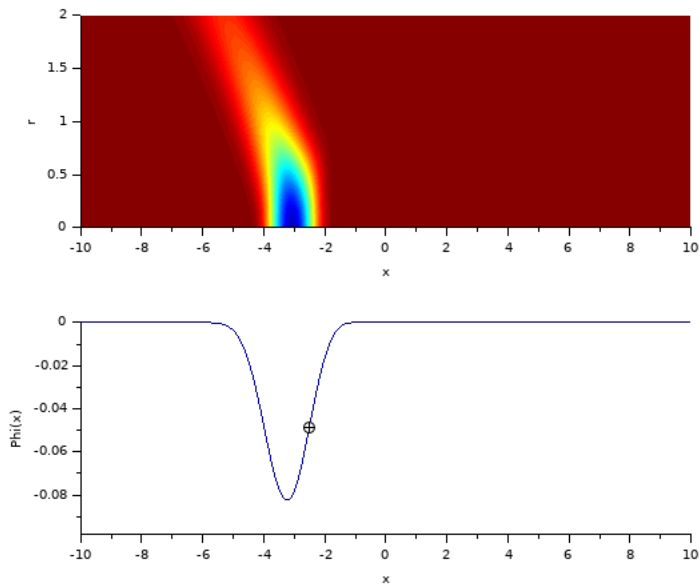
Un exemple de dynamique



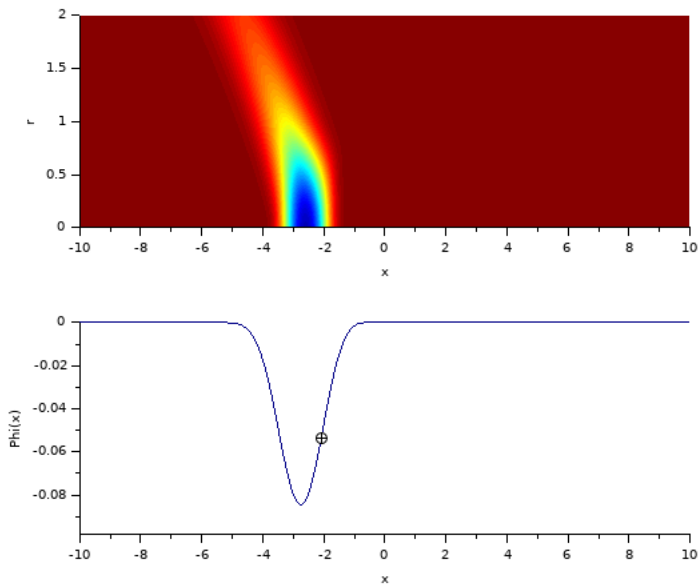
Un exemple de dynamique



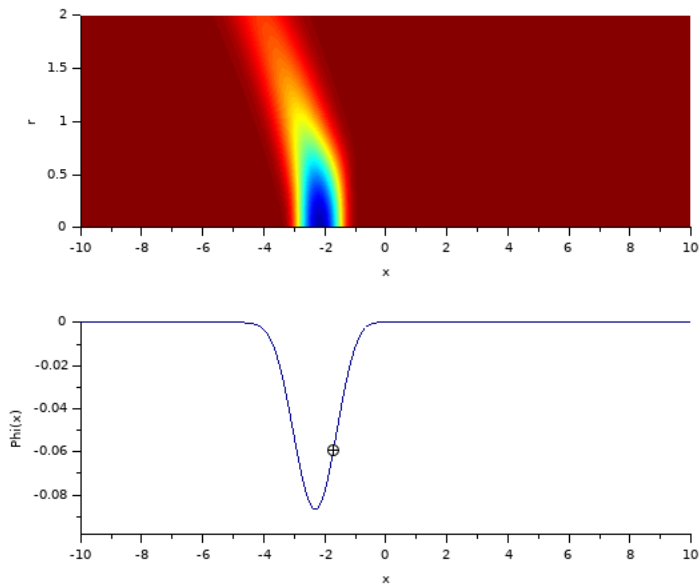
Un exemple de dynamique



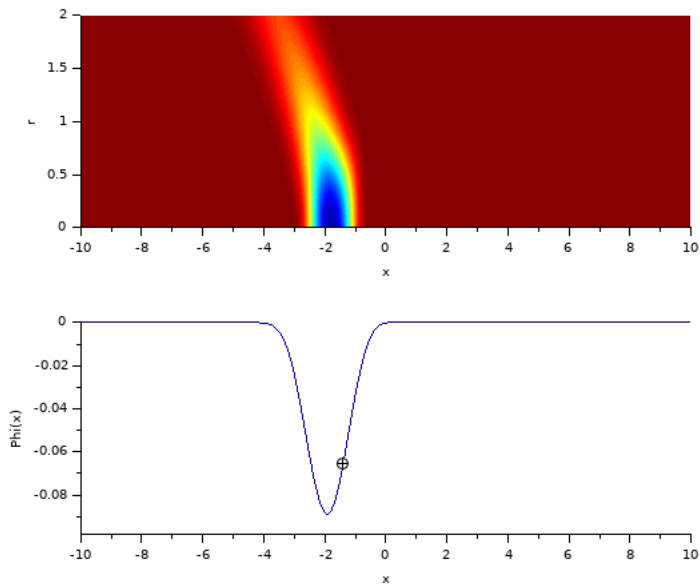
Un exemple de dynamique



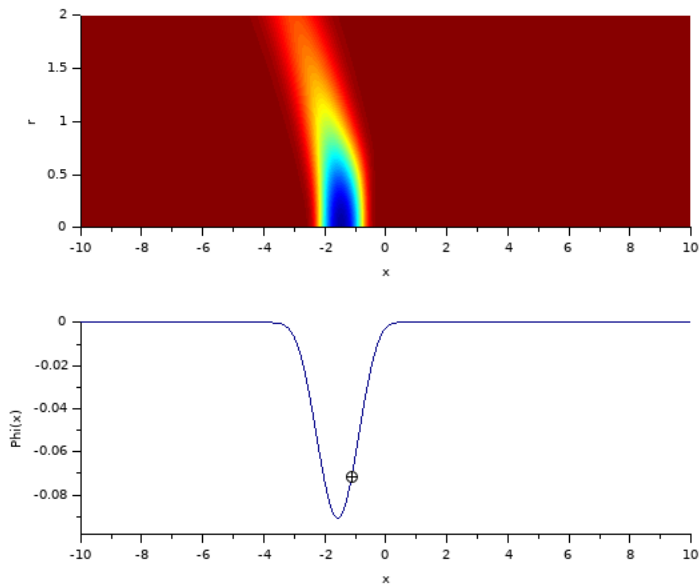
Un exemple de dynamique



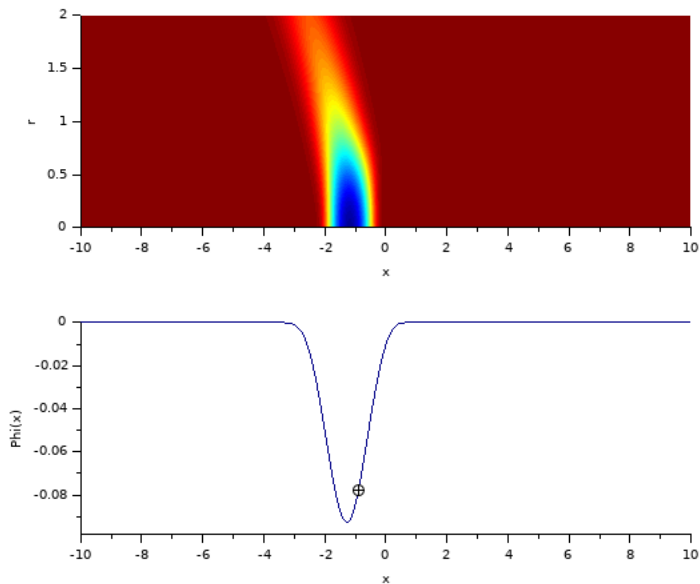
Un exemple de dynamique



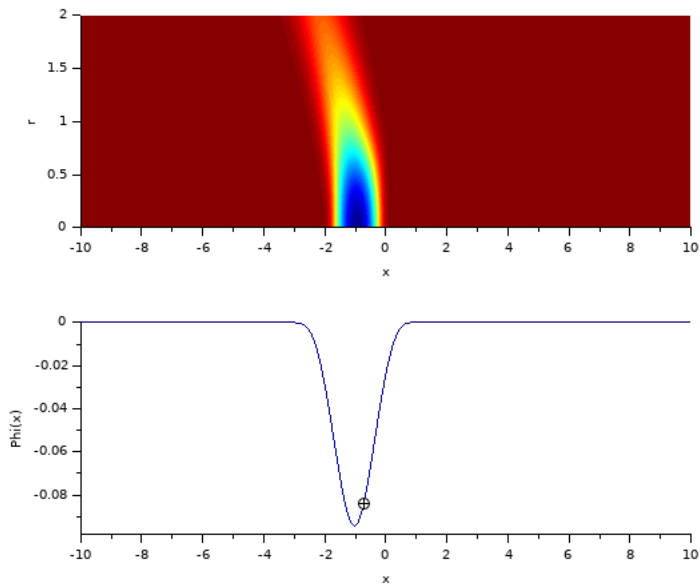
Un exemple de dynamique



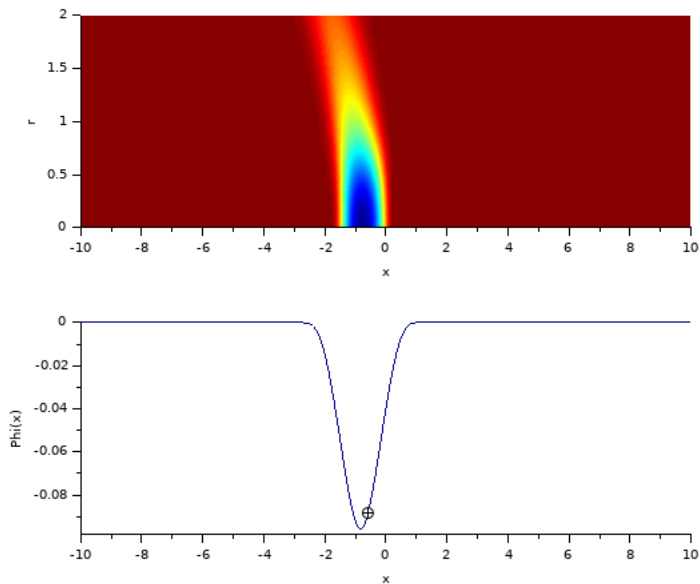
Un exemple de dynamique



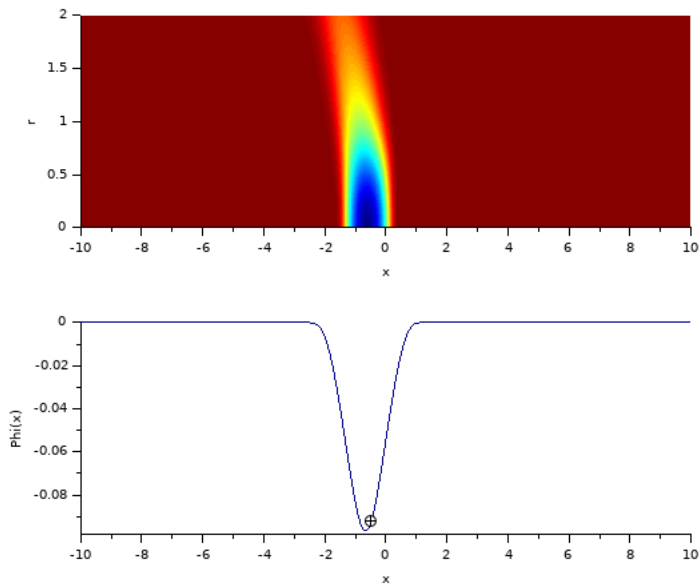
Un exemple de dynamique



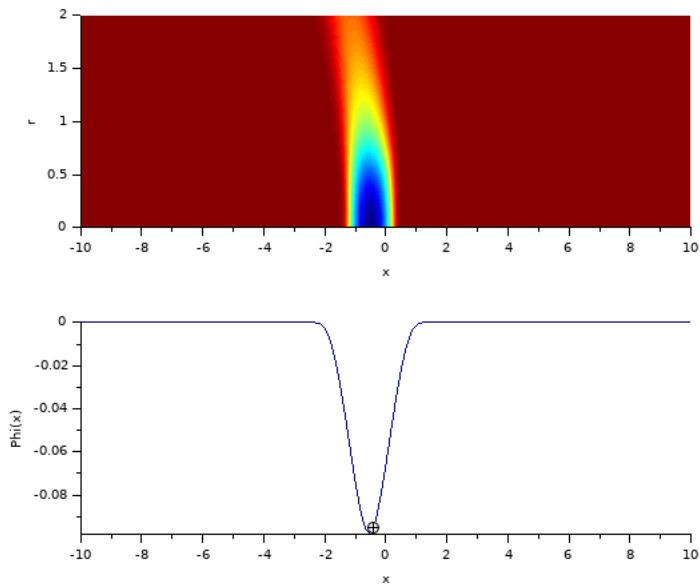
Un exemple de dynamique



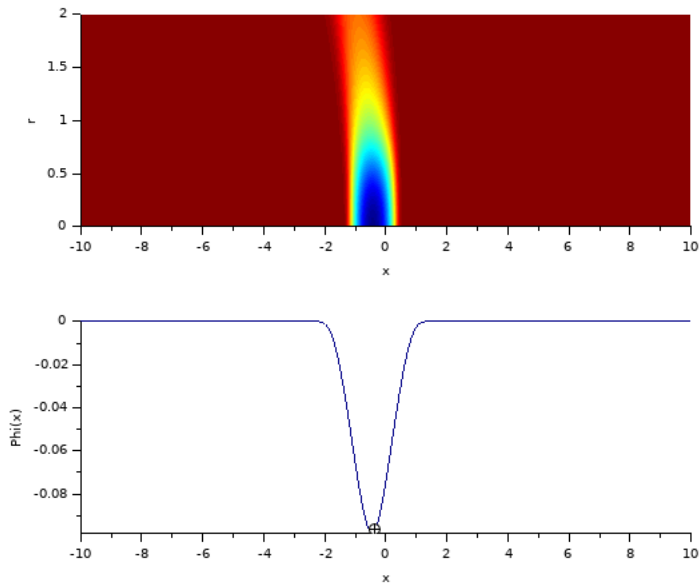
Un exemple de dynamique



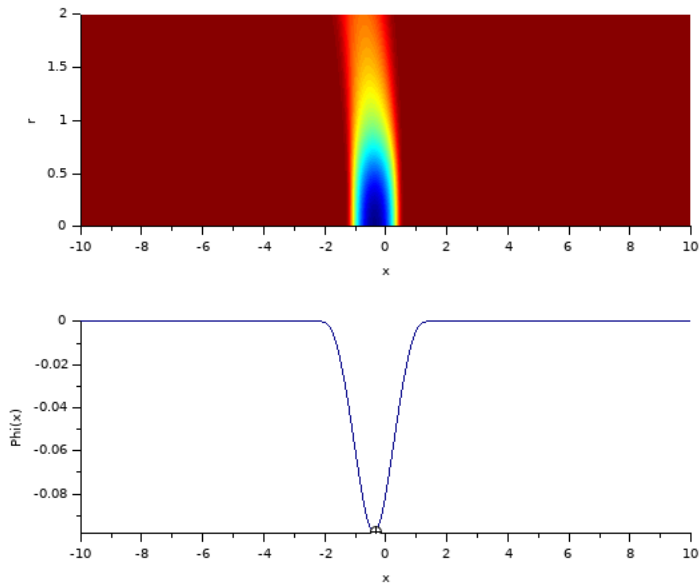
Un exemple de dynamique



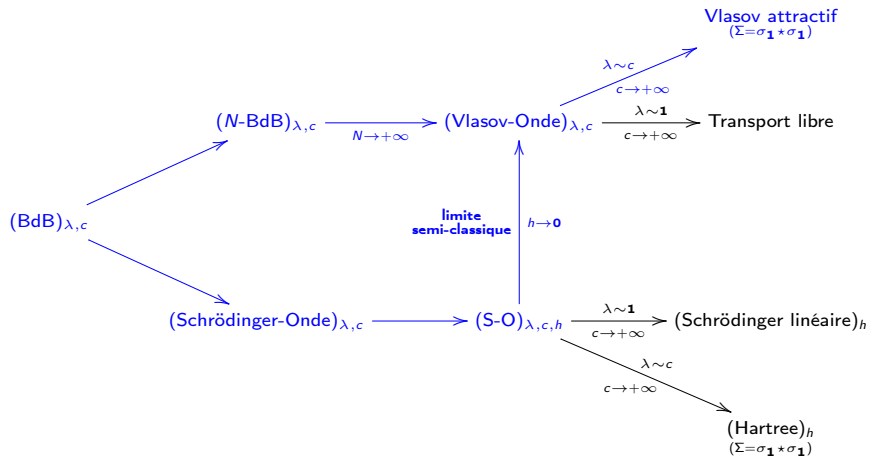
Un exemple de dynamique



Un exemple de dynamique



Une vue d'ensemble des modèles dérivant de (BdB)



Questions abordées

Question 1. L'asymptotique $\lambda \sim c$, $c \rightarrow +\infty$ conduisant vers Vlasov attractif ou Hartree attractif suggère que (V-O) et (S-O) admettent des solutions stationnaires. Est-ce le cas ? Ces solutions sont elles stables ? En quel sens ?

Question 2. Est-il possible de comparer le "déplacement" d'une solution stationnaire stable de (V-O) ou (S-O) auquel on aurait donné une impulsion au déplacement d'une particule classique de (BdB) ? Est-il possible de justifier un effet de friction du milieu sur la solution stationnaire stable ?

Question 3. Les fonctions spatialement homogènes sont des solutions stationnaires de (V-O). L'asymptotique avec Vlasov attractif amène à se poser la question de l'amortissement Landau. Est-ce que l'interaction avec le milieu change la géométrie des équilibres stables ? Est-ce qu'elle permet d'obtenir de meilleurs taux de convergence ? ou est-ce que au contraire les taux sont dégradés ?

I- Existence et stabilité orbitale d'ondes solitaires pour le système Schrödinger-Onde

Le système Schrödinger-Onde

$$(S-O) \begin{cases} (\partial_{tt}^2 - c^2 \Delta_z) \psi(t, x, z) = -c^2 \sigma_2(z) \sigma_1 \star_x |u(t, \cdot)|^2(x) \\ (i\partial_t + \frac{1}{2} \Delta_x) u(t, x) = \left(\sigma_1 \star_x \int \sigma_2(z) \psi(t, \cdot, z) dz \right)(x) u(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{et} \quad (\psi(0, x, z), \partial_t \psi(0, x, z)) = (\psi_0(x, z), \psi_1(x, z)) \end{cases}$$

Théorème. Pour tout $u_0 \in H_x^1$ et $(\psi_0, \psi_1) \in L_x^2 \dot{H}_z^1 \times L_x^2 L_z^2$, (S-O) admet une unique solution globale (u, ψ) dans

$$C^0(\mathbb{R}_+; H_x^1) \times \left(C^0(\mathbb{R}_+; L_x^2 \dot{H}_z^1) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L_x^2 L_z^2) \right).$$

De plus cette solution est telle que

- ▶ (conservation de la masse) $\|u(t)\|_{L_x^2}^2 = \|u_0\|_{L_x^2}^2$
- ▶ (conservation de l'énergie) $\mathcal{E}(t) = E(u(t), \psi(t), \partial_t \psi(t)) = \mathcal{E}(0)$ avec

$$E(u, \psi, \chi) = \frac{1}{2} \|\nabla_x u\|_{L_x^2}^2 + \int \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2 \psi dz \right) |u|^2 dx + \frac{1}{2} \|\nabla_z \psi\|_{L_x^2 L_z^2}^2 + \frac{1}{2c^2} \|\chi\|_{L_x^2 L_z^2}^2$$

- ▶ (conservation de l'impulsion) $\mathcal{P}(t) = P(u(t), \psi(t), \partial_t \psi(t)) = \mathcal{P}(0)$ avec

$$P(u, \psi, \chi) = \text{Im} \int \nabla_x u \bar{u} dx - \frac{1}{c^2} \iint \nabla_x \psi \chi dx dz$$

L'équation limite de type Hartree

$$(Ha) \quad \begin{cases} \left(i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x \right) u = -\kappa (\Sigma \star |u|^2) u \\ \kappa = \|\nabla_z \Gamma\|_{L_x^2}^2, \quad \Delta_z \Gamma(z) = \sigma_2(z) \quad \text{et} \quad \Sigma = \sigma_1 \star \sigma_1 \end{cases}$$

Quantités conservées :

- ▶ (masse) $\|u(t)\|_{L_x^2}^2 = \|u(0)\|_{L_x^2}^2$
- ▶ (énergie) $\mathcal{H}(t) = H(u(t)) = \mathcal{H}(0)$ avec

$$H(u) = \frac{1}{2} \|\nabla_x u\|_{L_x^2}^2 - \frac{\kappa}{2} \int (\Sigma \star |u|^2) |u|^2 dx$$

- ▶ (impulsion) $\text{Im} \int \nabla_x u(t) \bar{u}(t) dx = \text{Im} \int \nabla_x u(0) \bar{u}(0) dx$

Remarques supplémentaires :

- ▶ Il y a mieux que la conservation de l'impulsion, (Ha) est invariant par transformations galiléennes.
- ▶ Les fonctionnelles E et H sont liées par la relation

$$H(u) = E(u, \Gamma \sigma_1 \star |u|^2, 0).$$

Ondes solitaires

On cherche des solutions particulières (u, ψ) de (S-O) sous la forme

$$u(t, x) = Q(x)e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad \psi(t, x, z) = \Psi(x, z).$$

On obtient que (Q, Ψ) doit être solution du système

$$\begin{cases} \Delta_z \Psi = \sigma_2 \sigma_1 \star Q^2 \\ -\frac{1}{2} \Delta_x Q + \omega Q + \left(\sigma_1 \star \int \sigma_1 \Psi \, dz \right) Q = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases} \Psi(x, z) = \Gamma(z) \sigma_1 \star Q^2(x) \\ -\frac{1}{2} \Delta_x Q + \omega Q - \kappa (\Sigma \star Q^2) Q = 0 \quad (C)_\omega \end{cases}$$

Remarque importante : si Q est une solution de $(C)_\omega$, alors $u(t, x) = Q(x)e^{i\omega t}$ est également une solution de (Ha).

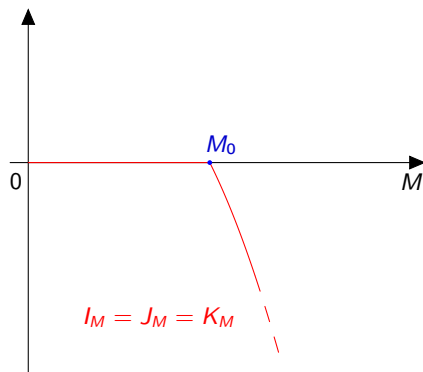
Minimisation de l'énergie sous contrainte de masse

On étudie les trois problèmes de minimisations suivant

$$\begin{aligned} I_M &= \inf \left\{ E(u, \psi, \chi) \text{ t.q. } (u, \psi, \chi) \in H_x^1 \times L_x^2 \dot{H}_z^1 \times L_x^2 L_z^2 \text{ et } \|u\|_{L_x^2}^2 \leq M \right\} \\ J_M &= \inf \left\{ E(u, \psi, \chi) \text{ t.q. } (u, \psi, \chi) \in H_x^1 \times L_x^2 \dot{H}_z^1 \times L_x^2 L_z^2 \text{ et } \|u\|_{L_x^2}^2 = M \right\} \\ K_M &= \inf \left\{ H(u) \text{ t.q. } u \in H_x^1 \text{ et } \|u\|_{L_x^2}^2 = M \right\} \end{aligned}$$

Théorème.

- ▶ Pour tout $M \geq 0$, I_M est atteint.
- ▶ Si $I_M < 0$ est atteint en (u, ψ, χ) alors $\chi = 0$, $\psi = \Gamma \sigma_1 \star |u|^2$, $\|u\|_{L_x^2}^2 = M$ et $\exists \omega > 0$ t.q. u est solution de $(C)_\omega$.
- ▶ Pour tout $M \geq 0$, $I_M = J_M = K_M \leq 0$.
- ▶ Il existe $M_0 \geq 0$ t.q. $I_M = 0$ pour $M \in [0, M_0]$ et $I_M < 0$ et strictement décroissant sur $(M_0, +\infty)$.
- ▶ Si $d = 1$, $M_0 = 0$ et si $d \geq 2$, $M_0 > 0$.



Stabilité orbitale (approche variationnelle)

Notation

$$S_M = \left\{ (\tilde{Q}, \tilde{\Psi}) \in H_x^1 \times L_x^2 \dot{H}_z^1 \text{ t.q. } \|\tilde{Q}\|_{L_x^2}^2 = M \text{ et } E(\tilde{Q}, \tilde{\Psi}, 0) = J_M \right\}$$

Théorème. Soit $d \geq 2$, $M \in (M_0, 2M_0)$ et $(Q, \Psi) \in S_M$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u_0 \in H_x^1$, $\psi_0 \in L_x^2 \dot{H}_z^1$ et $\psi_1 \in L_x^2 L_z^2$ satisfaisant

$$\|u_0\|_{L_x^2}^2 = M \quad \text{et} \quad \|u_0 - Q\|_{H_x^1}^2 + \|\psi_0 - \Psi\|_{L_x^2 \dot{H}_z^1}^2 + \|\psi_1\|_{L_x^2 L_z^2}^2 < \delta_\varepsilon,$$

l'unique solution (u, ψ) de (S-O) de donnée initiales (u_0, ψ_0, ψ_1) vérifie

$$\sup_{t \geq 0} \inf_{(\tilde{Q}, \tilde{\Psi}) \in S_M} \left(\|u(t) - \tilde{Q}\|_{H_x^1}^2 + \|\psi(t) - \tilde{\Psi}\|_{L_x^2 \dot{H}_z^1}^2 + \|\partial_t \psi(t)\|_{L_x^2 L_z^2}^2 \right) < \varepsilon.$$

Remarque. Lors de l'application du lemme de concentration compacité, la discrimination du scénario *dichotomie* repose sur une propriété de sous additivité pour J_M : pour tout $\alpha \in (0, 1)$,

$$J_M < J_{\alpha M} + J_{(1-\alpha)M}.$$

Comme $J_M = 0$ pour $M \in [0, M_0]$ et est strictement décroissant lorsque $M > M_0$, cette propriété est au moins satisfaite pour $M \in (M_0, 2M_0)$.

Le problème de l'unicité (modulo les symétries de l'équation)

Ce que nous savons : Pour tout $M > M_0$ il existe (Q, Ψ) tel que

- ▶ Q est positive, à symétrie sphérique, de profil radial décroissant et de masse M ,
- ▶ $\Psi(x, z) = \Gamma(z) \sigma_1 \star Q^2(x)$,
- ▶ $E(Q, \Psi, 0) = J_M$.

Remarque : pour tout $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$(v(x), \varphi(x, z)) = \left(Q(x - x_0) e^{i\gamma_0}, \Psi(x - x_0, z) \right)$$

est encore un minimiseur de J_M .

Question : existe-t-il d'autres minimiseurs ?

Théorème [Lieb '77]. Si $d = 3$ et $\Sigma(x) = |x|^{-1}$ alors K_M admet un unique minimiseur (modulo les invariances de l'équation).

Théorème [Ma Zhao 2010]. Si u est un minimiseur de K_M alors (modulo changement de phase et translation) u est strictement positif, à symétrie sphérique et de profil radial strictement décroissant.

Satbilité orbitale (approche par linéarisation) I

Soit $M > M_0$ et $(Q, \Psi) \in S_M$. On sait que $\Psi = \Gamma \sigma_1 \star Q^2$ et qu'il existe $\omega > 0$ t.q. Q est solution de $(C)_\omega$.

Notation : $W(u, \psi, \chi) = E(u, \psi, \chi) + \omega \|u\|_{L_x^2}^2$

Calcul : En notant $u = f + ig$ ($f, g \in \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned} W(Q + u, \Psi + \psi, \chi) &= W(Q, \Psi, 0) \\ &+ \left\langle \mathcal{L}_+ \begin{pmatrix} f \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle_{L_x^2 \times L_x^2 L_z^2} + \langle L_- g, g \rangle_{L_x^2} + \frac{1}{2c^2} \|\chi\|_{L_x^2 L_z^2}^2 \\ &+ \mathcal{O}(\|u, \psi\|^3) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{L}_+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \Delta_x + \omega + \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2 \Psi dz \right) & M_1 \\ M_2 & -\frac{1}{2} \Delta_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} M_1 \psi &= \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2 \psi dz \right) Q \\ M_2 f &= \sigma_2 \left(\sigma_1 \star Q f \right) \end{aligned}$$

et

$$L_- = -\frac{1}{2} \Delta_x + \omega - \kappa (\Sigma \star Q^2).$$

Satbilité orbitale (approche par linéarisation) II

Lemme [Weinstein '85]. Il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $g \in H_x^1$

$$\langle L-g, g \rangle_{L_x^2} \geq \mu \|g\|_{H_x^1}^2 - \frac{1}{\mu} |\langle g, Q \rangle_{H_x^1}|^2.$$

Condition (H) : Il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $(f, \psi) \in H_x^1 \times L_x^2 \dot{H}_z^1$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{L}_+ \begin{pmatrix} f \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle_{L_x^2 \times L_x^2 L_z^2} &\geq \nu (\|f\|_{H_x^1}^2 + \|\psi\|_{L_x^2 \dot{H}_z^1}^2) \\ &\quad - \frac{1}{\nu} \left(|\langle f, Q \rangle_{L_x^2}|^2 + \sum_{j=1}^d |\langle f, \partial_{x_j} Q \rangle_{L_x^2}|^2 \right) \end{aligned}$$

"Théorème". Sous la condition **(H)** et avec $\|u_0\|_{L_x^2} = \|Q\|_{L_x^2}$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ on peut exhiber $\eta(\varepsilon), \delta(\varepsilon) > 0$ t.q.

$$\|u_0 - Q\|_{H_x^1}^2 + \|\psi_0 - \Psi\|_{L_x^2 \dot{H}_z^1}^2 + \frac{1}{c^2} \|\psi_1\|_{L_x^2 L_z^2}^2 \leq \eta(\varepsilon)^2 \quad \text{et} \quad W(u_0, \psi_0, \psi_1) - W(Q, \Psi, 0) \leq \delta(\varepsilon)$$

implique l'existence de deux fonctions $t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}$ et $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^d$ t.q.

$$\sup_{t \geq 0} \left(\|u(t) - Q(\cdot - x(t))e^{i\gamma(t)}\|_{H_x^1}^2 + \|\psi(t) - \Psi(\cdot - x(t))\|_{L_x^2 \dot{H}_z^1}^2 + \frac{1}{c^2} \|\partial_t \psi(t)\|_{L_x^2 L_z^2}^2 \right) \leq \varepsilon^2$$

Étude de l'opérateur \mathcal{L}_+

Notation : $L_+ f = -\frac{1}{2} \Delta_x f + \omega f - \kappa(\Sigma \star Q^2) f - 2\kappa(\Sigma \star Q f) Q$

Remarque : En introduisant $\widetilde{W}(u) = H(u) + \omega \|u\|_{L_x^2}^2$ nous avons la décomposition ($u = f + ig$)

$$\widetilde{W}(Q + u) = \widetilde{W}(u) + \langle L_+ f, f \rangle_{L_x^2} + \langle L_- g, g \rangle_{L_x^2} + \mathcal{O}(\|u\|^3).$$

Condition (H') : Il existe $\bar{\nu} > 0$ tel que pour tout $f \in H_x^1$

$$\langle L_+ f, f \rangle_{L_x^2} \geq \bar{\nu} \|f\|_{H_x^1}^2 - \frac{1}{\bar{\nu}} \left(|\langle f, Q \rangle_{L_x^2}|^2 + \sum_{j=1}^d |\langle f, \partial_{x_j} Q \rangle_{L_x^2}|^2 \right).$$

Proposition. (H) \iff (H')

Étude de l'opérateur L_+

Théorème [Lenzmann 2009, D'Avenia & Squassina 2014]. Si $d = 3$ et $\Sigma = |\cdot|^{-1}$ alors pour tout $M > 0$ l'unique (modulo symétries) minimiseur Q^0 de K_M est tel que

$$\text{Ker}(L_+) = \text{Vect}\{\partial_{x_j} Q^0, j = 1, 2, 3\}$$

et **(H')** est satisfait.

À partir de maintenant $d = 3$.

Notations :

- ▶ $(\Sigma^\epsilon)_\epsilon$ suite convergent vers $\Sigma^0 = |\cdot|^{-1}$ dans le sens suivant : pour tout $R > 0$

$$\|(\Sigma^\epsilon - \Sigma^0)\mathbf{1}_{|x| \leq R}\|_{L_x^{3/2}} + \|(\Sigma^\epsilon - \Sigma^0)\mathbf{1}_{|x| > R}\|_{L_x^\infty} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

- ▶ $(Q^\epsilon)_\epsilon$ suite de minimiseur de $K_M(\Sigma^\epsilon)$ (où $M > \sup_\epsilon M_0(\Sigma^\epsilon)$) positifs, à symétrie sphérique, de profil radial décroissant et $(\omega^\epsilon)_\epsilon$ suite de multiplicateurs de lagrange associés aux (Q^ϵ) .
- ▶ Q^0 unique minimiseur de $K_M(\Sigma^0)$ positif, à symétrie sphérique et de profil radial décroissant. ω^0 le multiplicateur de Lagrange correspondant.

Étude de l'opérateur L_+ (suite)

Proposition. (i) Pour tout $\delta > 0$ il existe $\epsilon_0 > 0$ t.q. pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$\|Q^\epsilon - Q^0\|_{H_x^1} + |\omega^\epsilon - \omega^0| < \delta$$

(ii) Il existe $\bar{\epsilon}_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_0)$ et tout Q^ϵ , il existe $\nu(\Sigma^\epsilon, Q^\epsilon) > 0$ t.q. **(H')** soit satisfait avec $\bar{\nu} = \nu(\Sigma^\epsilon, Q^\epsilon)$.

Remarque : ϵ_0 dépend *a priori* de la suite $(Q^\epsilon)_\epsilon$ considérée alors que $\bar{\epsilon}_0$ est le même pour toutes les suites $(Q^\epsilon)_\epsilon$.

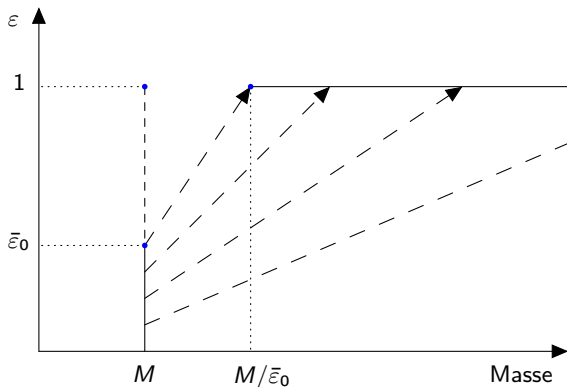
Question : Que se passe-t-il pour des solitons Q de masse proche de M ?

Un exemple instructif : $\Sigma(x) = \frac{e^{-|x|}}{|x|}$

► $\Sigma^\epsilon(x) = \frac{e^{-\epsilon|x|}}{|x|} = \epsilon \Sigma(\epsilon x)$.

Étude de l'opérateur L_+ : le cas $\Sigma(x) = e^{-|x|}/|x|$

- ▶ $\Sigma^\epsilon(x) = \frac{e^{-\epsilon|x|}}{|x|} = \epsilon \Sigma(\epsilon x)$.
- ▶ Q^ϵ minimiseur de $K_M(\Sigma^\epsilon) \iff P(x) = \epsilon^{-2} Q^\epsilon(\epsilon^{-1}x)$ minimiseur de $K_{\epsilon^{-1}M}(\Sigma)$.



Étude de l'opérateur L_+ : le cas $\Sigma = \chi(\alpha \star |\cdot|^{-1})$

- ▶ $\Sigma^{\lambda, \mu}(x) = \lambda^{-3} \chi(\mu x) \int \frac{\alpha(\lambda^{-1}y)}{|x-y|} dy$
- ▶ $\tilde{\Sigma}^\epsilon(x) = \epsilon^{-3} \chi(x) \int \frac{\alpha(\epsilon^{-1}y)}{|x-y|} dy$
- ▶ $\Sigma^{\lambda, \mu}(x) = \mu \tilde{\Sigma}^{\lambda\mu}(\mu x)$
- ▶ $Q^{\lambda, \mu}$ minimiseur de $K_M(\Sigma^{\lambda, \mu}) \iff P(x) = \mu^{-2} Q^{\lambda, \mu}(\mu^{-1}x)$ minimiseur de $K_{\mu^{-1}M}(\tilde{\Sigma}^\epsilon)$ avec $\epsilon = \lambda\mu$.
- ▶ Il existe $\lambda_0, \mu_0 > 0$ t.q. la condition **(H')** est satisfaite pour tout minimiseur de $K_M(\Sigma^{\lambda, \mu})$ lorsque $0 < \lambda < \lambda_0$ et $0 < \mu < \mu_0$.

Proposition. Soit $\epsilon \in (0, \lambda_0 \mu_0)$. La condition **(H')** est satisfaite par tous les minimiseurs de $K_m(\tilde{\Sigma}^\epsilon)$ avec $m \in (\mu_0^{-1}M, \lambda_0 \epsilon^{-1}M)$.

Remarque. Pour s'assurer que Σ peut se décomposer sous la forme $\Sigma = \sigma_1 \star \sigma_1$ on applique la stratégie précédente avec

$$\sigma_1 = \chi(\alpha \star |\cdot|^{-2}).$$

Prise de recul

- ▶ $d = 3$: si σ_1 est tel qu'il existe un changement d'échelle λ, μ t.q. $\Sigma^{\lambda, \mu}(x) = \mu \Sigma(\lambda x)$ est "proche" de $|\cdot|^{-1}$, alors il existe un intervalle de masse I d'intérieur non vide t.q. la condition **(H')** est satisfaite par tout minimiseur de $K_M(\Sigma)$ avec $M \in I$.

$$\left(i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x\right)u = -(\Sigma \star |u|^2)u$$

	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
$\Sigma = \delta_0$	L^2 sous critique	L^2 critique	L^2 sur critique
$\Sigma = \cdot ^{-1}$		L^2 sous critique	L^2 sous critique

Proposition. Soit $d = 1$. Pour tout σ_1 positif, pair et de profil décroissant, il existe $\overline{M} > 0$ t.q. la condition **(H')** est satisfaite par tous les minimiseurs de $K_M(\Sigma)$ avec $M \in (0, \overline{M})$.

Remarque : si $d = 1$ alors $M_0 = 0$.

II- Étude numérique du "déplacement" d'un état fondamental

Paramètres pour les simulations

► $\sigma_1(x) = 3 \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \mathbf{1}_{|x| \leq 1}$, $\sigma_2(z) = 3 \exp\left(-\frac{1}{1-|z|^2}\right) \mathbf{1}_{|z| \leq 1}$,

$M = 2$.

- Calcul de Q en résolvant numériquement l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t v - \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 v + \omega(v)v - \kappa(\Sigma \star |v|^2)v = 0 \\ \omega(v) = -\frac{1}{\|v\|_{L_x^2}^2} \left(\frac{1}{2} \int |\nabla_x v|^2 dx - \kappa \iint |v|^2(x) \Sigma(x-y) |v|^2(y) dx dy \right) \end{cases}$$

- Données initiales

$$u(0, x) = Q(x) e^{i \frac{p_0}{M} \cdot x}, \quad \psi(0, x, z) = \Gamma(z) \sigma_1 \star Q^2(x), \quad \partial_t \psi(0, x, z) = 0.$$

Des calculs heuristiques

Notation : $q(t) = \frac{1}{M} \int x |u(t)|^2 dx$ et $p(t) = \text{Im} \int \nabla_x u(t) \bar{u}(t) dx$.

$$M\dot{q}(t) = p(t) \quad (1a)$$

$$\dot{p}(t) = - \int \nabla_x \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2(z) \psi(t, \cdot, z) dz \right) (x) |u(t, x)|^2 dx \quad (1b)$$

$$u(t, x) = Q(x - x(t)) e^{i\gamma(t)} + \varepsilon\text{-term} \quad (1c)$$

$$(\partial_{tt}^2 - c^2 \Delta_z) \psi(t, x, z) = -c^2 \sigma_2(z) \sigma_1 \star |u(t)|^2(x) \quad (1d)$$

Hypothèse (non vérifiée) : le soliton se déplace sans déformation, ie $\varepsilon\text{-term} = 0$. Dans ce cas $x(t) = q(t)$ et

$$M\ddot{q}^a(t) = - \int \nabla_x \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2(z) \psi^a(t, \cdot, z) dz \right) (x) Q^2(x - q^a(t)) dx \quad (2a)$$

$$(\partial_{tt}^2 - c^2 \Delta_z) \psi^a(t, x, z) = -c^2 \sigma_2(z) \sigma_1 \star Q^2(x) \quad (2b)$$

Remarque : (2a)–(2b) est l'équation (BdB) pour une particule avec $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 \star Q^2$ car

$$\begin{aligned} \int \nabla_x \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2 \psi^a(t) dz \right) (x) Q^2(x - q^a(t)) dx \\ = \nabla_x \left([\sigma_1 \star Q^2] \star \int \sigma_2 \psi^a(t) dz \right) (q^a(t)) \end{aligned}$$

Des calculs heuristiques (suite)

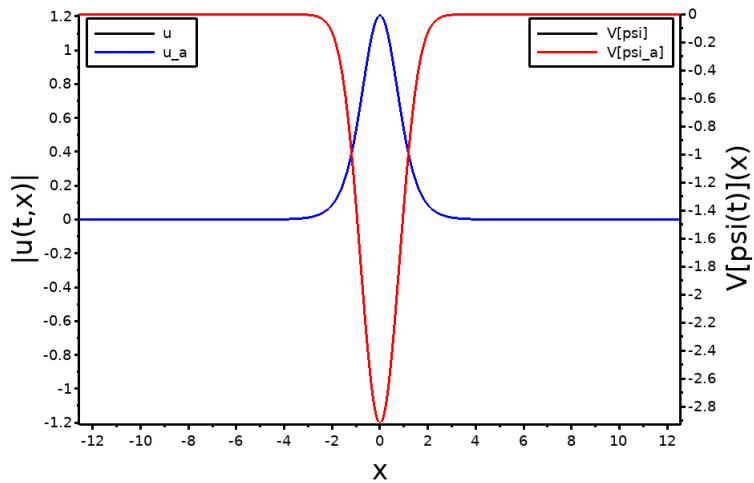
La phase : par analogie avec l'expression de la phase dans l'invariance galiléenne on introduit

$$\gamma^a(t) = \omega t + \frac{1}{2M} \int_0^t |p^a(s)|^2 ds$$

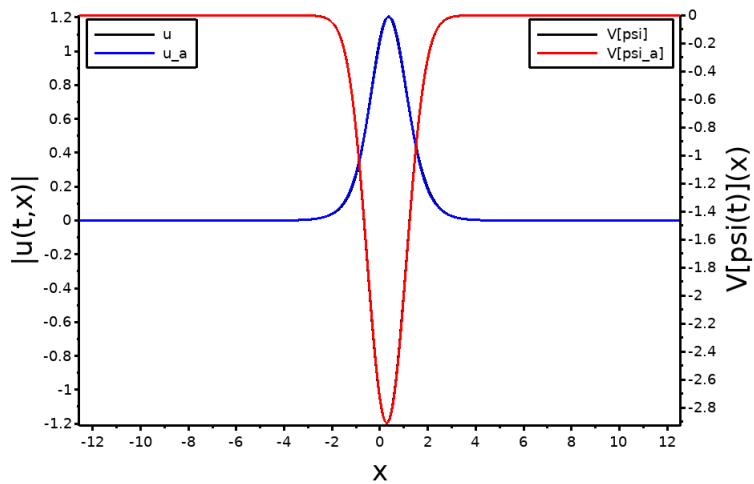
Solution heuristique approchée :

$$u^a(t, x) = Q(x - q^a(t)) \exp\left(i \frac{p^a(t)}{M} \cdot (x - q^a(t))\right) \exp(i\gamma^a(t))$$

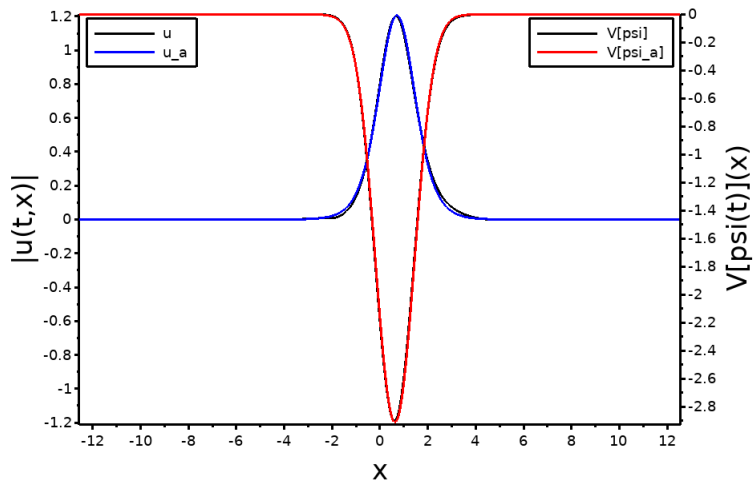
Déplacement d'un soliton



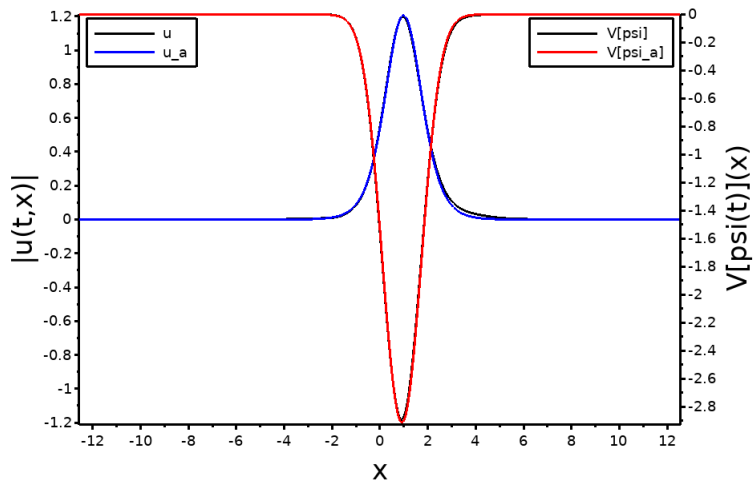
Déplacement d'un soliton



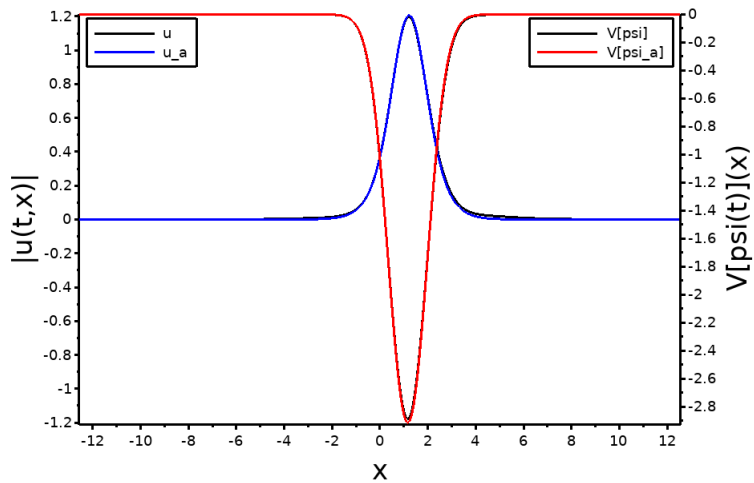
Déplacement d'un soliton



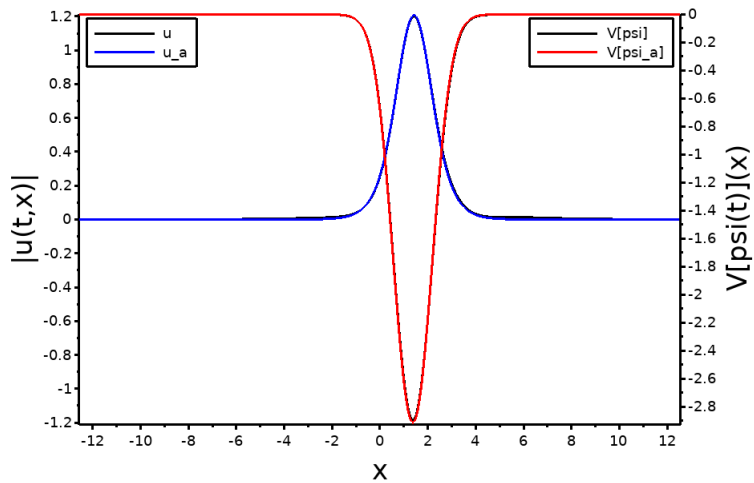
Déplacement d'un soliton



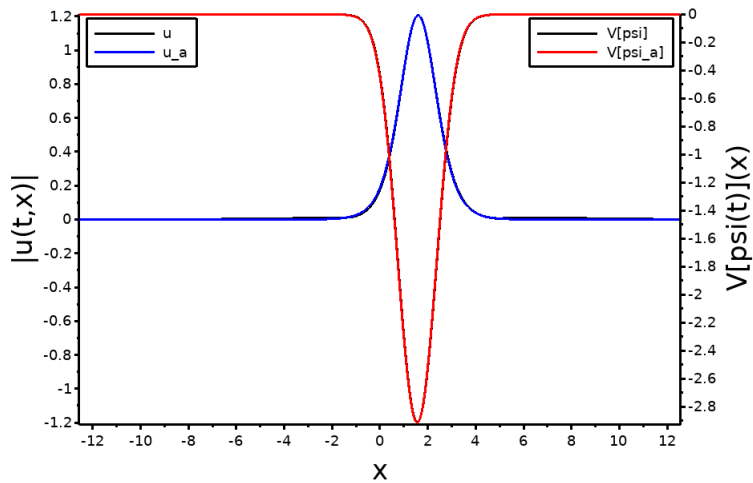
Déplacement d'un soliton



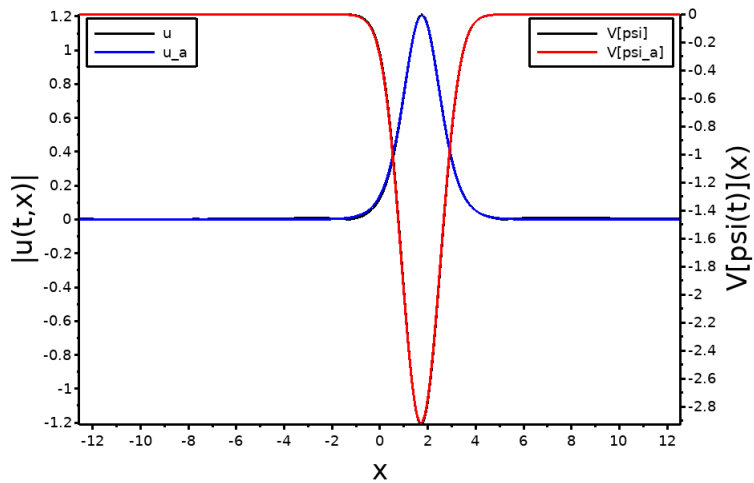
Déplacement d'un soliton



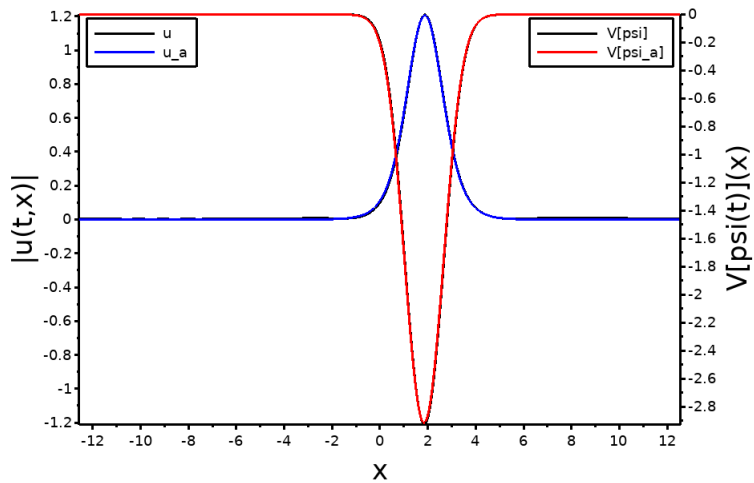
Déplacement d'un soliton



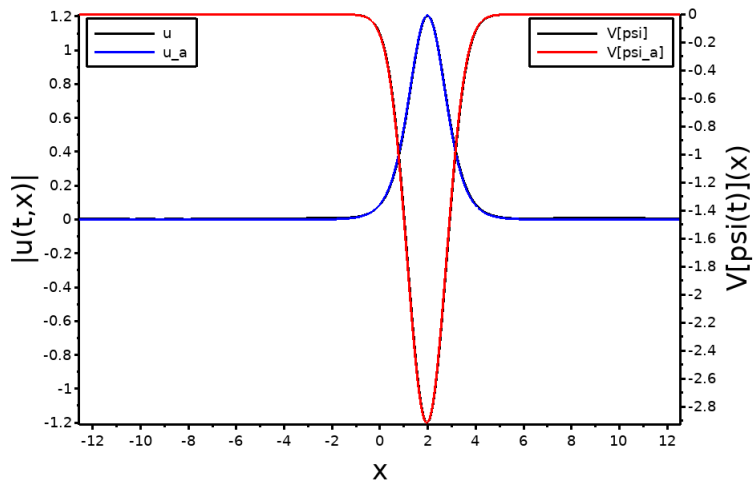
Déplacement d'un soliton



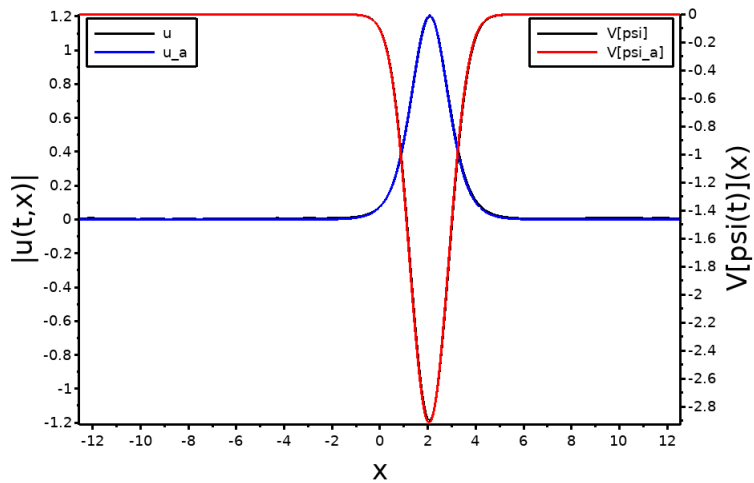
Déplacement d'un soliton



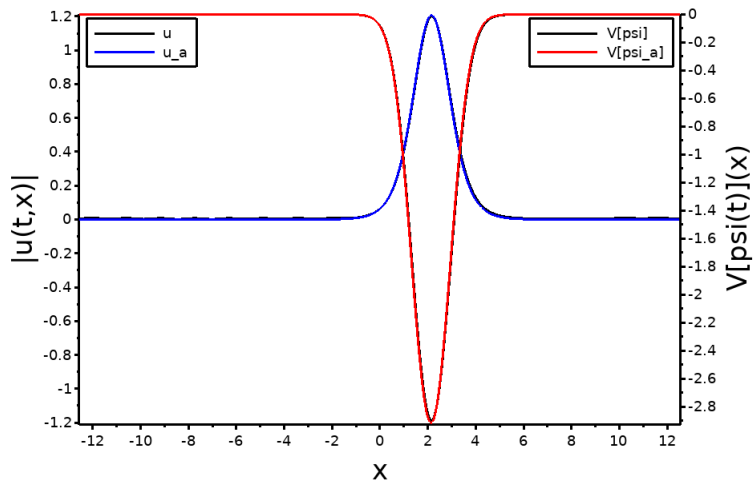
Déplacement d'un soliton



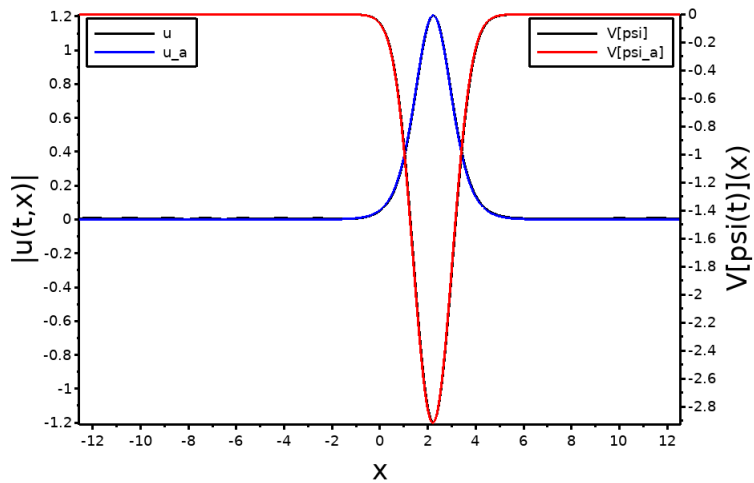
Déplacement d'un soliton



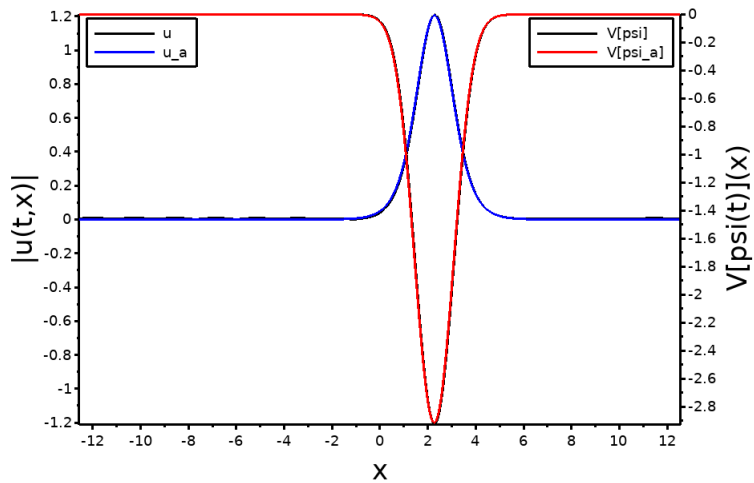
Déplacement d'un soliton



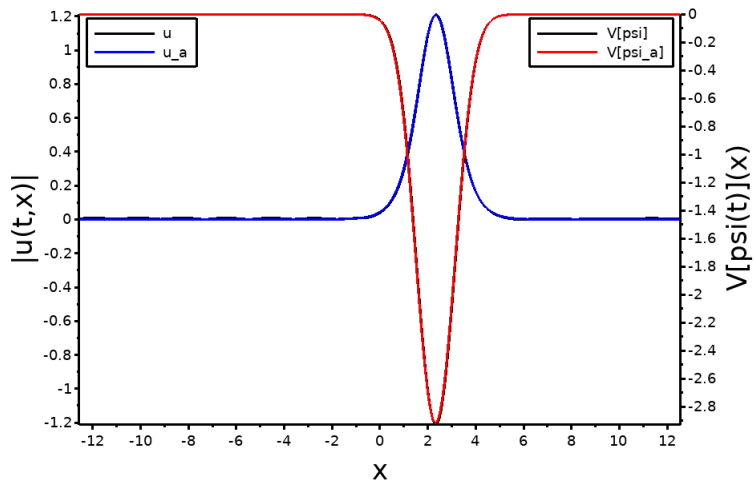
Déplacement d'un soliton



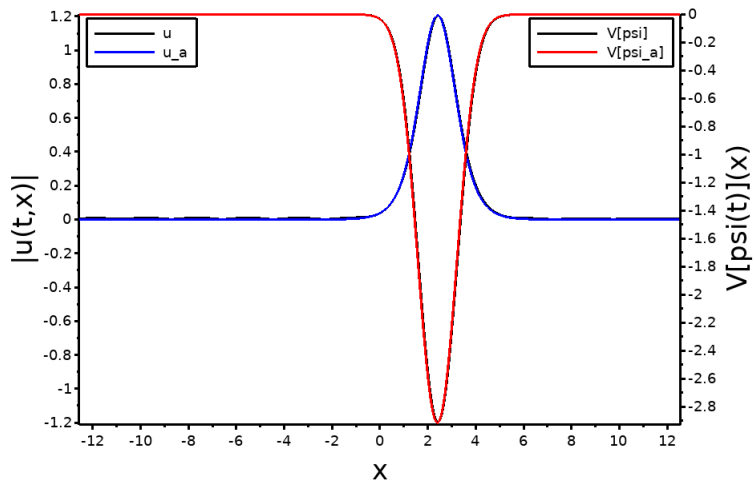
Déplacement d'un soliton



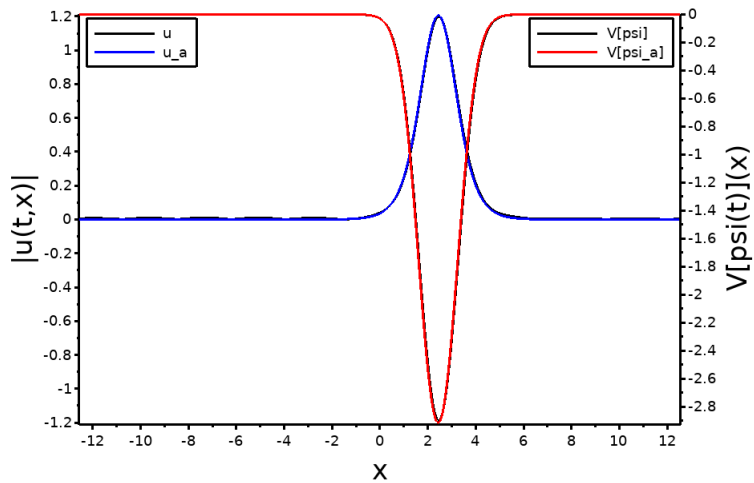
Déplacement d'un soliton



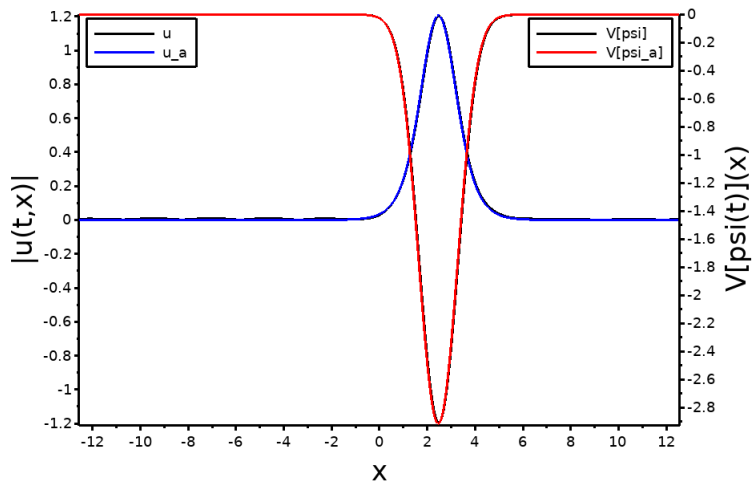
Déplacement d'un soliton



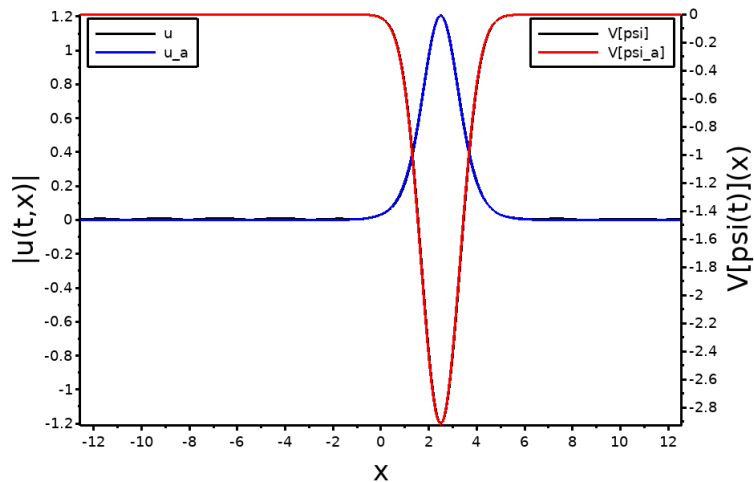
Déplacement d'un soliton



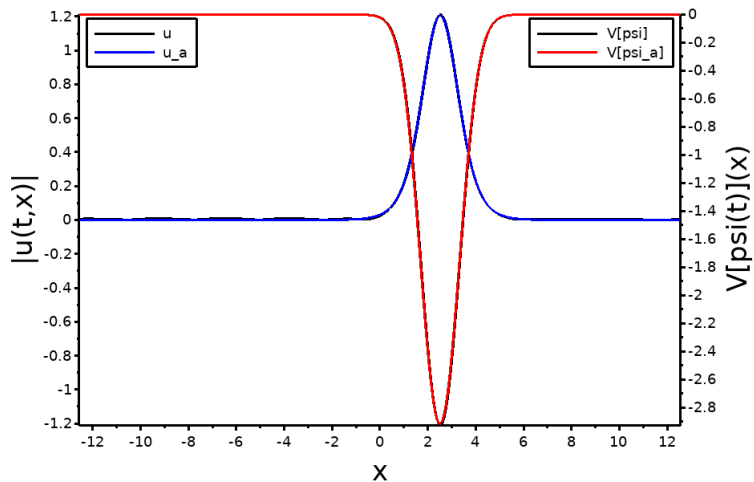
Déplacement d'un soliton



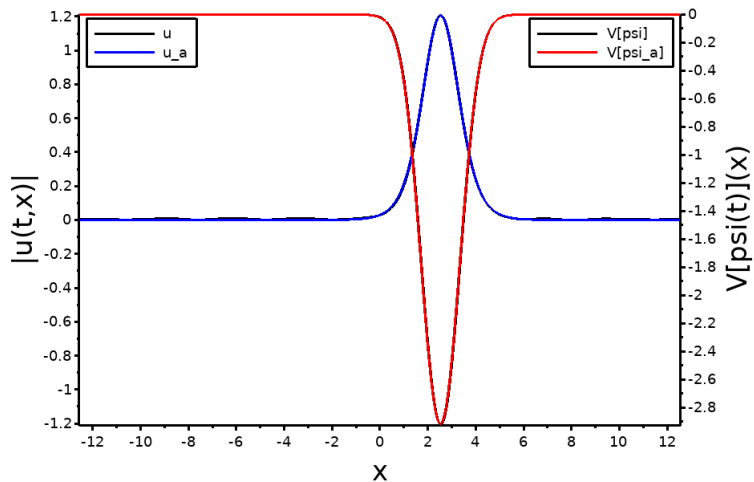
Déplacement d'un soliton



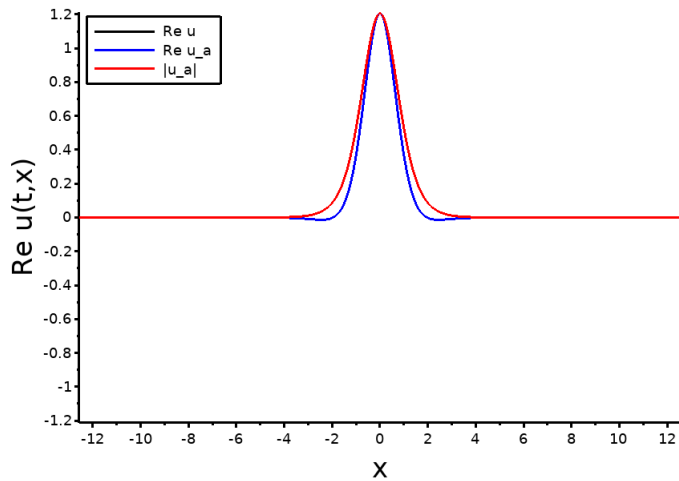
Déplacement d'un soliton



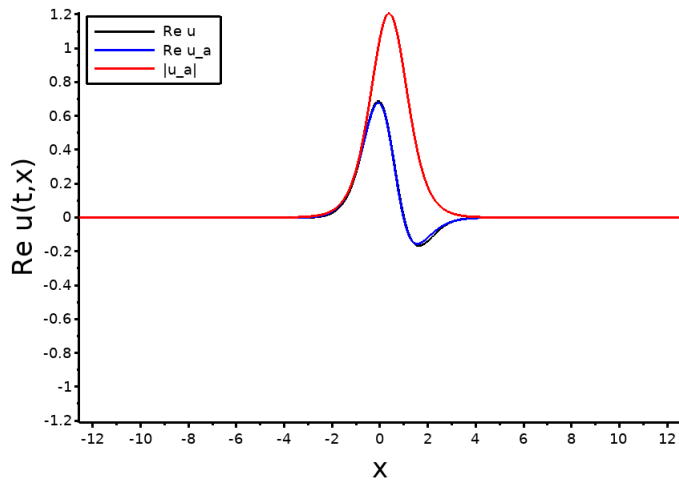
Déplacement d'un soliton



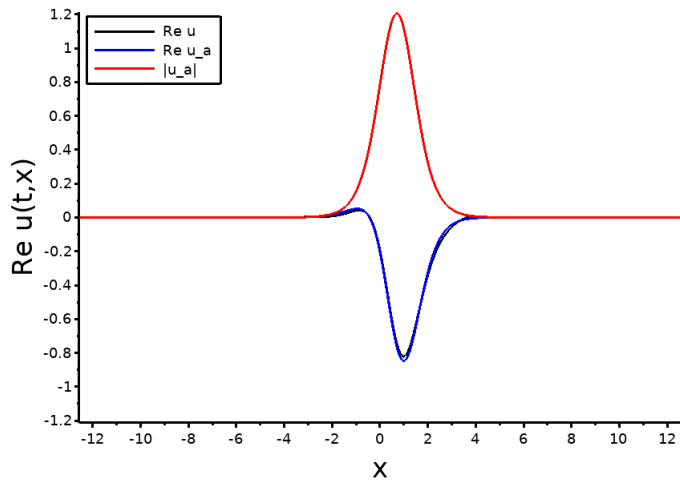
Phase du soliton



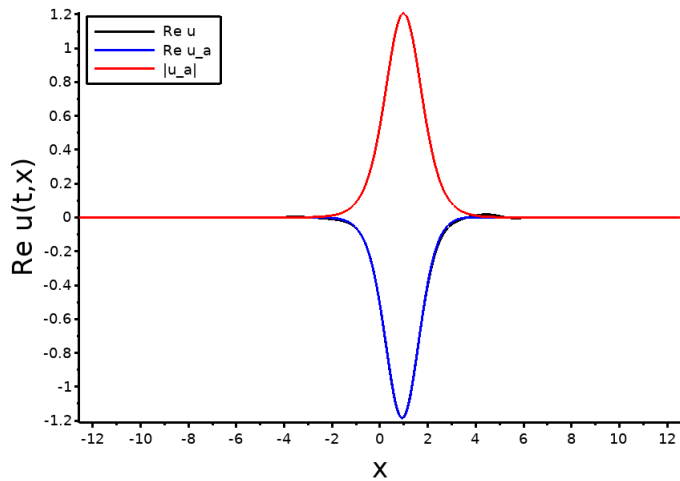
Phase du soliton



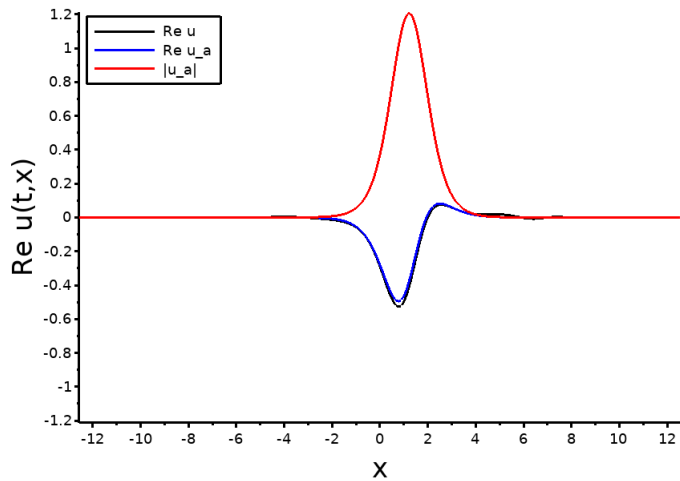
Phase du soliton



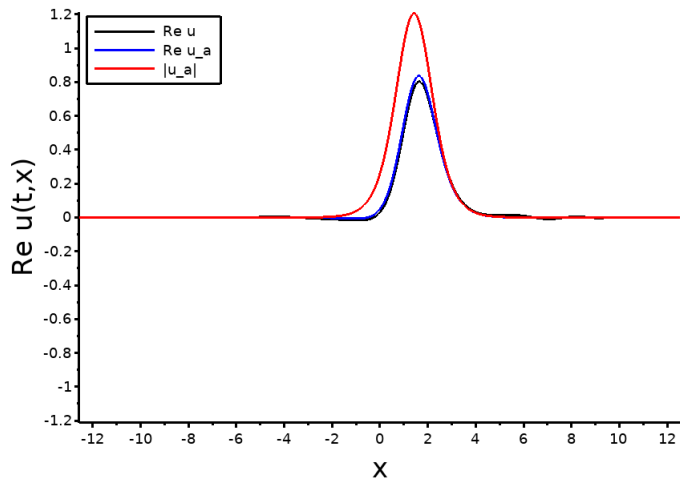
Phase du soliton



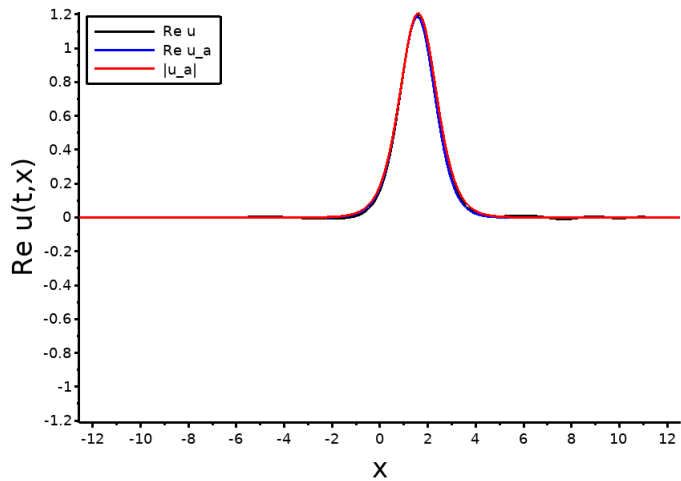
Phase du soliton



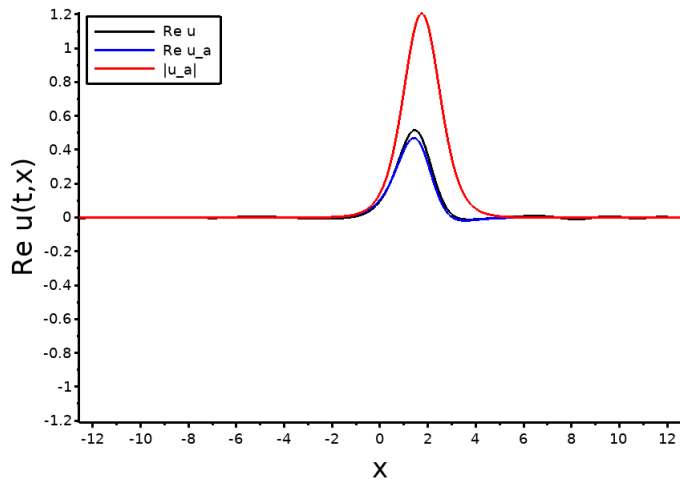
Phase du soliton



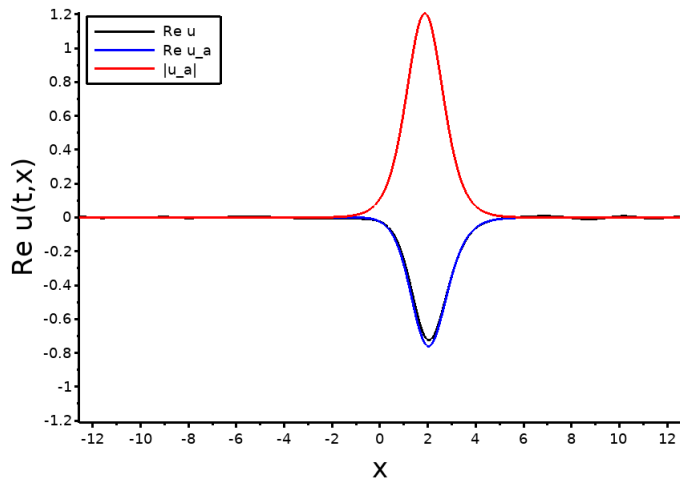
Phase du soliton



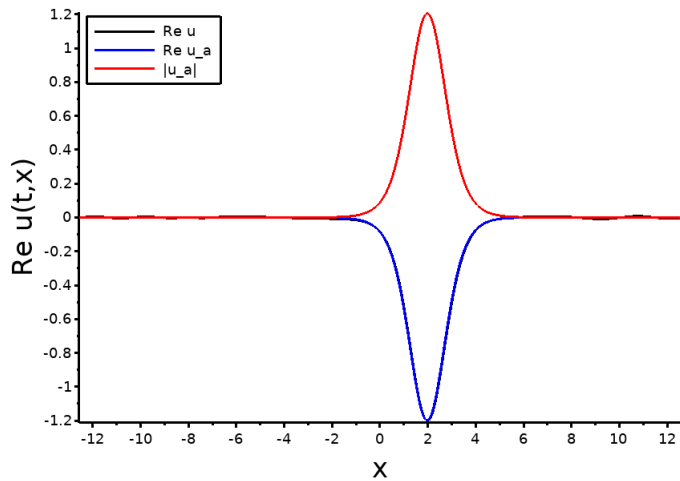
Phase du soliton



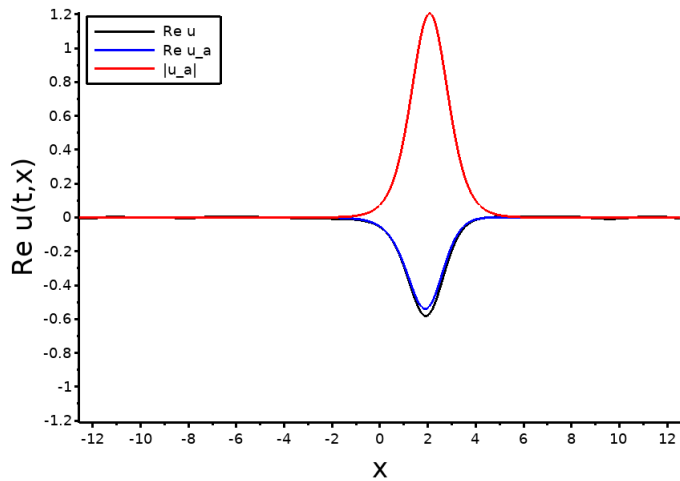
Phase du soliton



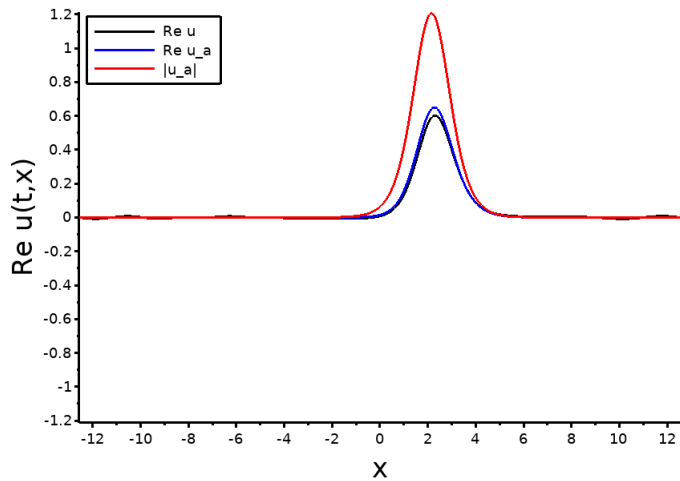
Phase du soliton



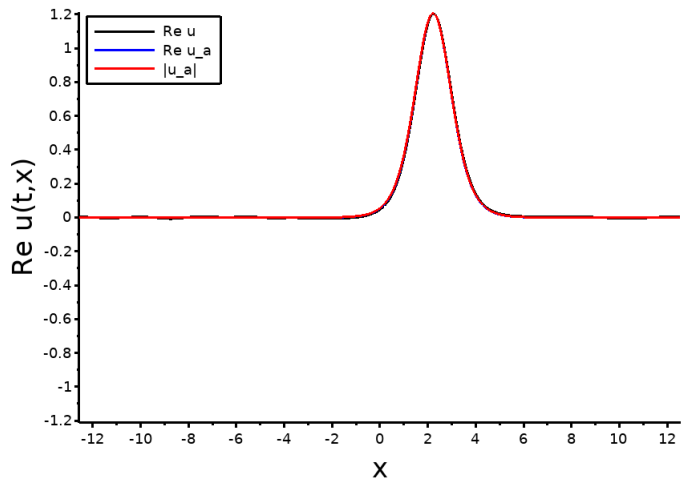
Phase du soliton



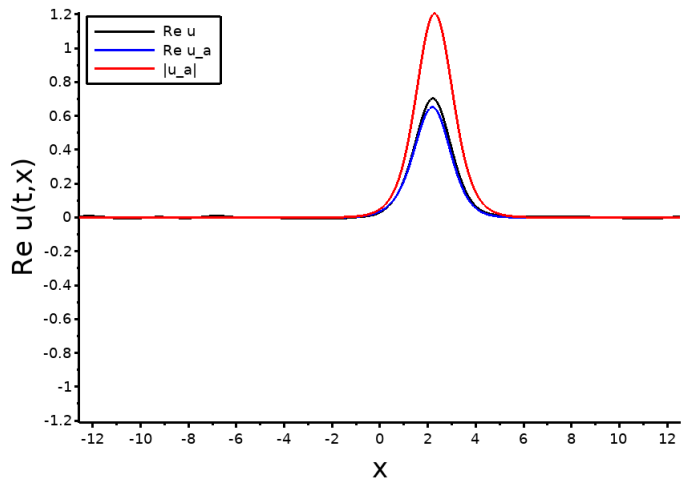
Phase du soliton



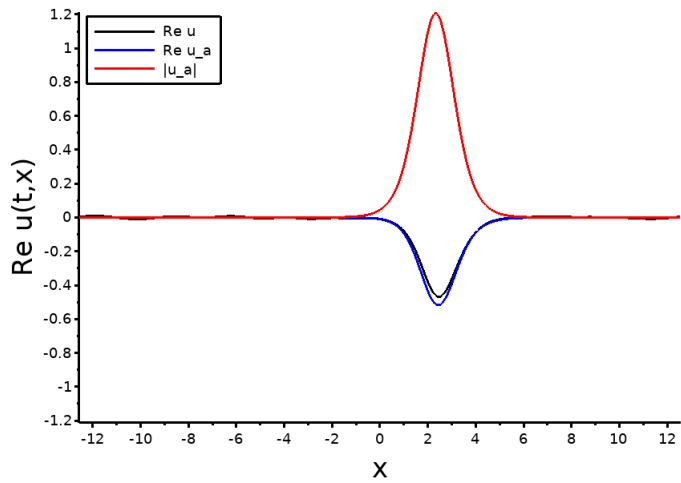
Phase du soliton



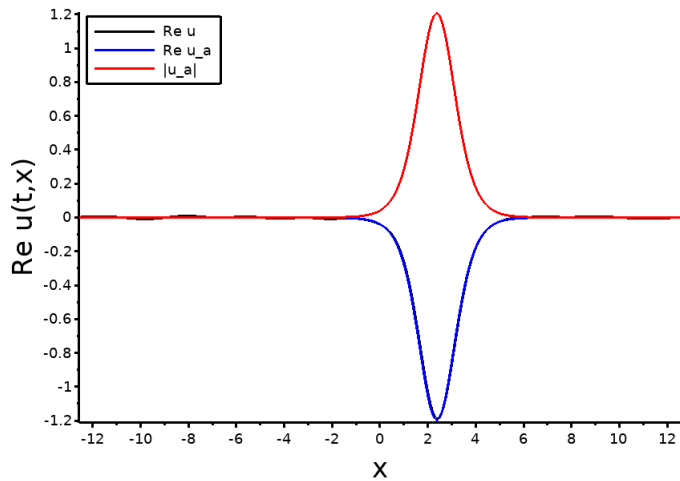
Phase du soliton



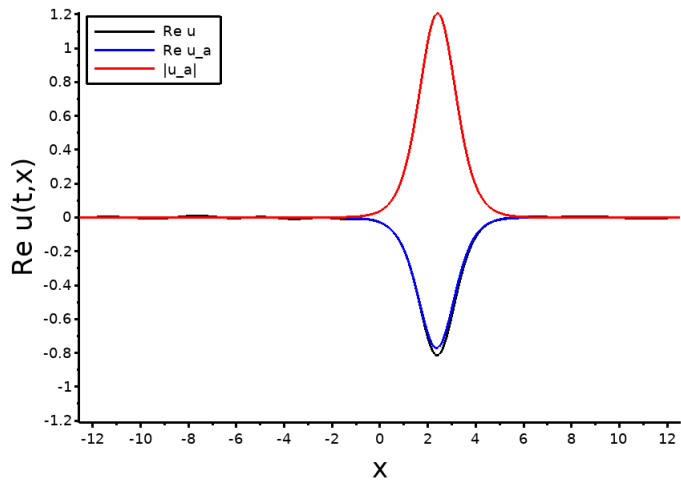
Phase du soliton



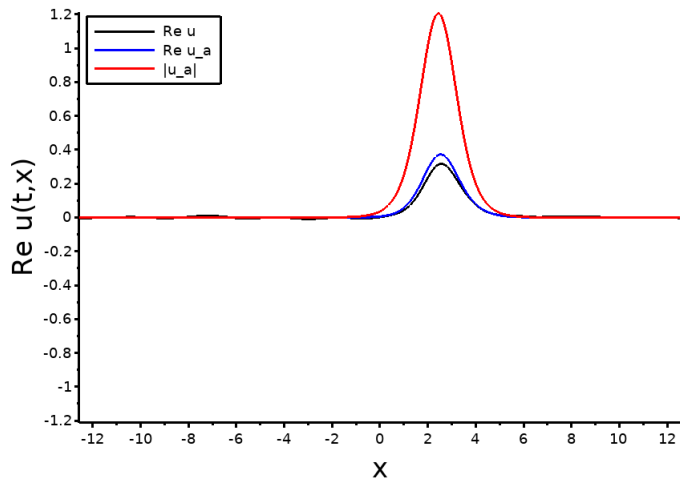
Phase du soliton



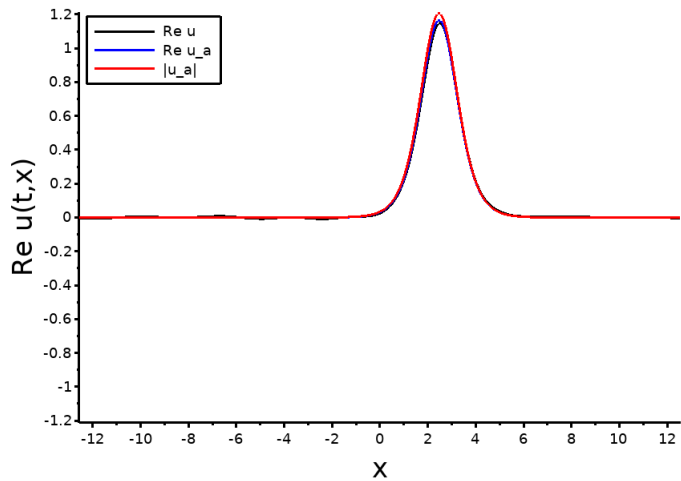
Phase du soliton



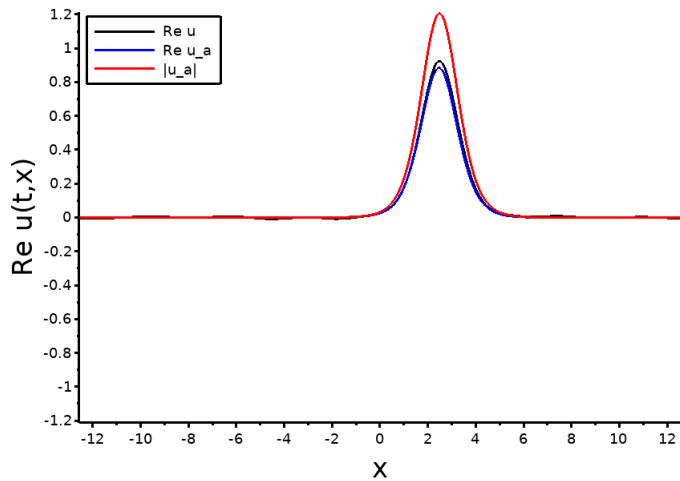
Phase du soliton



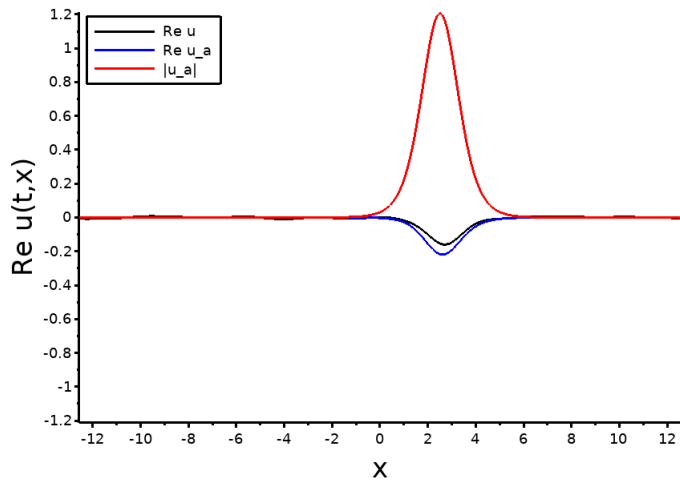
Phase du soliton



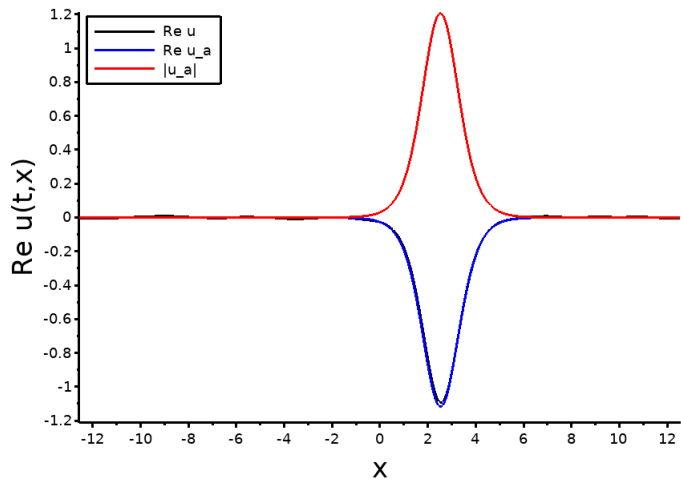
Phase du soliton



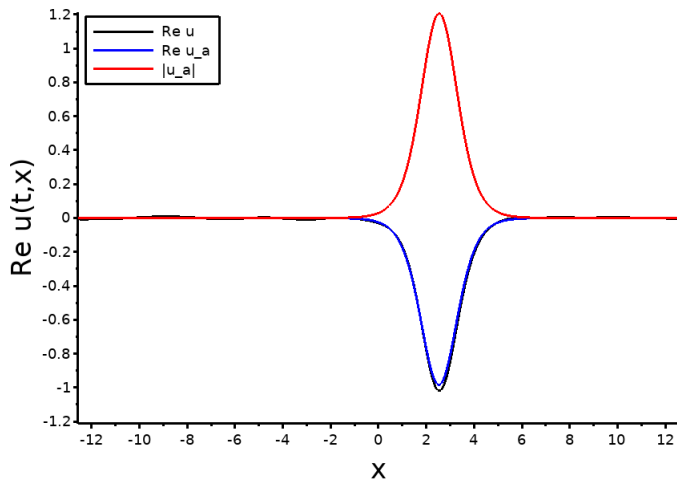
Phase du soliton



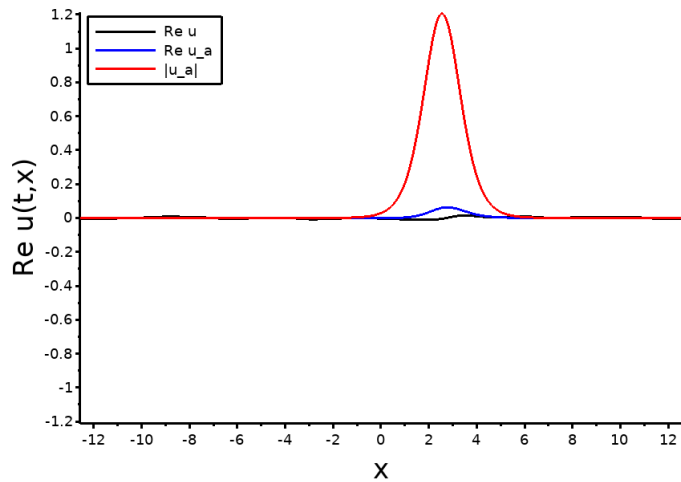
Phase du soliton



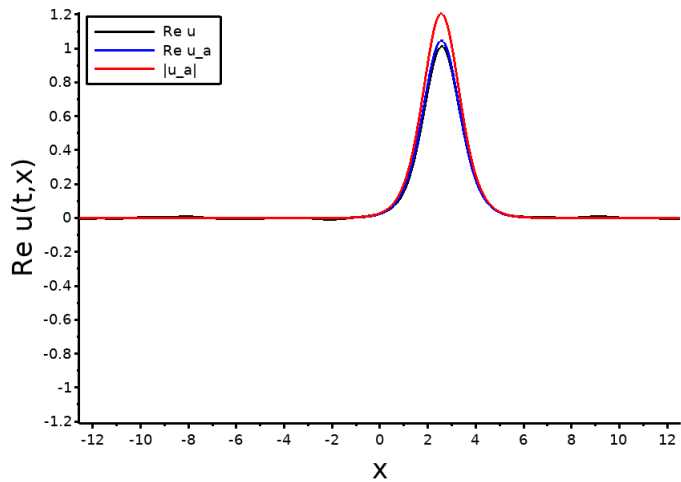
Phase du soliton



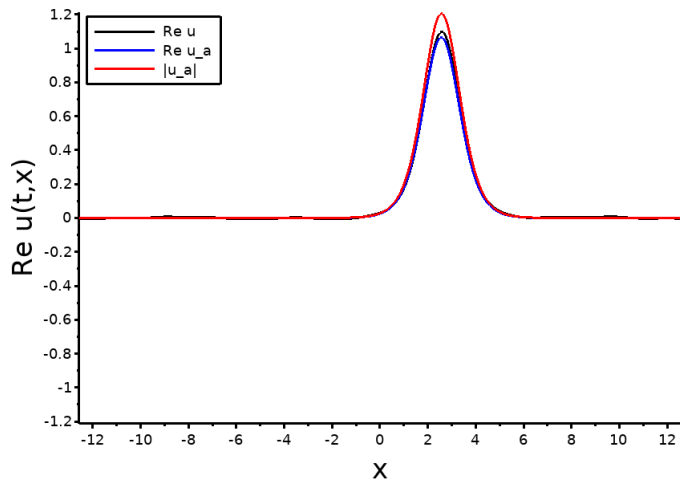
Phase du soliton



Phase du soliton



Phase du soliton



III- Amortissement Landau pour le système Vlasov-Onde

Le système Vlasov-Onde

$$(V-O) \quad \begin{cases} (\partial_{tt}^2 - c^2 \Delta_z) \psi(t, x, z) = -\lambda^2 \sigma_2(z) \left(\sigma_1 \star \int F(t) dv \right) (x) \\ (\partial_t + v \cdot \nabla_x) F(t, x, v) = \nabla_x \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2(z) \psi(t, \cdot, z) dz \right) (x) \cdot \nabla_v F(t, x, v) \end{cases}$$

Ré-écriture du potentiel d'interaction :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_H[\psi_0, \psi_1] + \psi_{NH}[F], \quad \left(\sigma_1 \star \int \sigma_2(z) \psi(t, \cdot, z) dz \right) = \Phi_H[\psi_0, \psi_1] + \Phi_{NH}[F] \\ \Phi_{NH}[F](t) &= -\Sigma \star \left(\int_0^t p_{c,\lambda}(t-\tau) \rho(\tau) d\tau \right), \quad \Sigma = \sigma_1 \star \sigma_1, \quad \rho(t) = \int F(t) dv \end{aligned}$$

Le noyau $p_{c,\lambda}$: $p_{c,\lambda}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_2(z) \Upsilon(t, z) dz$ avec Υ solution de

$$(\partial_{tt}^2 - c^2 \Delta_z) \Upsilon(t, z) = 0, \quad (\Upsilon(0, z), \partial_t \Upsilon(0, z)) = (0, \lambda^2 \sigma_2(z)).$$

Ré-écriture de l'équation

$$\begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla_x) F(t, x, v) = \nabla_x \left(\Phi_H(t) - \Sigma \star \left(\int_0^t p_{c,\lambda}(t-\tau) \rho(\tau) d\tau \right) \right) (x) \cdot \nabla_v F(t, x, v) \\ \rho(t) = \int F(t) dv \end{cases}$$

Amortissement Landau pour le système Vlasov-Onde

Solutions particulières : Si $F_0(x, v) = \mathcal{M}(v)$ et $(\psi_0(x, z), \psi_1(x, z)) = (\Psi_0(z), \Psi_1(z))$ alors $F(t, x, v) = \mathcal{M}(v)$.

"Théorème." Si \mathcal{M} est suffisamment régulière et vérifie un certain critère de stabilité linéaire **(L)**, alors il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour toutes données initiales de la forme

$$F_0(x, v) = \mathcal{M}(v) + f_0(x, v), \quad \|f_0\| \leq \varepsilon, \\ (\psi_0(x, z), \psi_1(x, z)) = (\Psi_0(z) + \varphi_0(x, z), \Psi_1(z) + \varphi_1(x, z)), \quad \|\varphi_0, \varphi_1\| \leq \varepsilon,$$

la solution F de (V-O) associée à cette donnée initiale est t.q.

- (i) $\exists G^\infty$ t.q. $\|F(t, x + tv, v) - G^\infty(x, v)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
- (ii) $\exists \rho^\infty \in \mathbb{R}$ t.q. $\|\rho(t) - \rho^\infty\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$
- (iii) $\left\| \nabla_x \left(\Sigma \star \int_0^t \rho_{c,\lambda}(t-\tau) \rho(\tau) d\tau \right) \right\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

Cadre :

	Norme	σ_1	ρ_c	taux de cv
$x \in \mathbb{R}^d$	Sobolev	$ \hat{\sigma}_1(k) \lesssim \langle k \rangle^{-\alpha}$	$ \rho_c(t) \lesssim \langle t \rangle^{-\beta}$	$\langle t \rangle^{-d}$
$x \in \mathbb{T}^d$	Gevrey	$ \hat{\sigma}_1(k) \lesssim \exp(-\lambda_1 k)$	à support compact	$\exp(-\lambda t ^s)$

Le cas linéaire

- $F(t, x, v) = \mathcal{M}(v) + f(t, x, v)$ et $(\varphi_0, \varphi_1) \equiv 0$

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) f + \nabla_x \left(\Sigma \star \int_0^t p_{c,\lambda}(t-\tau) \varrho(\tau) d\tau \right) \cdot \nabla_v \mathcal{M} = 0$$

- Intégration en vitesse le long des caractéristiques du transport libre + passage en Fourier

$$\widehat{\varrho}(t, k) = \widehat{f}_0(k, tk) + \int_0^t \mathcal{K}(t-\tau, k) \widehat{\varrho}(\tau, k) d\tau$$

avec

$$\mathcal{K}(t, k) = \int_0^t p_{c,\lambda}(t-\tau) K(\tau, k) d\tau, \quad K(t, k) = |k|^2 \widehat{\Sigma}(k) t \widehat{\mathcal{M}}(tk) \mathbf{1}_{t \geq 0}.$$

- Formellement, en appliquant la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}[\widehat{\varrho}(\cdot, k)] = \frac{\mathcal{L}[\widehat{f}_0(k, \cdot k)]}{1 - \mathcal{L}[\mathcal{K}(\cdot, k)]}, \quad \mathcal{L}[\mathcal{K}(\cdot, k)] = \mathcal{L}[p_{c,\lambda}] \mathcal{L}[K(\cdot, k)]$$

Le critère de stabilité linéaire

$$(L) \quad \inf_{k \neq 0} \left| 1 - \mathcal{L}[p_{c,\lambda}](\omega) \mathcal{L}[K(\cdot, k)](\omega) \right| > 0, \quad \text{Re}(\omega) \geq -\Lambda$$

- ▶ Si $\lambda \sim c$, alors dans la limite $c \rightarrow +\infty$ on retrouve le même critère de stabilité que dans le cas Vlasov : $p_{c,\lambda} \rightarrow \delta_0$.
- ▶ Si $\lambda \sim 1$, alors pour $c \gg 1$, le critère de stabilité est vérifié :

$$\left| \mathcal{L}[p_{c,\lambda}](\omega) \mathcal{L}[K(\cdot, k)](\omega) \right| \lesssim \frac{\lambda^2}{c}.$$

- ▶ Si $\lambda \sim 1$, $\mathcal{L}[p_{c,\lambda}](0) = \kappa/c^2$. De plus si $d \geq 3$ et $\mathcal{M} \neq 0$ est à symétrie sphérique, $\mathcal{L}[K(\cdot, k)](0) > 0$. On en déduit qu'il existe $c_0 \ll 1$ pour lequel le critère de stabilité n'est pas satisfait.