Université Aix-Marseille | Portail Descartes
Semestre 1 | 2020-2021

Planche 5

Relations d'équivalence

Précisez si les relations suivantes sont des relations d'équivalence. Si les relations ne le sont pas, précisez laquelle (ou lesquelles) des trois propriétés de définition n'est pas remplie.

Exercice 1 (Relations sur $E = \mathbb{R}$)

1. $x \mathcal{R} y$ ssi $|x - y| < 1$.

Réponse. Vu en cours.

2. $x \mathcal{R} y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$.

Réponse. Vu en cours.

3. $x \mathcal{R} y$ ssi $x + y \in \mathbb{Q}$.

Réponse. Réflexivité : Il faut décider si c'est vrai que $x \mathcal{R} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc si $x + x = 2x \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais cet fait est évidement faux - ils existent des nombres réels qui ne sont pas rationnelles - par exemple $\sqrt{2}$ (ça a été prouvé dans les exos du TD1). Par conséquent, on obtient un contre-exemple à la réflexivité de $\mathcal{R}$ en prenant x tel que $2x = \sqrt{2}$, donc $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; avec ce choix on a $x + x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \not\mathcal{R} \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui montre que la relation $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.

Symétrie : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$, donc tels que $x + y \in \mathbb{Q}$. Parce que $y + x = x + y$, il résulte que $y + x \in \mathbb{Q}$, donc que $y \mathcal{R} x$. Par conséquent, la relation est symétrique.

Transitivité : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, donc tels que $x + y \in \mathbb{Q}$ et $y + z \in \mathbb{Q}$. Nous devons décider si $x \mathcal{R} z$, donc si $x + z \in \mathbb{Q}$. On commence par écrire $x + z$ (la quantité dont on veut prouver la rationalité) en fonction de $x + y$ et $y + z$ (car on sait que ces deux nombres sont rationnels). On a

$$x + z = (x + y) - y + (y + z) - y = ((x + y) + (y + z)) - 2y.$$

Parce que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel, on sait que $(x + y) + (y + z)$ est rationnel. Mais la différence entre un nombre rationnel et un nombre irrationnel est un nombre irrationnel ; donc si $2y \notin \mathbb{Q}$, alors $((x + y) + (y + z)) - 2y \notin \mathbb{Q}$, et donc $x + z \notin \mathbb{Q}$.
On peut de cette manière donner un contre-exemple à la transitivité de $\mathcal{R}$ en prenant $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que : $x + y \in \mathbb{Q}$, $y + z \in \mathbb{Q}$ et $2y \notin \mathbb{Q}$. Soit, par exemple $x = y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dans ce cas, $x + y = y + z = 1 \in \mathbb{Q}$, mais $x + z = 2 - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; donc $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, mais $x \not\mathcal{R} z$. La relation $\mathcal{R}$ n'est donc pas transitive.
La relation $\mathcal{R}$ n'est donc pas une relation d'équivalence. Elle n'est ni réflexive, ni transitive.

Exercice 2 (Relations sur $E = \mathbb{Z}$.)

1. $x \mathcal{R} y$ ssi $2|(x - y)$ ou $3|(x - y)$.

Réponse. Réflexivité : Il faut vérifier si $x \mathcal{R} x$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$; mais $2|(x - x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, la relation est réflexive.

Symétrie : Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \mathcal{R} y$, donc tels que $2|(x - y)$ or $3|(x - y)$. Si $2|(x - y)$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 2k$, donc $y - x = 2(-k)$, donc (puisque $-k \in \mathbb{Z}$) on a $2|(y - x)$, donc $y \mathcal{R} x$. De manière similaire, si $3|(x - y)$ on obtient $3|(y - x)$, donc $y \mathcal{R} x$.
Par conséquent, la relation est symétrique.

Transitivité : on constate qu'il existe x, y, $z \in \mathbb{Z}$ tels que $2|(x - y)$ (donc $x \mathcal{R} y$), $3|(y - z)$ (donc $y \mathcal{R} z$) mais $x - z$ n'est divisible ni par 2 ni par 3 (donc $x \not\mathcal{R} z$). On peut prendre par exemple $x = 0$, $y = 3$ et $z = 5$. Cette relation n'est donc pas transitive, donc elle n'est pas une relation d'équivalence.

2. $x \mathcal{R} y$ ssi $x + y = 2$.

Réponse. Réflexivité : Il faut vérifier si $x \mathcal{R} x$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, donc si $x + x = 2$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Ceci est faux. Par exemple si $x = 0$, alors $x + x = 0 \neq 2$. Ce n'est alors pas vrai que $0 \mathcal{R} 0$, et la relation $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.

Symétrie : Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \mathcal{R} y$, donc tels que $x + y = 2$. Parce que $y + x = x + y$, il résulte que $y + x = 2$, donc que $y \mathcal{R} x$. Par conséquent, $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

Transitivité : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, donc tels que $x + y = y + z = 2$. Nous devons décider si $x \mathcal{R} z$, donc si $x + z = 2$, ou s'il est possible de trouver un contre-exemple. On commence par écrire $x + z$ (le nombre réel qu'on veut comparer à 2) en fonction de $x + y$ et $y + z$ (car on sait que ces deux nombres sont égaux à 2). On a

$$x + z = (x + y) - y + (y + z) - y = ((x + y) + (y + z)) - 2y = 4 - 2y.$$

Mais si $y \neq 1$, alors $x + z \neq 2$; on peut donc donner un contre-exemple à la transitivité de $\mathcal{R}$ en prenant $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x + y = 2$, $y + z = 2$, and $y \neq 1$, par exemple $x = z = 2$ et $y = 0$. Pour ce cas, on a $x + y = 2$ et $y + z = 2$, donc $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, mais $x + z = 4$, donc $x \mathcal{R} z$ est faux. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas une relation transitive.

La relation $\mathcal{R}$ n'est ni réflexive, ni transitive, elle n'étant par conséquent pas une relation d'équivalence.

Exercice 3 (Relations sur l'ensemble E des droites du plan)

1. $d_1 \mathcal{R} d_2$ ssi $d_1 \,||\, d_2$.

Réponse. Les propriétés élémentaires du parallélisme des droites établissent que : une droite est toujours parallèle à elle-même - et donc $\mathcal{R}$ est réflexive, que si d_1 est parallèle à d_2, alors d_2 est parallèle à d_1 - et donc que $\mathcal{R}$ est symétrique. Finalement, en utilisant l'axiome des parallèles ("Par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée") il en résulte que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles - et donc que $\mathcal{R}$ est transitive. La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

2. $d_1 \mathcal{R} d_2$ ssi $d_1 \perp d_2$.

Réponse. Les propriétés élémentaires de la relation de perpendicularité entre les droites montrent que : une droite n'est jamais perpendiculaire à elle-même - et donc $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive ; si d_1 est perpendiculaire à d_2, alors d_2 sera perpendiculaire à d_1, et donc $\mathcal{R}$ est symétrique ; si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, elle ne seront jamais perpendiculaires entre elles (mais parallèles) et donc $\mathcal{R}$ n'est pas transitive. La relation $\mathcal{R}$ n'est ni réflexive, ni transitive, donc elle n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 5

(La relation d'équivalence associée à une application) Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. La relation d'équivalence associée à f et la relation $\mathcal{R}_f$ sur E définie par :

$$x \mathcal{R}_f y \text{ ssi } f(x) = f(y).$$

Prouvez que $\mathcal{R}_f$ est bien une relation d'équivalence.

Réponse. Réflexivité : Nous avons $f(x) = f(x)$ pour tout élément $x \in E$, donc $x \mathcal{R} x$ pour tout $x \in E$, donc $\mathcal{R}_f$ est réflexive.

Symétrie : Si $f(x) = f(y)$, alors, par symétrie de l'égalité entre deux éléments de l'ensemble F, il résulte que $f(y) = f(x)$. Donc, si $x \mathcal{R} y$, alors $y \mathcal{R} x$. La relation est symétrique.

Transitivité : Soient x, y, $z \in E$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, donc tels que $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$. Par transitivité de l'égalité entre les éléments de l'ensemble F, il en résulte que $f(x) = f(z)$, donc que $x \mathcal{R} z$. La relation est donc transitive.

On peut conclure que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.