Université Aix-Marseille | Portail Descartes
Semestre 1 | 2020-2021

Planche 4
Relations d'ordre

Exercice 17

Dans chacun des cas suivants préciser, en justifiant rigoureusement, si la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, relation d'ordre. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, préciser s'il s'agit d'un ordre total ou partiel.

1. $E = \mathbb{C}$ et $z \,\mathcal{R}\, w$ ssi $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Im}(w)$.

Réponse. Cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive, donc une relation d'ordre. Les démonstrations utilisent la réflexivité, la antisymétrie et respectivement la transitivité de la relation d'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Par exemple, pour l'antisymétrie, soit $z = x + iy$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$ tels que $z \,\mathcal{R}\, w$ et $w \,\mathcal{R}\, z$. Il en résulte $x \leqslant u$, $y \leqslant v$, $u \leqslant x$, $v \leqslant y$, donc $x = u$ et $y = v$, c'est à dire $z = w$.

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel. En effet, en choisissant $z = 1$, $w = i$ on constate que $z \not\mathcal{R}\, w$ (parce que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(w)$) et $w \not\mathcal{R}\, z$ (parce que $\mathrm{Im}(w) > \mathrm{Im}(z)$).

2. $E = \mathbb{N}$ et $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi x divise y.

Réponse. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre (voir le cours et la question **??** de l'exercice **??**). C'est une relation d'ordre partiel. En effet, il suffit de remarquer que (par exemple) $2 \not\mathcal{R}\, 3$ et $3 \not\mathcal{R}\, 2$.

3. $E = \mathbb{R}$ et $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $x > y$.

Réponse. $\mathcal{R}$ est transitive et antisymétrique, mais n'est pas réflexive. La transitivité et l'antisymétrique résultent en utilisant la a transitivité et l'antisymétrique de la relation d'ordre standard sur $\mathbb{R}$.

4. $E = \mathbb{R}$ et $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $y = -x$.

Réponse. Nous avons $1 \not\mathcal{R}\, 1$ (parce que $1 \neq -1$), donc $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.
Nous avons $1 \,\mathcal{R}\, -1$ et $-1 \,\mathcal{R}\, 1$, mais $1 \not\mathcal{R}\, 1$, donc $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.
Nous avons $1 \,\mathcal{R}\, -1$ et $-1 \,\mathcal{R}\, 1$, mais $1 \neq -1$, donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
D'autre part, $y = -x \Rightarrow x = -y$, donc $x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, yx$, c'est à dire $\mathcal{R}$ est symétrique.

5. $E = \mathbb{R}$ et $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $x^2 + y^2 = 1$.

Réponse. Nous avons $0 \not\mathcal{R}\, 0$ (parce que $0^2 + 0^2 \neq 1$), donc $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.
Nous avons $0 \,\mathcal{R}\, 1$ et $1 \,\mathcal{R}\, 0$, mais $0 \not\mathcal{R}\, 0$, donc $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.
Nous avons $0 \,\mathcal{R}\, 1$ et $1 \,\mathcal{R}\, 0$, mais $0 \neq 1$, donc $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
La relation $\mathcal{R}$ est évidement symétrique. En effet, il suffit de remarque que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ (x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + x^2 = 1)\,.$$

Exercice 6

Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et r un réel, écrire avec des quantificateurs les propriétées suivantes :

1. 5 est un minorant de E.

Réponse.

$$\forall x \in E,\ 5 \leqslant x\,.$$

2. 5 est le plus petit élément de E.

Réponse.

$$(5 \in E) \wedge (\forall x \in E,\ 5 \leqslant x)\,.$$

3. 5 est la borne inférieure de E.

Réponse. ...bientôt !

4. r n'est pas un majorant de E.

Réponse.
$$\exists x \in E,\ r < x\,.$$

5. E n'admet pas de minorant.

Réponse.
$$\forall m \in \mathbb{R}\ \exists x \in E,\ x < m\,.$$

6. E n'est pas minoré.

Réponse. Condition équivalente à la précédente. "E n'est pas minoré" signifie "E n'admet pas de minorant". Donc la réponse est :
$$\forall m \in \mathbb{R}\ \exists x \in E,\ x < m\,.$$

Exercice 7

Étudier l'existence du plus grand élément, du plus petit élément, de la borne inférieure et de la borne supérieure des ensembles suivants, regardés comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$ muni de relation d'ordre usuelle $\leqslant$.

1. $E_1 = [-2, 2]$.

Réponse.
$$\min(E_1) = -2,\ \max(E_1) = 2\,.$$

2. $E_2 = [-2, 2] \cap \mathbb{N}$.

Réponse. Nous avons $E_2 = \{0, 1, 2\}$, donc $\min(E_2) = 0,\ \max(E_2) = 2\,.$

3. $E_3 = [-2, 7[\cap \mathbb{Q}$.

Réponse. Nous avons $\min(E_3) = -2$. Nous allons démontrer que E_3 n'a pas de maximum.
Supposons par l'absurde que le maximum de E_3 existe, et soit $m \in E_3$ ce maximum. Puisque $m \in [-2, 7[$ il en résulte $-2 \leqslant m < 7$. Par la propriété de densité de $\mathbb{Q}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $m < q < 7$. Mais alors $q \in [-2, 7[\cap \mathbb{Q} = E_3$, et $q > m$ ce qui contredit le fait que m est le maximum de E_3.

4. $E_4 = \{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Réponse. Nous avons
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} \geqslant 1 - \frac{1}{1} = 0\,,$$
donc $0 = \min(E_4)$. Nous allons démontrer que E_4 n'a pas de maximum.
Supposons par l'absurde que le maximum de E_4 existe, et soit $\mu \in E_4$ ce maximum. Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu = 1 - \frac{1}{N}$. Mais alors
$$E_4 \ni 1 - \frac{1}{N+1} > 1 - \frac{1}{N} = \mu\,,$$
ce qui contredit le fait que μ est le maximum de E_4.

Exercice 12

Pour les fonctions suivantes dire si elles sont minorées, majorées, bornées sur leur domaine de définition respectif ?
$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x\cos(2\pi x), \quad h(x) = \frac{x}{\sin(x)}.$$

RÉPONSE. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1\,,$$

donc la fonction f est bornée sur son domaine de définition.

Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$. Remarquer que tout $k \in \mathbb{Z}$ nous avons $\cos(2\pi k) = 1$, donc $g(k) = k$. Puisque $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré ni majoré, il en résulte que g n'est ni minorée, ni majorée sur son domaine de définition.

Le domaine de définition de h est

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} :\ \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi\,.$$

Remarquer que pour $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons $\lim_{x\nearrow 2k\pi} h(x) = -\infty$ (parce que, pour $x\nearrow 2k\pi$, $\sin(x)$ tend vers 0 par des valeurs négatives) et $\lim_{x\searrow 2k\pi} h(x) = \infty$ (parce que, pour $x\searrow 2k\pi$, $\sin(x)$ tend vers 0 par des valeurs positives). Il en résulte que h n'est ni minorée, ni majorée sur son domaine de définition.

EXERCICE 13

Soit $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

1. Donner le domaine de définition de f.

RÉPONSE. Le domaine de définition de f est $]0,\infty[$.

2. f est elle monotone ?

RÉPONSE. Sur le domaine de définition $]0,\infty[$ de f on peut écrire $f(x) = \sqrt{x}-1$. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante (même sur $[0,\infty[$), donc f est strictement croissante sur son domaine.

3. f admet elle un minorant, majorant ?

RÉPONSE. Nous avons $\forall x \in]0,\infty[,\ \sqrt{x} > 0$, donc

$$\forall x \in]0,\infty[,\ f(x) > -1\,.$$

Il en résulte que -1 est un minorant de f sur son domaine. D'autre part f n'est pas majorée sur $]0,\infty[$. Pour le démontrer on peut utiliser deux méthodes :

(1) Méthode directe : il suffit de montre que pour tout $m \in \mathbb{R}$ il existe $x \in]0,\infty[$ tel que $f(x) > m$. L'inégalité $f(x) > m$ est équivalente à $\sqrt{x} > m+1$. Si $m+1 < 0$ cette inégalité est satisfaite pour tout $x \in]0,\infty[$, donc on peut supposer $m+1 \geqslant 0$. Dans ce cas l'inégalité $\sqrt{x} > m+1$ est équivalente à $x > (m+1)^2$, qui est satisfaite pour tout $x \in](m+1)^2,\infty[$.

(2) Méthode analytique : nous avons $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ce qui implique que f n'est pas majorée.

EXERCICE 14

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{4x-4}}{\sqrt{x+1}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.

RÉPONSE. Le domaine de définition de f est défini par le système d'inéquations

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4x-4 & \geqslant & 0 \\ x+1 & > & 0 \end{array}\right.\,, \qquad (S)$$

donc coïncide avec l'intersection $[1,\infty[\cap]-1,\infty[=[1,\infty[$.

2. La fonction f admet elle un minorant, un majorant ?

RÉPONSE.

Sur son domaine de définition on a $f(x) = 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, donc on va commencer par étudier l'application

$$g : [1,\infty[\to \mathbb{R}\,,\ g(x) = \frac{x-1}{x+1}\,.$$

Nous avons

$$\forall x \in [1,\infty[\,,\ g'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

donc g est strictement croissante sur $[1,\infty[$. Il en résulte

$$\forall x \in [1,\infty[\,,\ 0 = g(1) \leqslant g(x) < \lim_{x\to\infty} g(x) = 1\,,$$

donc $\forall x \in [1,\infty[\,,\ 0 \leqslant g(x) < 1$. Puisque $f(x) = 2\sqrt{g(x)}$, il en résulte

$$\forall x \in [1,\infty[\,,\ 0 \leqslant f(x) < 2\,,$$

donc 0 est un minorant de f et 2 est un majorant de f sur son domaine.

Remarque. *On peut démontrer la monotonie croissante stricte de g avec la définition, sans utiliser la dérivée. En effet, soient $1 \leqslant x_1 < x_2$. Alors*

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} - \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = 1 - \frac{1}{x_2 + 1} - 1 + \frac{1}{x_1 + 1} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0\,,$$

(parce que $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$) donc $g(x_1) < g(x_2)$.