Université Aix-Marseille | Portail Descartes
Semestre 1 | 2020-2021

Planche 4
Relations d'ordre

Exercice 2

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. Montrer que la relation $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ sur E définie par :

$$x \,\mathcal{R}^{\mathrm{op}}\, y \text{ si et seulement si } y \,\mathcal{R}\, x$$

est aussi une relation d'ordre sur E.

Réponse. Réflexivité : soit $x \in E$. Puisque $\mathcal{R}$ est réflexive, nous avons $x \,\mathcal{R}\, x$, donc $x \,\mathcal{R}^{\mathrm{op}}\, x$.

Transitivité : soient x, y, $z \in E$ tels que $x \,\mathcal{R}^{\mathrm{op}}\, y$ et $y \,\mathcal{R}^{\mathrm{op}}\, z$. En utilisant la définition de $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ on obtient $y \,\mathcal{R}\, x$ et $z \,\mathcal{R}\, y$. Puisque $\mathcal{R}$ est transitive, il en résulte $z \,\mathcal{R}\, x$, c'est à dire $x \,\mathcal{R}^{\mathrm{op}}\, z$.

Antisymétrie : soient x, $y \in E$ tels que $x \,\mathcal{R}^{\mathrm{op}}\, y$ et $y \,\mathcal{R}^{\mathrm{op}}\, x$. En utilisant la définition de $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ on obtient $y \,\mathcal{R}\, x$ et $x \,\mathcal{R}\, y$. Puisque $\mathcal{R}$ est antisymétrique, il en résulte $x = y$

En conclusion, étant réflexive, transitive et antisymétrique, $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ est bien une relation d'ordre.

Exercice 4

On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n.$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Réponse. Réflexivité : soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons $x^1 = x$, où $1 \in \mathbb{N}$, donc $x \preccurlyeq x$.

Transitivité : soient x, y, $z \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. Soient m, $n \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^m$, $z = y^n$. Il en résulte $z = (x^m)^n = x^{mn}$, où $mn \in \mathbb{N}$, donc $x \preccurlyeq z$.

Antisymétrie : soient x, $y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. Soient m, $n \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^m$, $x = y^n$. Il en résulte $x = x^{mn}$. Nous distinguons deux cas :

1) $x = 1$. Dans ce cas la relation $y = x^m$ nous donne $y = 1$, donc dans ce cas $x = y = 1$.

2) $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Dans ce cas l'application exponentielle de base x est injective. En effet, cette application est strictement croissante si $x > 1$ et strictement décroissante si $x \in]0,1[$. En utilisant l'injectivite de l'exponentielle de base x, la relation $x = x^{mn}$ implique $mn = 1$, donc (puisque m, $n \in \mathbb{N}$) on a $m = n = 1$. Mais $y = x^m$, donc $x = y$.

La relation d'ordre $\preccurlyeq$ n'est pas une relation d'ordre total. En effet, soit $x \in]0,1[$ et $y \in]1,\infty[$. Avec ces choix nous avons $x^m \in]0,1]$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et $y^n \in [1,\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall m \in \mathbb{N},\ y \neq x^m$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ x \neq y^n$. Il en résulte $x \not\preccurlyeq y$ et $y \not\preccurlyeq x$.
Autre exemple : soit $x = 2$, $y = 3$. En comparant les décompositions en facteurs premiers on constate que $\forall m \in \mathbb{N},\ 3 \neq 2^m$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \neq 3^n$. Il en résulte $2 \not\preccurlyeq 3$ et $3 \not\preccurlyeq 2$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff \frac{x}{1+x^2} \geqslant \frac{y}{1+y^2}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

Réponse. L'application $f :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ est strictement décroissante. En effet

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,,$$

donc $\forall x \in]1,\infty[\,,\ f'(x) < 0$. D'après la remarque **??**(2) nous avons l'équivalence $f(x) \geqslant f(y) \Leftrightarrow x \leqslant y$, c'est à dire

$$\frac{x}{1+x^2} \geqslant \frac{y}{1+y^2} \Leftrightarrow x \leqslant y\,.$$

Donc $\mathcal{R}$ coïncide avec la relation d'ordre standard sur $]1,+\infty[$, qui est bien une relation d'ordre total.