Planche 4
Relations d'ordre

Exercice 6 (suite et fin)
Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et r un réel, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :
QUESTION 3. 5 est la borne inférieure de E.

Réponse. Nous avons deux manières d'exprimer cette conditions :

$$\big(\forall x \in E,\ 5 \leqslant x\big) \wedge \big(\forall m \in \mathbb{R}(\forall x \in E,\ m \leqslant x) \Rightarrow m \leqslant 5\big)\,,$$

$$\big(\forall x \in E,\ 5 \leqslant x\big) \wedge \big(\forall m \in \mathbb{R}((5 < m) \Rightarrow \exists x \in E,\ x < m)\big)\,.$$

Exercice 7 (correction intégrale)
Étudier l'existence du plus grand élément, du plus petit élément, de la borne inférieure et de la borne supérieure des ensembles suivants, regardés comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$ muni de relation d'ordre usuelle $\leqslant$.

Réponse. Rappelons que, si un sous-ensemble E d'un ensemble ordonné admet un maximum (minimum), alors ce maximum (minimum) est aussi la borne supérieure (respectivement la borne inférieure) de E. Rappelons aussi que pour tout sous-ensemble non-vide majoré (respectivement minoré) $E \subset \mathbb{R}$ (muni de la relation d(ordre standard) la borne supérieure $\sup(E)$ (respectivement la borne inférieure $\inf(E)$) existe. En particulier $\sup(E_i)$, $\inf(E_i)$ existent pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

1. $E_1 = [-2, 2]$.

Réponse.

$$\min(E_1) = \inf(E_1) = -2,\ \max(E_1) = \sup(E_1) = 2\,.$$

2. $E_2 = [-2, 2] \cap \mathbb{N}$.

Réponse. Nous avons $E_2 = \{0, 1, 2\}$, donc

$$\min(E_2) = \inf(E_2) = 0,\ \max(E_2) = \sup(E_2) = 2\,.$$

3. $E_3 = [-2, 7[\cap \mathbb{Q}$.

Réponse. Nous avons $\min(E_3) = \inf(E_3) = -2$. Nous allons démontrer que

(1) E_3 n'a pas de maximum.

(2) $\sup(E_3) = 7$.

Pour (1) supposons par l'absurde que le maximum de E_3 existe, et soit $m \in E_3$ ce maximum. Puisque $m \in [-2, 7[$ il en résulte $-2 \leqslant m < 7$. Par la propriété de densité de $\mathbb{Q}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $m < q < 7$. Mais alors $q \in [-2, 7[\cap\mathbb{Q} = E_3$, et $q > m$ ce qui contredit le fait que m est le maximum de E_3.

Pour (2) remarquons d'abord que 7 est un majorant de E_3. Nous devons démontrer que 7 est le plus petit majorant de E_3. Supposons par l'absurde qu'il existe un majorant m de E_3 tel que $m < 7$. Il en résulte $\max(-2, m) < 7$ et, par la propriété de densité de $\mathbb{Q}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\max(-2, m) < q < 7$. Il en résulte $q \in [-2, 7[\cap\mathbb{Q} = E_3$ et $q > m$, ce qui contredit le fait que m est un majorant de E_3.

4. $E_4 = \{1 - \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

RÉPONSE. Nous avons
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1-\frac{1}{n} \geqslant 1-\frac{1}{1}=0\,,$$
donc $0=\min(E_4)=\inf(E_4)$. Nous allons démontrer que

(1) E_4 n'a pas de maximum.

(2) $\sup(E_4)=1$.

Pour (1), supposons par l'absurde que le maximum de E_4 existe, et soit $\mu \in E_4$ ce maximum. Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu = 1-\frac{1}{N}$. Mais alors
$$E_4 \ni 1-\frac{1}{N+1} > 1-\frac{1}{N}=\mu\,,$$
ce qui contredit le fait que μ est le maximum de E_4.

Pour (2), remarquons d'abord que 1 est un majorant de E_4. Nous devons démontrer que 1 est le plus petit majorant de E_4. Supposons par l'absurde qu'il existe un majorant μ de E_4 tel que $\mu<1$. Nous affirmons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\frac{1}{N} < 1-\mu\,. \tag{1}$$
En effet, cette inégalité est équivalente à $N > \frac{1}{1-\mu}$, donc il suffit de prendre $N=\left[\frac{1}{1-\mu}\right]+1$. L'inégalité (1) est équivalente à $\mu < 1-\frac{1}{N}$; mais $1-\frac{1}{N} \in E_4$, donc cette dernière inégalité contredit le fait que μ est un majorant de E_4.

EXERCICE 8

Soit E un ensemble, et soit $(\mathscr{P}(E),\subset)$ l'ensemble des parties de E ordonné par l'inclusion.

1. Démontrer que le maximum de $\mathscr{P}(E)$ est E, et le minimum de $\mathscr{P}(E)$ est $\varnothing$.

RÉPONSE. En effet, par la définition de $\mathscr{P}(E)$ nous avons
$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \subset E\,,$$
donc E est le maximum de $\mathscr{P}(E)$. En plus, par la définition de $\varnothing$ nous avons
$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \varnothing \subset A\,,$$
donc $\varnothing$ est le minimum de $\mathscr{P}(E)$.

2. Supposons que E a au moins deux éléments, et posons $\mathscr{P}^*(E) := \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing, E\}$. Préciser les éléments minimaux et les éléments maximaux de $(\mathscr{P}^*(E),\subset)$. Est-ce que les éléments minimaux (maximaux) de cet ensemble ordonné sont des minimums (respectivement maximums) ?

RÉPONSE. On va démontrer que les éléments minimaux de $\mathscr{P}^*(E)$ sont les singletons de la forme $\{x\}$ où $x \in E$:

1. Pour tout $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est un élément minimal de $\mathscr{P}^*(E)$.

   En effet, soit $x \in E$, et soit $A \in \mathscr{P}^*(E)$ tel que $A \subset \{x\}$. Il en résulte $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(\{x\})=1$ donc $\mathrm{card}(A) \in \{0,1\}$. Le cas $\mathrm{card}(A)=0$ implique $A=\varnothing$, ce qui contredit $A \in \mathscr{P}^*(E)$. Donc $\mathrm{card}(A)=1$, c'est à dire A est un sous-ensemble de cardinal 1 de $\{x\}$, donc $A=\{x\}$.
2. Tout élément minimal de $\mathscr{P}^*(E)$ est un singleton.

   Soit $A \in \mathscr{P}^*(E)$ un élément minimal. Puisque $\varnothing \notin \mathscr{P}^*(E)$, A contient au moins un élément. Si, par l'absurde, A n'était pas un singleton, A va contenir deux éléments distincts a, b. Mais alors l'inclusion $\{a\} \subset A$ est stricte, ce qui contredit le fait que A est un élément minimal de $\mathscr{P}^*(E)$.

Les éléments maximaux de $\mathscr{P}^*(E)$ sont les complémentaires des singletons, c'est à dire les parties de la forme $E\backslash\{x\}$ où $x \in E$. Pour le démontrer il suffit de remarquer que A est un élément maximal de $\mathscr{P}^*(E)$ si et seulement si ${}^cA$ est un élément minimal de $\mathscr{P}^*(E)$. La démonstration utilise le fait que l'application
$$\mathscr{P}^*(E) \ni X \mapsto {}^cX \in \mathscr{P}^*(E)$$
est bijective et, pour X, $Y \in \mathscr{P}^*(E)$, nous avons l'équivalence
$$X \subset Y \Leftrightarrow {}^cY \subset {}^cX\,.$$
Est-ce que les éléments minimaux (maximaux) de cet ensemble ordonné sont des minimums (respectivement maximums) ?

Aucun élément minimal de $\mathscr{P}^*(E)$ n'est le minimum de $\mathscr{P}^*(E)$. En effet, soit $\{x\}$ un élément minimal de $\mathscr{P}^*(E)$ où $x \in E$. Puisque E a au moins deux éléments, il existe $y \in E$ tel que $x \neq y$. Nous avons $\{x\} \not\subset \{y\}$, donc le singleton $\{x\}$ n'est le minimum de $\mathscr{P}^*(E)$.

De même, en passant au complémentaire, on montre qu'aucun élément maximal de $\mathscr{P}^*(E)$ n'est le maximum de $\mathscr{P}^*(E)$.

EXERCICE 9

On considère $\mathbb{N}^*$ muni de la relation de divisibilité définie par : $a \mid b$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b=ka$.

1. Vérifier que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

Réponse. Réflexivité : Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ on a $a = a \cdot 1$, donc $a \mid a$.

Transitivité : Soient a, b, $c \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \mid b$ et $b \mid c$, et soient k, $l \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = ka$ et $c = lb$. Il en résulte $c = lka$ (où $lk \in \mathbb{N}^*$), donc $a \mid c$.

Antisymétrie : Soient a, $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \mid b$ et $b \mid a$, et soient k, $l \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = ka$ et $a = lb$. Il en résulte $a = lka$, c'est à dire $a(1 - lk) = 0$, donc (puisque $a \neq 0$!) on a $lk = 1$. Ceci implique $k = l = 1$, donc $b = a \cdot 1 = a$.

2. Soient a et $b \in \mathbb{N}^*$. Préciser les bornes $\sup_{|}\{a, b\}$ et $\inf_{|}\{a, b\}$ de l'ensemble $\{a, b\}$ dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, |)$.

Réponse. On a

$$\sup_{|}\{a, b\} = \mathrm{ppcm}(a, b),\ \inf_{|}\{a, b\} = \mathrm{pgcd}(a, b)\,.$$

Dans $\mathbb{N}^*$ on peut calculer $\mathrm{pgcd}(a, b)$, $\mathrm{ppcm}(a, b)$ en utilisant les décompositions de a et b en produit de facteurs premiers. Rappelons aussi que, pour a, $b \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(a, b)$ (respectivement $\mathrm{ppcm}(a, b)$) coïncide avec *le plus grand* commun diviseur (respectivement *le plus petit* commun multiple) de a et b au sens de l'ordre usuel $\leqslant$ sur $\mathbb{N}^*$.

3. L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ admet-il un plus grand élément ou un plus petit élément par rapport à la relation de divisibilité ? Quels sont les éléments minimaux et les éléments maximaux de A par rapport à cette relation ?

Réponse.
Nous avons $\forall a \in A,\ 1 \mid a$, donc 1 est le plus petit élément (le minimum) de A par rapport à $|$. Étant le minimum de A, il est aussi l'unique élément minimal de A.

Les éléments maximaux de A par rapport à $|$ sont 6, 7, 8, 9 et 10.
En effet, soit $x \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Tout élément de A qui est divisible par x coïncide avec x, donc x est bien un élément maximal de A par rapport à $|$. Réciproquement, soit m un élément maximal de A. Nous avons $m \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$ parce que pour tout $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ il existe $a_x \in A$ tel que $x \mid a_x$ et $x \neq a_x$. Il suffit de prendre $a_x = 2x$.

L'ensemble A n'admet pas un plus grand élément par rapport à $|$. En effet, pour tout $a \in A$ il existe $b_a \in A$ qui ne divise pas a. Par exemple on peut prendre $b_{10} = 3$, $b_9 = 5$, $b_8 = 3$, $b_7 = 2$, $b_6 = 5$.

On peut aussi utiliser un argument général : si un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ admet un maximum, alors ce maximum sera le seul élément maximal de $(E, \preccurlyeq)$. Il en résulte que, si un ensemble ordonné admet deux éléments maximaux différents, il n'admet pas de maximum.

4. L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, |)$ admet-il un plus grand élément ?

Réponse. La réponse est NON. En effet, supposons par l'absurde que le maximum $N \in \mathbb{N}^*$ existe. Nous avons $\mathbb{N}^* \ni 2N \nmid N$, ce qui contredit le fait que N est le maximum de $\mathbb{N}^*$ par rapport à $|$.

Attention à la question analogue formulée pour l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, |)$ (voir la question **??**).

5. L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, |)$ admet-il un plus petit élément ?

Réponse. La réponse est OUI. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons $1 \mid n$, donc 1 est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ au sens de la relation d'ordre $|$.

Exercice 10

Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E muni de la relation d'inclusion $\subset$. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$.

1. Sous quelle condition le maximum $\max\{A, B\}$ existe ? Sous quelle condition le minimum $\min\{A, B\}$ existe ?

Réponse. Supposons que le maximum $U = \max\{A, B\}$ existe. Par définition le maximum d'une ensemble ordonné est élément de l'ensemble considéré, donc dans notre cas on a $U = A$ ou $U = B$. Dans le premier cas la condition "U est maximum" devient $B \subset A$, et dans le deuxième cas la condition "U est maximum" devient $A \subset B$. Réciproquement si $A \subset B$ ou $B \subset A$ le maximum $\max\{A, B\}$ évidemment existe.

En conclusion :

Le maximum $\max\{A, B\}$ existe si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

De même :

Le minimum $\min\{A, B\}$ existe si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.

2. Montrer que les bornes $\sup\{A, B\}$, $\inf\{A, B\}$ existent et préciser ces bornes.

Réponse. Nous allons démontrer que
(1) $\sup\{A, B\} = A \cup B$.
(2) $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

L'égalité (1) est équivalente à la conjonction des conditions :

(1a) $A \cup B$ est un majorant $\{A, B\}$, c'est à dire $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (évident par la définition de la réunion).

(1b) $A \cup B$ est le plus petit majorant $\{A, B\}$, c'est à dire

$$\forall X \in \mathscr{P}(E) \ \big((A \subset X) \wedge (B \subset X) \Rightarrow (A \cup B \subset X)\big) .$$

Soit donc $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $A \subset X$ et $B \subset X$. On va démonter $A \cup B \subset X$. En effet, pour tout $x \in A \cup B$ nous avons $x \in A$ ou $x \in B$. Dans le premier cas l'inclusion $A \subset X$ donne $x \in X$, et dans le deuxième cas l'inclusion $B \subset X$ donne aussi $x \in X$. L'inclusion $A \cup B \subset X$ est démontrée.

L'égalité (2) est équivalente à à la conjonction des conditions :

(2a) $A \cap B$ est un minorant $\{A, B\}$, c'est à dire $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ (évident par la définition de l'intersection).

(2b) $A \cap B$ est le plus grand minorant $\{A, B\}$, c'est à dire

$$\forall X \in \mathscr{P}(E) \ \big((X \subset A) \wedge (X \subset B) \Rightarrow (X \subset A \cap B)\big) .$$

Soit donc $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \subset A$ et $X \subset B$. On va démonter $X \subset A \cap B$. En effet, soit $x \in X$. L'inclusion $X \subset A$ donne $x \in A$ et l'inclusion $X \subset B$ donne $x \in B$, donc $x \in A \cap B$. L'inclusion $X \subset A \cap B$ est démontrée.

3. Considérons le cas particulier $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. Préciser $\sup\{A, B\}$, $\inf\{A, B\}$. Est-ce que $\max\{A, B\}$, $\min\{A, B\}$ existent ?

Réponse. D'après la question 2 :

$$\sup\{A, B\} = A \cup B = \{1, 2, 3\} , \ \inf\{A, B\} = A \cap B = \{2\} .$$

Nous avons $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$ donc, d'après la question 1, ni $\max\{A, B\}$, ni $\min\{A, B\}$ n'existe.