Planche 5

Relations d'équivalence

Exercice 9

Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes) définie par :

$$z \,\mathcal{R}\, z' \text{ ssi } |z| = |z'|.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que la relation $\mathcal{R}$ soit de la forme $\mathcal{R}_f$.

Réponse. On remarque que, en choisissant $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(z) = |z|$ on a bien $\mathcal{R}$=$\mathcal{R}_f$.

2. Déterminer $[z_0]$, la classe d'équivalence d'un élément z_0 de $\mathbb{C}$.

Réponse. On a

$$[z_0] = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = |z_0|\}.$$

Remarquer que, en posant $z = x + iy$, la condition $|z| = |z_0|$ est équivalente à $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, où $R := |z_0|$. Si $z_0 \neq 0$, alors $R = |z_0| > 0$, et $[z_0]$ est le cercle d'équation $|z| = R$, où $R := |z_0|$. Si $z_0 = 0$, alors $[z_0]$ est le singleton $\{0\}$.

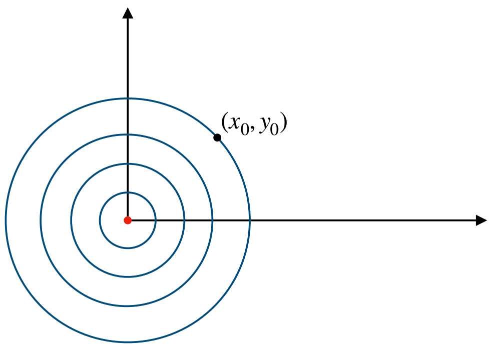

Figure 1 – Les classes d'équivalence par rapport à $\mathcal{R}$.

Exercice 12

Soit $f : E \to F$ une application, et soit $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence associée à f, définie à l'exercice **??**. Montrer que :

1. L'application f est compatible avec $\mathcal{R}_f$.

Réponse. Pour un couple $(x, y) \in E \times E$ nous devons vérifier l'implication

$$x \,\mathcal{R}_f\, y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Mais, par la définition de $\mathcal{R}_f$ nous avons même l'équivalence $x \,\mathcal{R}_f\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

2. L'application induite par f sur $E/\mathcal{R}_f$ met l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}_f$ en bijection avec $\mathrm{Im}(f)$.

Réponse. L'application $\bar{f} : E/\mathcal{R}_f \to F$ induite par f sur $E/\mathcal{R}_f$ est définie par

$$\bar{f}([x]) = f(x).$$

On va montrer d'abord que $\bar{f} : E/\mathcal{R}_f \to F$ est injective. En effet, soient $[x]$, $[y] \in E/\mathcal{R}_f$. Nous avons

$$\bar{f}([x]) = \bar{f}([y]) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \,\mathcal{R}_f\, y \Leftrightarrow [x] = [y].$$

Donc $\bar{f}$ est injective. Montrons à présent que chaque élément de $\mathrm{Im}(f)$ admet un antécédent par $\bar{f}$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Considérons $[x]$. Nous avons que $\bar{f}([x]) = f(x) = y$; autrement-dit, $[x]$ est un antécédent de y par $\bar{f}$. La fonction $\bar{f} : E/\mathcal{R}_f \to \mathrm{Im}(f)$ est donc surjective ; puisqu'elle est aussi injective, on en conclut qu'elle est bijective.

Exercice 13

Considérons les relations d'équivalence des exercices $8-11$. Dans chaque cas préciser un ensemble $Q \subset \mathbb{R}$ qui peut être identifié avec l'ensemble quotient par la relation d'équivalence donnée. Préciser le résultat général utilisé et la bijection qui donne cette identification.

Réponse. Dans chacun des exercices $8-11$ la relation donnée est associée à une application $f : E \to \mathbb{R}$. D'après l'exercice 12 la co-restriction $\overline{f}^{\mathrm{Im}(f)}$ est une bijection $E/\mathcal{R}_f \to \mathrm{Im}(f)$, donc nous permet d'identifier l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}_f$ avec $Q \coloneqq \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. Les réponses sont données dans le tableau ci-dessous :

numéro d'exercice	f	$Q = \mathrm{Im}(f)$
8	$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x$	$\mathbb{R}$
9	$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f(z) = \lvert z\rvert$	$[0, +\infty[$
10	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x$	$[-\frac{1}{4}, +\infty[$
11	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^{-x}$	$]-\infty, e^{-1}]$

.