**Planche 2**

Vocabulaire de la théorie des ensembles

# 1 Inclusion, égalité, réunion, intersection, complémentaire

Pour tout sous-ensemble $X \subset E$ on dénote le complément $E \setminus X$ par ${}^cX$.

**Exercice 1**

Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Pour chaque paire d'objets, déterminer si le premier appartient ($\in$) ou pas ($\notin$) ou alors s'il est contenu ($\subset$) ou pas ($\not\subset$) dans le deuxième.

1. $a$, $E$ ;
2. $E$, $E$ ;
3. $\{a\}$, $\{a, c\}$ ;
4. $\{c\}$, $\{a, b\}$ ;
5. $\emptyset$, $\{b, c\}$ ;
6. $b$, $\{a, c\}$ ;
7. $\{a, b\}$, $\{a, c, d\}$.

**Exercice 2**

Déterminer toutes les inclusions et toutes les identités entre les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0\}, \quad B = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \text{ et } b \text{ pair}\}, \quad C = \{y \in \mathbb{R} : y^2 = -4\}, \quad D = \mathbb{Q}, \quad E = \emptyset.$$

**Exercice 3**

Soient $A$, $B$, $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$. Montrer les affirmations suivantes :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow {}^cB \subset {}^cA$.
3. ${}^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$.
4. ${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$.
5. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

**Exercice 4**

Expliciter les ensembles suivants :

$$E = \{x \in [0,1] \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : x < 1/n\}, \quad F = \{x \in [0,1] \mid \forall n \in \mathbb{N}^*\ x < 1/n\},$$
$$G = \{x \in [0,1] \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : x \geqslant 1/n\}, \quad H = \{x \in [0,1] \mid \forall n \in \mathbb{N}^*\ x \geqslant 1/n\}.$$

# 2 Ensemble des parties

**Exercice 5**

1. Donner une liste de tous les sous-ensembles de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Même question pour l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.
2. Donner une liste de tous les éléments de l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{0, 1\}))$.

**Exercice 6**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

1. Comparer par inclusion $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$ et $\mathscr{P}(E \cap F)$.
2. Même question pour $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$ et $\mathscr{P}(E \cup F)$.

# 3 Produit cartésien

**Exercice 7**

Soient $A$, $B$, $C$, $D$ les ensembles $A = [1, 4]$, $B = [3, 6]$, $C = [2, 5]$ et $D = \{2\}$.

1. Tracer dans $\mathbb{R}$ les ensembles suivants : $A \cup C$, $A \cap B$, $A \setminus D$.
2. Tracer dans $\mathbb{R}^2$ les ensembles suivants : $(A \cap B) \times A$, ${}^cB \times (A \cup C)$, $(A \setminus D) \times D$.

**Exercice 8**

Montrer que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

## 4 Exercices complémentaires

**Exercice 9**
Soit $[t, \infty[ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant t\}$. Déterminer $A = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} [t, \infty[$ et $B = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} [t, \infty[$.

**Exercice 10**
Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Pour chaque paire d'objets, déterminer si le premier appartient ($\in$) ou pas ($\notin$) ou alors s'il est contenu ($\subset$) ou pas ($\not\subset$) dans le deuxième. Seules les réponses cohérentes sont demandées. Plusieurs réponses sont possibles.

1. $a$, $\emptyset$ ;
2. $E$, $E$ ;
3. $\{a\}$, $\{a, c\}$ ;
4. $\{c\}$, $\{a, b\}$ ;
5. $\emptyset$, $\{b, c\}$ ;
6. $\emptyset$, $\{\emptyset, E\}$ ;
7. $E$, $\mathscr{P}(E)$ ;
8. $\emptyset$, $\mathscr{P}(E)$ ;
9. $\{\emptyset, E\}$, $\mathscr{P}(E)$.

**Exercice 11**
Soient $A$, $B$, $C$ des sous-ensembles d'un ensemble $E$. Montrer les affirmations suivantes :
1. $A \cup B \cup C = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus C) \cup (C \smallsetminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.
2. Si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$ alors $B \subset C$. Que peut-on dire de l'autre implication réciproque ?

**Exercice 12**
Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble fini $E$. On sait que 58% des éléments de $E$ appartiennent à $A$ et 78% à $B$. Que peut-on dire du pourcentage d'éléments de $E$ qui appartiennent à $A \cap B$ ?

**Exercice 13**
Soient $p$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Rappelons que le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est défini par

$$\binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre a une interprétation importante : c'est le nombre des sous-ensembles à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments. Démontrer, éventuellement par récurrence

1. (La formule de Pascal) :
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$
2. (La formule itérée de Pascal) :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$
où $n \geqslant p$. En déduire une formule explicite pour la somme $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $p \in \{1, 2, 3\}$.
3. (La formule du binôme de Newton) : Soient $x$, $y \in \mathbb{R}$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$
En déduire les identités : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^k$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

4. * (La formule du binôme de Vandermonde) : Soient $m$, $n$, $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant m + n$. Alors
$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}.$$
*Indication : Utiliser l'identité $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ et la formule du binôme de Newton.*

**Exercice 14**
1. Montrer par récurrence qu'un ensemble à $n$ éléments possède $2^n$ sous-ensembles.
2. Montrer par récurrence qu'un ensemble à $n$ éléments possède $\binom{n}{k}$ sous-ensembles ayant $k$ éléments, $k = 0, \ldots, n$. En déduire l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

**Exercice 15**
Soient $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$ des ensembles non vides.
1. Montrer que $A \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D)$ et $A \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (A \times D)$.

2. Montrer que ${}^c(A \times C) = ({}^cA \times C) \cup (A \times {}^cC) \cup ({}^cA \times {}^cC)$.
3. A-t-on les égalités suivantes ? $(A \cap B) \times (C \cap D) = A \times C \cap B \times D$ ; $(A \cup B) \times (C \cup D) = A \times C \cup B \times D$.

**Exercice 16**

Soit $E$ un ensemble. On appelle *topologie sur* $E$ un sous-ensemble $T$ de $\mathscr{P}(E)$ satisfaisant : (i) $\emptyset \in T$ et $E \in T$, (ii) si $A, B \in T$ alors $A \cap B \in T$, (iii) si $V \subset T$ alors $\cup_{A \in V} A \in T$. Pour les ensembles $E$ suivants, montrer que le $T$ specifié est bien une topologie sur $E$ :

1. $E$ quelconque (non vide) et $T = \{\emptyset, E\}$ (*topologie triviale*).
2. $E$ quelconque (non vide) et $T = \mathscr{P}(E)$ (*topologie discrète*).
3. $E = \mathbb{N}$ et $T = \{\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.
4. $E$ quelconque, non vide et $T = \{A \subset E : {}^cA \text{ est un ensemble fini}\} \cup \{\emptyset\}$ (*topologie des compléments finis*).

**Exercice 17**

Soit $E$ un ensemble et soit $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Pour $A$ et $B$ dans $\mathscr{P}(E)$, on appelle *différence symétrique de $A$ et $B$* l'ensemble, noté $A \,\Delta\, B$, défini par : $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Montrer que $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A \,\Delta\, A$, $A \,\Delta\, \emptyset$, $A \,\Delta\, E$ et $A \,\Delta\, {}^cA$.
3. Pour tous $A$, $B$ et $C$ dans $\mathscr{P}(E)$ montrer :
   (a) ${}^c((A \cap {}^cB) \cup (B \cap {}^cA)) = ({}^cA \cap {}^cB) \cup (A \cap B)$ ;
   (b) $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = (A \cap {}^cB \cap {}^cC) \cup (B \cap {}^cC \cap {}^cA) \cup (C \cap {}^cA \cap {}^cB) \cup (A \cap B \cap C)$ ;
   (c) $A \,\Delta (B \,\Delta\, C) = (B \,\Delta\, C) \,\Delta\, A$ ;
   (d) $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = (B \,\Delta\, C) \,\Delta\, A$ (utiliser (b)) ;
   (e) $A \,\Delta (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$.