Planche 3
Fonctions, applications

1 Domaines et compositions

Exercice 1
On donne $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Soient f et g les fonctions de E dans F et de F dans E respectivement définies de la manière suivante : $f(b) = 3,\ f(c) = 4,\ f(d) = 2$ et $g(1) = a,\ g(2) = b,\ g(3) = c$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2
Considérons les fonctions f et g données par les formules $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ pour x réel.

1. Déterminer les plus grands sous-ensemble (au sens de l'inclusion) de $\mathbb{R}$ sur lesquels les fonctions suivantes sont définies : f, g, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$.
2. Calculer $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$. Conclure.

2 Image directe, image réciproque

Exercice 3
On donne $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer $f(\{a, b, c\})$ et $f^{-1}(\{1, 3\})$ pour les applications $f : E \to F$ suivantes :

1. $f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 4,\ f(d) = 2$;
2. $f(a) = f(b) = 2,\ f(c) = f(d) = 3$;
3. $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 2$.

Exercice 4
On donne les fonctions réelles f et g en spécifiant $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1. Déterminer les domaines de définition de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Déterminer l'ensemble image (c'est-à-dire l'image de leur domaine de définition) de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5
Soit $f : E \to F$ une application, et soient A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et trouver un exemple qui montre que l'inclusion peut être propre.

Exercice 6
Soit $f : E \to F$ une application, et soient C et D deux parties de F.

1. Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
2. Démontrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

Exercice 7
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer les implications suivantes :

1. f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ est injective.
2. f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ est surjective.
3. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ est surjective. Trouver un exemple où f n'est pas surjective.
4. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ est injective. Trouver un exemple où g n'est pas injective.

Exercice 8
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer : (i) $f([-1,1])$, (ii) $\mathrm{Im}(f)$, (iii) $f^{-1}([0,1])$, (iv) $f^{-1}(]-\infty,0])$.
2. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 9
Soient A un ensemble et $\mathcal{F}(A,\{0,1\})$ l'ensemble des applications $f : A \to \{0,1\}$. On définit une application $\sigma : \mathcal{F}(A,\{0,1\}) \to \mathscr{P}(A)$ de la façon suivante : $\sigma(f) = f^{-1}(\{1\})$. Montrer que σ est une bijection. Étudier en détail le cas $A = \emptyset$.

4 Réciproque

Exercice 10
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Rappeler la définition d'application bijective, puis justifier que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 11
On considère l'application $f : [-1,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie par $f(x) = (x+1)^2$. Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

Exercice 12
On considère l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Montrer que g est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

Exercice 13
On considère l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2 + 2x$.

1. Est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer deux intervalles I et J tels que l'application $\tilde{h} : I \to J$, définie par $\tilde{h}(x) = x^2 + 2x$ soit bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

5 Exercices complémentaires

Exercice 14
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Exprimer les négations des assertions suivantes.
Trouver une fonction qui vérifie la propriété, puis une fonction qui vérifie sa négation.

1. $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
2. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I,\ f(x) = y$.
3. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M$.
4. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
5. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
6. $\forall x \in I,\ f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 15
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas une fonction constante.
4. La fonction f présente un minimum.
5. La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 16
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = C$.
2. $\forall x \in I,\ (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
3. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ \big(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\big)$.
4. $\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ \big(x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\big)$.

Exercice 17
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

1. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
2. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 18
Choisir et représenter graphiquement une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) < x$.

Exercice 19
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Exprimer formellement (en langage mathématique) chacune des affirmations suivantes sur f et sa négation. Dans chaque cas trouver un exemple de fonction qui vérifie l'affirmation et un exemple de fonction qui vérifie sa négation.

1. La fonction f est majorée.
2. La fonction f est bornée.
3. La fonction f ne s'annule jamais.
4. La fonction f est croissante.
5. La fonction f est décroissante et positive
6. La fonction f est périodique.
7. Les valeurs de la fonction f sont $\leqslant 1$.
8. Il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.
9. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

Exercice 20
Soit $f : E \to F$ une application, et soient A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f est injective.
2. Démontrer que si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour toutes parties $A, B \subset E$, alors f est injective.

Exercice 21
L'application suivante est-elle injective, surjective, bijective ?

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Exercice 22
Soit $f : A \to \mathscr{P}(A)$ une application d'un ensemble A vers son ensemble des parties $\mathscr{P}(A)$. On définit *l'ensemble de Cantor associé à* f, noté $\mathcal{C}_f$, par :

$$\mathcal{C}_f := \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

1. Montrer que pour tout $a \in A$ on a l'inégalité $f(a) \neq \mathcal{C}_f$.
2. En déduire qu'il n'existe aucun ensemble A qui admet une application surjective $f : A \twoheadrightarrow \mathscr{P}(A)$.
3. Montrer le même énoncé pour A fini en utilisant les faits connus (voir l'exercice 10, question 3, de la planche TD2) regardant la cardinalité de A et $\mathscr{P}(A)$.
4. Discuter une possible définition de $\mathrm{card}(A)$ pour les ensembles infinis A.

Exercice 23
Soit $f : E \to E$ une application et soient $A \subset E$ et $B \subset F$ des sous-ensembles.

1. Montrer que $A \mapsto f(A)$ définit une application $\mathscr{P}f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$.
2. Montrer que $B \mapsto f^{-1}(B)$ définit une application $\mathscr{P}f^{-1} : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$.
3. Donner une preuve ou trouver un contre-exemple pour $\mathscr{P}f \circ \mathscr{P}f^{-1} = id_{\mathscr{P}(F)}$.
4. Donner une preuve ou trouver un contre-exemple pour $\mathscr{P}f^{-1} \circ \mathscr{P}f = id_{\mathscr{P}(E)}$.

Exercice 24
On considère les fonctions réelles f_n (où $n = 1, \ldots, 5$) suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \\ 0, & x > 2\pi \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \ln x, & x \geqslant e \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} (x-2)/(x^2-2x+2), & x < 0 \\ x^2+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f_5(x) = |x - 2k| \text{ où } k \in \mathbb{Z} \text{ est l'unique valeur telle que } x \in \left]2k-1; 2k+1\right].$$

Pour chacune de ces fonctions :

1. donner l'ensemble de définition et spécifier s'il s'agit d'une application ;
2. dessiner le graphe ;
3. établir si la fonction est (a) injective, (b) surjective, (c) bijective ; si elle est bijective, donner l'application réciproque ; si elle est injective donner la fonction réciproque dont on spécifiera l'ensemble de définition ;
4. déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}([0,1])$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$;
5. dire si, sur son ensemble de définition, la fonction est : majorée, minorée, bornée, monotone (en spécifiant quel type), périodique.

Exercice 25

Soit f une application de E dans F avec $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. Donner les définitions de $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f(f^{-1}(B))$ et $f^{-1}(f(A))$.
2. Donner $f^{-1}(B)$ quand $f = \sin$, et $B = \left]-1/2; 1/2\right[$ ($E = F = \mathbb{R}$). De même, donner $f(f^{-1}(B))$ quand $f = \tan$, et $B = \left]0; 1\right[$ ($E = \left]-\pi/2; \pi/2\right[$ et $F = \mathbb{R}$).
3. Établir si $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
4. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
5. Établir si $A = f^{-1}(f(A))$.

Exercice 26

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^2+1)$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Donner les plus grands intervalles E et F de $\mathbb{R}$ tels que la fonction $g : E \to F$ définie par $g(x) = \ln(x^2+1)$ soit bijective et $1 \in E$. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).

Exercice 27

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x^2+1}$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Donner les plus grands intervalles E et F de $\mathbb{R}$ tels que la fonction $g : E \to F$ définie par $g(x) = e^{x^2+1}$ soit bijective et $1 \in E$. Justifier soigneusement et donner sa fonction inverse (réciproque).

Exercice 28

Soit $f \ : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$.

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Préciser deux intervalles $E \subset \left]-1, 1\right[$ et $F \subset \mathbb{R}$ (qui ne sont pas des singletons) tels que l'application $g : E \to F$ définie par $g(x) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ soit bijective. Justifier soigneusement et donner l'application réciproque.

Exercice 29

Soient E, F deux ensembles. Désignons par F^E l'ensemble des applications $f : E \to F$. Montrer que, si E et F sont finis, alors $\mathrm{card}(F^E) = \mathrm{card}(F)^{\mathrm{card}(E)}$. *Indication : récurrence par rapport à* $\mathrm{card}(E)$.