Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Portail Descartes
2020-2021

Planche 4
Relations d'ordre

1 Relations binaires

Exercice 1
Parmi les relations suivantes sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont des relations d'ordre ?

1. $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $e^x \leqslant e^y$.
2. $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $|x| \leqslant |y|$.
3. $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{N}$.
4. $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. Montrer que la relation $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ sur E définie par :

$$x \mathcal{R}^{\mathrm{op}} y \text{ si et seulement si } y \mathcal{R} x$$

est aussi une relation d'ordre sur E.

Exercice 3
Soient E un ensemble et $K \subset E$ fixé. Pour les relations suivantes sur $\mathscr{P}(E)$, dire lesquelles sont des relations d'ordre :

1. $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $A = B$.
2. $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $A \subset B$.
3. $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $A \cap K \subset B \cap K$.
4. $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $K \subset A \cap {}^cB$.
5. $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $K \subset A \cup {}^cB$.

Exercice 4
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n.$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 5
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$x \mathcal{R} y \iff \frac{x}{1+x^2} \geqslant \frac{y}{1+y^2}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

2 Majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure, élement maximal, élément minimal

Exercice 6
Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et r un réel, écrire avec des quantificateurs les propriétées suivantes :

1. 5 est un minorant de E.
2. 5 est le plus petit élément de E.
3. 5 est la borne inférieure de E.
4. r n'est pas un majorant de E.
5. E n'admet pas de minorant.
6. E n'est pas minoré.

EXERCICE 7
Étudier l'existence du plus grand élément, du plus petit élément, de la borne inférieure et de la borne supérieure des ensembles suivants, regardés comme sous-ensembles de $\mathbb{R}$ muni de relation d'ordre usuelle $\leqslant$.

1. $E_1 = [-2, 2]$.
2. $E_2 = [-2, 2] \cap \mathbb{N}$.
3. $E_3 = [-2, 7[\cap \mathbb{Q}$.
4. $E_4 = \{1 - \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

EXERCICE 8
Soit E un ensemble, et soit $(\mathscr{P}(E), \subset)$ l'ensemble des parties de E ordonné par l'inclusion.

1. Démontrer que le maximum de $\mathscr{P}(E)$ est E, et le minimum de $\mathscr{P}(E)$ est $\varnothing$.
2. Supposons que E a au moins deux éléments, et posons $\mathscr{P}^*(E) := \mathscr{P}(E) \backslash \{\varnothing, E\}$. Préciser les éléments minimaux et les éléments maximaux de $(\mathscr{P}^*(E), \subset)$. Est-ce que les éléments minimaux (maximaux) de cet ensemble ordonné sont des minimums (respectivement maximums) ?

EXERCICE 9
On considère $\mathbb{N}^*$ muni de la relation de divisibilité définie par : $a \mid b$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$.

1. Vérifier que la relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soient a et $b \in \mathbb{N}^*$. Préciser les bornes $\sup_{|}\{a, b\}$ et $\inf_{|}\{a, b\}$ de l'ensemble $\{a, b\}$ dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, |)$.
3. L'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ admet-il un plus grand élément ou un plus petit élément par rapport à la relation de divisibilité ? Quels sont les éléments minimaux et les éléments maximaux de A par rapport à cette relation ?
4. L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, |)$ admet-il un plus grand élément ?
5. L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}^*, |)$ admet-il un plus petit élément ?
6. La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est définie de manière similaire : $a \mid b$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ka$. Formuler et répondre aux questions 1, 2, 4 et 5 ci-dessus exprimées pour $\mathbb{N}$ au lieu de $\mathbb{N}^*$. Quel est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ par rapport à la relation de divisibilité ?
7. Soit $E = \{3k : \; k \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des multiples de 3, et $F = \{5k : \; k \in \mathbb{N}^*\}$ celui des multiples de 5. Donner $\min_{|}(E \cap F)$ par rapport à la relation de divisibilité.

EXERCICE 10
Soit E un ensemble. On considère l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E muni de la relation d'inclusion $\subset$. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$.

1. Sous quelle condition le maximum $\max\{A, B\}$ existe ? Sous quelle condition le minimum $\min\{A, B\}$ existe ?
2. Montrer que les bornes $\sup\{A, B\}$, $\inf\{A, B\}$ existent et préciser ces bornes.
3. Considérons le cas particulier $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$. Préciser $\sup\{A, B\}$, $\inf\{A, B\}$. Est-ce que $\max\{A, B\}$, $\min\{A, B\}$ existent ?

EXERCICE 11
Soit I le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$I := \left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \;:\; 1 \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1} < 2 \right\}.$$

Déterminer (s'ils existent) le plus petit élément, le plus grand élément, la borne inférieure et la borne supérieure de I.

3 Fonctions et relations d'ordre

EXERCICE 12
Pour les fonctions suivantes dire si elles sont minorées, majorées, bornées sur leur domaine de définition respectif ?

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = x\cos(2\pi x), \quad h(x) = \frac{x}{\sin(x)}.$$

EXERCICE 13
Soit $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

1. Donner le domaine de définition de f.
2. f est elle monotone ? Sur le domaine de définition $]0,\infty[$ de f on peut écrire $f(x)=\sqrt{x}-1$. L'application $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante (même sur $[0,\infty[$), donc f est strictement croissante sur son domaine.
3. f admet elle un minorant, majorant ?

EXERCICE 14

Soit $f(x)=\frac{\sqrt{4x-4}}{\sqrt{x+1}}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. La fonction f admet elle un minorant, un majorant ?

EXERCICE 15

Soient f et g deux applications bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x)+g(x))\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}}f(x)+\sup_{x\in\mathbb{R}}g(x)$.
2. On suppose que f et g atteignent leur maximum ; l'application $f+g$ atteint-elle aussi son maximum ?

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition, $\mathcal{D}_f$, de f.
2. Vérifier que pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ où a, b,c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire l'asymptote de f en $\pm\infty$.
3. Donner le tableau de variation de f.
4. En déduire $\inf_{\mathbb{R}}|f|$.
5. Représenter f.

4 Exercices complémentaires

EXERCICE 17

Dans chacun des cas suivants préciser, en justifiant rigoureusement, si la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, relation d'ordre. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, préciser s'il s'agit d'un ordre total ou partiel.

1. $E=\mathbb{C}$ et $z\,\mathcal{R}\,w$ ssi $\mathrm{Re}(z)\leqslant\mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Im}(z)\leqslant\mathrm{Im}(w)$.
2. $E=\mathbb{N}$ et $x\,\mathcal{R}\,y$ ssi x divise y.
3. $E=\mathbb{R}$ et $x\,\mathcal{R}\,y$ ssi $x>y$.
4. $E=\mathbb{R}$ et $x\,\mathcal{R}\,y$ ssi $y=-x$.
5. $E=\mathbb{R}$ et $x\,\mathcal{R}\,y$ ssi $x^2+y^2=1$.

EXERCICE 18

Soit $\mathcal{R}$ une relation de E dans E, où E est un ensemble non vide. On suppose que pour tout x dans E, il existe un y dans E tel que $x\,\mathcal{R}\,y$ ($y=x$ est possible).
Montrer que si $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive alors $\mathcal{R}$ est réflexive.

EXERCICE 19

Soit E l'ensemble des puissances entières naturelles de 2. Soit $\mathcal{R}$ la relation de E dans E, définie par $x\,\mathcal{R}\,y$ ssi x divise y.

1. Écrire formellement E (avec des accolades).
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total.

EXERCICE 20

Soient A et B deux sous ensembles non-vides et bornés de $\mathbb{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse puis justifier votre réponse par une démonstration ou un contre exemple.

1. $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$, où $A+B=\{a+b\ :\ a\in A \text{ et } b\in B\}$.
2. $\sup(-A)=-\inf(A)$ où $-A=\{-a\ :\ a\in A\}$.
3. $A\subset B\Rightarrow\inf(A)\leqslant\inf(B)$.
4. $\sup(A\cup B)=\max(\sup(A),\sup(B))$.

EXERCICE 21

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall a\in A\,\forall b\in B,\ a\leqslant b.$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et montrer l'inégalité $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2. Montrer l'équivalence : $\sup(A) = \inf(B) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a < \varepsilon$. On dit dans ce cas que les parties A et B sont *adjacentes*.
3. Donner un exemple de parties adjacentes.

Exercice 22
Soit $E = \{\frac{2}{1+x^2} : \ x \in \mathbb{R}\}$. Si ce qui est demandé n'existe pas, on écrit : n'existe pas.
1. Donner un majorant de E.
2. Donner l'ensemble des minorants de E.
3. Donner la borne supérieure de E.
4. Donner la borne inférieure de E.
5. Mêmes questions avec $E = \{\frac{1}{x} : \ x \in \mathbb{R}, \ |x| > 1\}$.

Exercice 23
Soient I un ensemble de réels et f une fonction réelle définie sur I. Donner les définitions suivantes.
1. I est minoré.
2. $b = \inf f$.
3. I est majoré.
4. $a = \sup f$.

Exercice 24
Soit $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2-1}$.
1. Vérifier que le domaine de définition de f peut s'écrire comme l'union de 3 intervalles de $\mathbb{R}$.
2. f admet elle un minorant, majorant sur chacun de ces 3 intervalles ?
3. Soit $m \in \mathbb{R}$, donner le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$ en fonction de m.

Exercice 25
On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ muni de la relation $\leqslant_E$ définie par : $(x, y) \leqslant_E (x', y')$ ssi $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.
1. Montrer que $\leqslant_E$ est une relation d'ordre sur E qui n'est pas une relation d'ordre total.
2. L'ensemble $A \coloneqq \{(x, |x|) : \ x \in \mathbb{R}\}$ a-t-il un plus petit élément pour la relation $\leqslant_E$? Un élément minimal ? Une borne inférieure ?
3. Même question pour l'ensemble $B \coloneqq \{(x, x) : \ x \in \mathbb{R}_+\}$.
4. Montrer que deux éléments de E admettent une borne supérieure [1] et une borne inférieure, que l'on explicitera.

1. La borne supérieure de deux éléments c et c' est la borne supérieure de l'ensemble $\{c, c'\}$.