Planche 5
Relations d'équivalence

Soit E un ensemble ; une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite *relation d'équivalence* si elle est :
réflexive : $\forall x \in E$, $x \,\mathcal{R}\, x$
symétrique : $\forall x \in E, \forall y \in E$, si $x \,\mathcal{R}\, y$ alors $y \,\mathcal{R}\, x$
transitive : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E$, si $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$ alors $x \,\mathcal{R}\, z$.

1 Exemples de relations d'équivalence

Précisez si les relations suivantes sont des relations d'équivalence. Si les relations ne le sont pas, précisez laquelle (ou lesquelles) des trois propriétés de définition n'est pas remplie.

Exercice 1 (Relations sur $E = \mathbb{R}$)
1. $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $|x - y| < 1$.
2. $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $x - y \in \mathbb{Q}$.
3. $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $x + y \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2 (Relations sur $E = \mathbb{Z}$.)
1. $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $2|(x - y)$ ou $3|(x - y)$.
2. $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $x + y = 2$.

Exercice 3 (Relations sur l'ensemble E des droites du plan)
1. $d_1 \,\mathcal{R}\, d_2$ ssi $d_1 \,||\, d_2$.
2. $d_1 \,\mathcal{R}\, d_2$ ssi $d_1 \perp d_2$.

Exercice 4 (Relations sur l'ensemble E des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
1. $f \,\mathcal{R}\, g$ ssi l'ensemble $E_{f,g} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ est fini.
2. $f \,\mathcal{R}\, g$ ssi l'ensemble $E_{f,g}$ est vide ou a un seul élément.

Exercice 5
(La relation d'équivalence associée à une application) Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. La relation d'équivalence associée à f et la relation $\mathcal{R}_f$ sur E définie par :

$$x \,\mathcal{R}_f\, y \text{ ssi } f(x) = f(y).$$

Prouvez que $\mathcal{R}_f$ est bien une relation d'équivalence.

Exercice 6
Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et la relation $\mathcal{R}$ sur E par $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi

$$(x, y) \in \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (c, c), (c, a), (c, b), (d, d)\}. \qquad (*)$$

1. Laquelle (ou lesquelles) des trois propriétés définissant une relation d'équivalence n'est pas respectée par $\mathcal{R}$?
2. Rajouter à la liste $(*)$ un couple $(x, y) \in E \times E$ de sorte que la nouvelle relation soit une relation d'équivalence.

Exercice 7
Soit E un ensemble, et $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, deux relations d'équivalence sur E. On définit les relations $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ sur E par :

$$x \,\mathcal{U}\, y \text{ ssi } (x \,\mathcal{R}_1\, y) \vee (x \,\mathcal{R}_2\, y), \;\; x \,\mathcal{V}\, y \text{ ssi } (x \,\mathcal{R}_1\, y) \wedge (x \,\mathcal{R}_2\, y).$$

1. Est-ce que $\mathcal{U}$ est toujours une relation d'équivalence ? Donner un contre-exemple dans le cas $E = \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathcal{V}$ est une relation d'équivalence.

2 Classe d'équivalence d'un élément

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Pour tout élément $x \in E$, le sous-ensemble

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in E : x \mathcal{R} y\}$$

de E s'appelle la *classe d'équivalence* de x dans E par rapport à $\mathcal{R}$. On a les propriétés :
- $\forall x \in E,\ x \in [x]_{\mathcal{R}}$,
- $\forall x \in E, \forall y \in E,\ x \mathcal{R} y$ ssi $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$,
- $\forall x \in E, \forall y \in E$, non$(x \mathcal{R} y)$ ssi $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \varnothing$.

Si $\mathcal{R}$ est fixée, on va utiliser la notation simplifiée $[x]$ pour la classe d'équivalence de x.

Les exercices suivants portent sur des exemples de relations d'équivalence associées à une application (voir l'exercice 5).

Exercice 8
Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ ssi $x = x'$.
1. Trouvez une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que la relation $\mathcal{R}$ soit de la forme $\mathcal{R}_f$.
2. Déterminer $[(x_0, y_0)]$, la classe d'équivalence d'un élément $(x_0,\ y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Exercice 9
Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{C}$ (l'ensemble des nombres complexes) définie par :

$$z \mathcal{R} z' \text{ ssi } |z| = |z'|.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que la relation $\mathcal{R}$ soit de la forme $\mathcal{R}_f$.
2. Déterminer $[z_0]$, la classe d'équivalence d'un élément z_0 de $\mathbb{C}$.

Exercice 10
Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \text{ ssi } x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la relation $\mathcal{R}$ soit de la forme $\mathcal{R}_f$.
2. Déterminer $[1]$, la classe d'équivalence du nombre réel 1.
3. Trouvez tous les $a \in \mathbb{R}$ dont la classe d'équivalence $[a]$ est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.

Exercice 11
Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \text{ ssi } xe^y = ye^x.$$

1. Trouvez une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la relation $\mathcal{R}$ soit de la forme $\mathcal{R}_f$.
2. Déterminer $[1]$, la classe d'équivalence de 1, et $[-1]$, la classe d'équivalence de -1.
3. Trouvez tous les $x \in \mathbb{R}$ dont la classe d'équivalence est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.

3 Ensemble quotient et application induite

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble

$$E/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in E\}$$

s'appelle l'*ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$.
Soit F un ensemble. Une application $f : E \to F$ est dite *compatible* avec $\mathcal{R}$ si

$$\forall x \in E, \forall y \in E \ \ (x \mathcal{R} y \Rightarrow f(x) = f(y)).$$

Si $f : E \to F$ est compatible avec $\mathcal{R}$, on définit $\bar{f}$, *l'application induite* par f sur $E/\mathcal{R}$ comme étant l'application :

$$\bar{f} : E/\mathcal{R} \to F, \quad \bar{f}([x]) = f(x)\,.$$

Exercice 12
Soit $f : E \to F$ une application, et soit $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence associée à f, définie à l'exercice 5. Montrer que :
1. L'application f est compatible avec $\mathcal{R}_f$.

2. L'application induite par f sur $E/\mathcal{R}_f$ met l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}_f$ en bijection avec $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13
Considérons les relations d'équivalence des exercices 8-11. Dans chaque cas préciser un ensemble $Q \subset \mathbb{R}$ qui peut être identifié avec l'ensemble quotient par la relation d'équivalence donnée. Préciser le résultat général utilisé et la bijection qui donne cette identification.

Exercice 14
Soit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ ssi } \sin(x) = \sin(y).$$

1. Préciser les classes d'équivalence $[0]$, $[\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{3}]$ par rapport à cette relation d'équivalence.
2. Prouvez que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ est en bijection avec l'ensemble $[-1, 1]$.
3. Parmi les applications suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (ou sont) compatibles avec $\mathcal{R}$:

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ?$$

Exercice 15
Soit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \,\mathcal{R}\, y$ ssi $x - y \in \mathbb{Z}$.

1. Prouvez que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{U}$ de tous les nombres complexes de module 1.
2. Est-ce que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ est compatible avec $\mathcal{R}$? Et l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(2\pi x)$?

Exercice 16
Soit E l'ensemble des droites du plan. On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur E par :

$$d_1 \sim d_2 \text{ ssi } d_1 \|, d_2.$$

1. Prouvez que l'ensemble quotient $E/\sim$ est en bijection avec l'ensemble des droites passant par l'origine.
2. Prouvez aussi que l'ensemble $E/\mathcal{R}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble non-vide. Une partition de E est un sous-ensemble P de $\mathscr{P}(E)$, avec les propriétés suivantes :

i. $\varnothing \notin P$
ii. $\forall A, B \in P$, $A = B$ ou $A \cap B = \varnothing$
iii. $\bigcup_{A \in P} A = E$.

En d'autres mots, une partition de E est un ensemble de sous-ensembles de E de telle sorte qu'aucun de ces sous-ensembles ne soit vide, qu'ils soient deux à deux disjointes, et que leur réunion soit égale à E.
La propriété suivante fait le lien entre partitions d'un ensemble et relations d'équivalence.

Exercice 17
Soit P une partition de E. Montrer que la relation $\mathcal{R}_P$ sur E définie par

$$x \,\mathcal{R}_P\, y \text{ ssi } \exists A \in P,\ (x \in A) \wedge (y \in A),$$

est une relation d'équivalence, dont P est l'ensemble quotient.

Exercice 18
Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Combien de partitions de E existe-t-il ?

Exercice 19
Soit a, b, c trois nombre réels. À quelles conditions sur a, b, c, les trois ensembles $]-\infty, b]$, $]0, a[$ et $[c, +\infty[$ forment ils une partition de $\mathbb{R}$?.

5 Un cas particulier d'ensemble quotient : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit la relation $\underset{n}{\equiv}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par : $x \underset{n}{\equiv} y$ ssi $n|(y-x)$. Rappelons que :

1. $x \underset{n}{\equiv} y$ si et seulement si x et y ont le même reste à la division euclidienne par n. Si c'est le cas, on dit aussi que x et y sont congrus mod n.
2. $\underset{n}{\equiv}$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence $[k]_n$ de k par rapport à cette relation d'équivalence s'appelle la classe de congruence mod n de k. L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\underset{n}{\equiv}$ est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Les classes $[0]_n, \ldots, [n-1]_n$ sont distinctes deux à deux, et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0]_n, \ldots, [n-1]_n\}$. En particulier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a n éléments.
4. L'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}$ sont compatibles avec $\underset{n}{\equiv}$, donc induisent des opérations bien définies
$$([x]_n, [y]_n) \mapsto [x]_n + [y]_n \,,\ ([x]_n, [y]_n) \mapsto [x]_n \times [y]_n$$
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

EXERCICE 20
Pour $k \in \mathbb{Z}$ on note $[k]$ la classe de congruence de k mod 12.
1. Donner la liste de tous les couples $(\lambda, \eta) \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}^2$ tels que $[\lambda] \times [\eta] = [0]$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les éléments $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$ tels que
$$[x]^2 - [5] \times [x] + [6] = [0] \text{ dans } \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

6 Exercices complémentaires

EXERCICE 21
Soit E l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et la relation $\sim$ sur E définie par :
$$f \sim g \text{ ssi } \exists a, b > 0,\ af(x) \leqslant g(x) \leqslant bf(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
1. Prouvez que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Donner une caractérisation explicite des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont équivalentes à l'application constante $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Trouver toutes les constantes s telles que $s + \arctan \in [f_1]$.

EXERCICE 22 (Relations sur l'ensemble $E = \mathscr{P}(S)$ des parties d'un ensemble S)
1. On fixe $K \subset S$. Montrer que la relation $\mathcal{R}_K$ sur $\mathscr{P}(S)$ définie par
$$A\ \mathcal{R}_K\ B \text{ ssi } A \cap K = B \cap K$$
est une relation d'équivalence. Préciser cette relation d'équivalence dans les cas particuliers $K = \varnothing$, $K = S$.
2. Supposons $S \neq \varnothing$. Est-ce que la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(S)$ définie par
$$A\ \mathcal{R}\ B \text{ ssi } \exists K \in \mathscr{P}(S) \backslash \{\varnothing\}\,,\ A \cap K = B \cap K$$
est une relation d'équivalence ? Discussion selon les cas $\mathrm{card}(S) = 1$, $\mathrm{card}(S) > 1$.

EXERCICE 23
Soit E, F et G trois ensembles, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et soient $f : F \to E$, $g : E \to G$ des applications. On définit les relations $f^*(\mathcal{R})$, $g_*(\mathcal{R})$ sur F et G respectivement par :
$$x\, f^*(\mathcal{R})\, y \text{ ssi } f(x)\ \mathcal{R}\ f(y),$$
$$x\, g_*(\mathcal{R})\, y \text{ ssi } \big(\exists u \in g^{-1}(\{x\})\ \exists v \in g^{-1}(\{y\})\ ,\ u\ \mathcal{R}\ v\big).$$
1. Est-ce que $f^*(\mathcal{R})$ est une relation d'équivalence ?
2. Est-ce que $g_*(\mathcal{R})$ est une relation d'équivalence ?.

EXERCICE 24

Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \mathcal{R} y$ ssi $\sin^2(x) + \cos^2(y) = 1$.

1. Trouvez une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la relation $\mathcal{R}$ soit de la forme $\mathcal{R}_f$.
2. Déterminer $[0]$, la classe d'équivalence du nombre réel 0.

Exercice 25
Soit $E = \mathscr{P}(\mathbb{R})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ par :

$$A \mathcal{R} B \text{ ssi } A \cup [0,\, 1] = B \cup [0,\, 1].$$

1. Trouvez une application $f : E \to E$ telle que la relation $\mathcal{R}$ soit de la forme $\mathcal{R}_f$.
2. Déterminer $[\{0\}]$, la classe d'équivalence de l'élément $\{0\}$ de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

L'exercice 26 ci-dessous donne une construction rigoureuse de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$, et l'exercice 27 nous donne une construction rigoureuse de $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$.

Important : Dans le premier exercice on suppose que $\mathbb{N}$ (avec ses deux opérations et les propriétés élémentaires de ces opérations) est connu, mais $\mathbb{Z}$ n'est pas connu, le but de l'exercice étant une définition rigoureuse de $\mathbb{Z}$ avec ses deux opérations. De même, dans le deuxième exercice on suppose que $\mathbb{Z}$ (avec ses deux opérations et les propriétés élémentaires de ces opérations) est connu mais $\mathbb{Q}$ n'est pas connu, le but de l'exercice étant une définition rigoureuse de $\mathbb{Q}$ avec ses deux opérations.

Exercice 26
Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit sur E deux opérations : une addition

$$(a,\, b) \oplus (c,\, d) = (a + c,\, b + d) \quad \forall (a,\, b),\, (c,\, d) \in E,$$

et une multiplication

$$(a,\, b) \otimes (c,\, d) = (ac + bd,\, ad + bc) \quad \forall (a,\, b),\, (c,\, d) \in E.$$

On considère la relation $\mathcal{R}$ de E dans E par :

$$(a,\, b)\ \mathcal{R}\ (c,\, d) \text{ ssi } a + d = b + c.$$

1. Prouver que $\oplus$, $\otimes$ sont commutatives et associatives, et que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.
2. Prouvez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Prouvez que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont compatibles avec $\mathcal{R}$, et les opérations $+$, $\times$ induites sur le quotient $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\ \mathcal{R}$ ont les propriétés suivantes :

(a) $+$, $\times$ sont commutatives et associatives.

(b) $\times$ est distributive par rapport à $+$.

4. Posons $\mathbb{Z} \coloneqq \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\mathcal{R}$, $\mathbb{Z}_+ \coloneqq \{[(\alpha, 0)] :\ \alpha \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}_- \coloneqq \{[(0, \beta)] :\ \beta \in \mathbb{N}\}$, $0_{\mathbb{Z}} \coloneqq [(0, 0)]$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0_{\mathbb{Z}}\}$.

(2) Montrer que les applications $\mathbb{N} \ni \alpha \mapsto [(\alpha, 0)] \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N} \ni \beta \mapsto [(0, \beta)] \in \mathbb{Z}_-$ sont bijectives.

(3) Pour $x = [(a, b)] \in \mathbb{Z}$ posons $-x \coloneqq [(b, a)]$. Montrer que $x \mapsto -x$ est bien définie sur $\mathbb{Z}$, et

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ x + (-x) = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

Exercice 27
Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définit sur E deux opérations : une addition

$$(a,\, b) \oplus (c,\, d) = (ad + bc,\, bd) \quad \forall (a,\, b),\, (c,\, d) \in E,$$

et une multiplication

$$(a,\, b) \otimes (c,\, d) = (ac,\, bd) \quad \forall (a,\, b),\, (c,\, d) \in E.$$

On considère la relation $\mathcal{R}$ de sur E définie par :

$$(a,\, b)\ \mathcal{R}\ (c,\, d) \text{ ssi } ad = bc\,.$$

1. Montrer que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont commutatives et associatives. Est-ce que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$?
2. Prouvez que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. Prouvez que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont compatibles avec $\mathcal{R}$, et que les opérations $+$, $\times$ induites sur le quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\ \mathcal{R}$ ont les propriétés suivantes :

(a) $+$, $\times$ sont commutatives et associatives.

(b) $\times$ est distributive par rapport à $+$.

4. On pose $\mathbb{Q} \coloneqq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\mathcal{R}$, $0_\mathbb{Q} \coloneqq [(0,1)]$, $1_\mathbb{Q} \coloneqq [(1,1)]$. Pour $q = [(a,b)] \in \mathbb{Q}\backslash\{0_\mathbb{Q}\}$ posons $q^{-1} \coloneqq [(b,a)]$. Montrer que $q \mapsto q^{-1}$ est bien définie sur $\mathbb{Q}\backslash\{0_\mathbb{Q}\}$ et

$$\forall q \in \mathbb{Q}\backslash\{0_\mathbb{Q}\}\,,\; q \times q^{-1} = 1_\mathbb{Q}\,.$$

EXERCICE 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien de solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a l'équation

1. $[2]_n \times [x]_n = [0]_n$?
2. $[2]_n \times [x]_n = [1]_n$?

EXERCICE 29

(Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) Soient $n \geqslant 2$ un nombre naturel et $a \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Prouvez que l'équation $[a]_n \times [x]_n = [1]_n$ admet une solution $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ (c'est à dire $[a]_n$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) si et seulement si a et n sont premiers entre eux. *Indication : Utiliser le théorème de Bézout.*