Exercice 14
Donner les parties de $\mathbb{R}$ définies par les conditions suivantes.
1. $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$.

Réponse. $[0, 1[$.

2. $x > 3$ et $x < 5$ ou $x \neq 4$.

Réponse. $]3, 4[\,\cup\,]4, 5[$.

3. $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$.

Réponse. $\{4\}$.

4. $(x \geq 0) \Rightarrow (x \geq 2)$.

Réponse. Il convient de considérer l'assertion équivalente $(x < 0)$ ou $(x \geq 2)$. Cela donne $]-\infty, 0[\,\cup\,[2, +\infty[$.

Exercice 15
Trouver tous les nombres réels qui vérifient les assertions suivantes.
1. $|2x + 1| < |x + 1|$.

Réponse. On commence par remarquer que $2x + 1$ est positif si et seulement si $x > -1/2$ et que $x + 1$ est positif si et seulement si $x > -1$. On peut alors distinguer trois cas selon que $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq -1/2$, ou $x \geq -1/2$ et éliminer les valeurs absolues en tenant compte du signe de leur argument. On a $(x \leq -1$ et $-2x - 1 < -x - 1)$ ou $(-1 \leq x \leq -1/2$ et $-2x - 1 < x + 1)$ ou $(x \geq -1/2$ et $2x + 1 < x + 1)$. En simplifiant les expressions on a $(x \leq -1$ et $x > 0)$ ou $(-1 \leq x \leq -1/2$ et $x > -2/3)$ ou $(x \geq -1/2$ et $x < 0)$. Aucun x vérifie la première assertion, les x qui satisfont la deuxième sont ceux compris entre $-2/3$, non inclus, et $-1/2$, et ceux qui vérifient la troisième sont les nombres négatifs plus grand que $-1/2$. Finalement les nombres réels qui vérifient l'assertion de départ sont ceux de l'intervalle $]-2/3, 0[$.

2. $|2x - 3| \geq 1$.

Réponse. Puisque $2x - 3$ est positif si et seulement si $x > 3/2$, l'assertion est équivalente à $(x \leq 3/2$ et $-2x + 3 \geq 1)$ ou $(x \geq 3/2$ et $2x - 3 \geq 1)$. Un calcul montre que la première assertion est vérifiée par les $x \leq 1$ et la deuxième par les $x \geq 2$. Finalement, les nombres réels qui vérifient l'assertion sont ceux de l'ensemble $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

3. $|2x + 1| < |x + 1|$ et $|2x - 3| \geq 1$.

Réponse. Les nombres réels qui vérifient cette affirmation sont ceux qui vérifient au même temps les assertions de la première et deuxième question, à savoir $]-2/3, 0[$.

4. $|2x + 1| < |x + 1|$ ou $|2x - 3| \geq 1$.

Réponse. Les nombres réels qui vérifient cette affirmation sont ceux qui vérifient soit l'assertion de la première question soit celle de la deuxième, à savoir $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

5. $|2x - 1| \geq |x - 1|$.

Réponse. On commence par remarquer que $2x - 1$ est positif si et seulement si $x > 1/2$ et que $x - 1$ est positif si et seulement si $x > 1$. On peut alors distinguer trois cas selon que $x \leq 1/2$, $1/2 \leq x \leq 1$, ou $x \geq 1$ et éliminer les valeurs absolues en tenant compte du signe de leur argument. On a $(x \leq 1/2$ et $-2x + 1 \geq -x + 1)$ ou $(1/2 \leq x \leq 1$ et $2x - 1 \geq -x + 1)$ ou $(x \geq 1$ et $2x - 1 \geq x - 1)$. En simplifiant les expressions on a $(x \leq 1/2$ et $x \leq 0)$ ou $(1/2 \leq x \leq 1$ et $x \geq 2/3)$ ou $(x \geq 1$ et $x \geq 0)$. La première assertion est vérifiée par les x négatifs ou nuls, la deuxième par les x compris entre $2/3$ et 1, et la troisième par les nombres plus grands que 1. Finalement les nombres réels qui vérifient l'assertion de départ sont ceux de l'ensemble $]-\infty, 0] \cup [2/3, +\infty[$.

6. $|2x - 1| < 1$.

Réponse. L'assertion est équivalente à $(-1 < 2x - 1$ et $2x - 1 < 1)$. En simplifiant les expressions on obtient que l'assertion est vérifies par les nombres réels de l'intervalle $]0, 1[$.

7. $|2x - 1| \geq |x - 1|$ et $|2x - 1| < 1$.

Réponse. Les nombres réels qui vérifient cette affirmation sont ceux qui vérifient au même temps les assertions des questions cinq et six, à savoir $[2/3, 1[$.

8. $|2x - 1| \geq |x - 1|$ ou $|2x - 1| < 1$.

Réponse. Les nombres réels qui vérifient cette affirmation sont ceux qui vérifient soit l'assertion de la question cinq soit celle de la question six, à savoir tous.