Exercice 10

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Rappeler la définition d'application bijective, puis justifier que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Réponse. Une application est bijective par définition si et seulement si elle est injective et surjective. En tenant compte de la définition, le fait que $g \circ f$ est bijective est une conséquence de l'exercice **??**. Pour prouver l'égalité, on calcule $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_G$ et $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ Id_F \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E$. L'unicité de l'application réciproque permet de conclure que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 11

On considère l'application $f : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = (x+1)^2$. Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

Réponse. Soit $y \in [0, +\infty[$. On cherche les antécédents de y, à savoir les $x \in [-1, +\infty[$ tels que $f(x) = y$. L'application est bijective si et seulement si pour tout y on trouve un unique antécédent. On va donc résoudre en x l'équation $y = (x+1)^2$. Puisque $y \geqslant 0$ on peut prendre la racine carrée des deux membres : $\sqrt{y} = |x+1|$. Puisque $x \geqslant -1$, on peut éliminer la valeur absolue et l'on a l'unique solution $x = \sqrt{y} - 1$. Cela montre que f est bijective et sa réciproque est $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$.

Exercice 12

On considère l'application $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Montrer que g est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

Réponse. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On cherche les antécédents de y, à savoir les $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $f(x) = y$. L'application est bijective si et seulement si pour tout y on trouve un unique antécédent. On va donc résoudre en x l'équation $y = \frac{x+1}{x-1}$. Puisque $x \neq 1$, on peut multiplier les deux membre par $x-1$ ce qui donne $y(x-1) = x+1$. On obtient : $x(y-1) = y+1$. Puisque $y \neq 1$ on peut diviser par $y-1$ et on a l'unique solution $x = \frac{y+1}{y-1}$. Cela montre que f est bijective et coïncide avec sa réciproque (on dit que f est *involutive*).