Exercice 11

Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les affirmations suivantes :

1. $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

Réponse. La façon la plus simple de montrer l'égalité est à l'aide d'une table de vérité (ici 1 signifie qu'un élément de E appartient à l'ensemble considéré et 0 qu'il n'y appartient pas). On va noter D l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$:

A	B	C	$A \cup B \cup C$	$A \setminus B$	$B \setminus C$	$C \setminus A$	$A \cap B \cap C$	D
1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

On constate que la colonne correspondant à $A \cup B \cup C$ et celle correspondant à D coïncident, ce qui assure que les deux ensembles sont le même.

2. Si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$ alors $B \subset C$. Que peut-on dire de l'autre implication réciproque ?

Réponse. Supposons $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$ et montrons que $B \subset C$. Soit $b \in B$. On a deux possibilités : $b \in A$ ou $b \notin A$. Dans le premier cas on a $b \in A \cap B \subset A \cap C \subset C$. Dans le deuxième, puisque $b \in A \cup B \subset A \cup C$, on voit $b \in A \cup C$. Du fait que $b \notin A$ on doit avoir $b \in C$.
La réciproque est aussi vraie : il suffit de considérer $B \subset C$ et faire l'union et l'intersection avec A ce qui préserve l'inclusion.

Exercice 13

Soient p, $n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Rappelons que le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est défini par

$$\binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre a une interprétation importante : c'est le nombre des sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments. Démontrer, éventuellement par récurrence

1. (La formule de Pascal) : Pour tous p, $n \in \mathbb{N}$ tels que $p+1 \leqslant n$ nous avons l'égalité :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Réponse. Il suffit de remplacer :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} =$$

$$= \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!}[(p+1)+(n-p)] = \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. (La formule itéréee de Pascal) :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

où $n \geqslant p$. En déduire une formule explicite pour la somme $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $p \in \{1,2,3\}$.

Réponse. On va raisonner par récurrence sur $n \geqslant p$. Si $n = p$ on a $\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$. Supposons maintenant l'égalité vraie pour $n \geqslant p$ et montrons qu'elle l'est aussi pour $n+1$. $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$. Par hypothèse de récurrence ceci est égal à $\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$. La formule de Pascal permet d'écrire : $\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1} = \binom{(n+1)+1}{p+1}$.
Pour $p = 1$, la formule itérée de Pascal devient :

$$\binom{n+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k^1.$$

Pour $p=2$, la formule itérée de Pascal devient : $\binom{n+1}{3}=\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}$. Puisque pour $k=1$ $\frac{k(k-1)}{2}=0$, on peut écrire : $\binom{n+1}{3}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-k$. En développant et en utilisant l'égalité $\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{2}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $p=3$, la formule itérée de Pascal devient : $\binom{n+1}{4}=\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$. Puisque pour $k=1,2$ $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}=0$, on peut écrire : $\binom{n+1}{4}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k^3-3k^2+2k$. En développant et en utilisant les égalités $\sum_{k=1}^{n}k=\binom{n+1}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. (La formule du binôme de Newton) : Soient x, $y\in\mathbb{R}$. Alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}.$$

En déduire les identités : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^k$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$.

RÉPONSE. On va raisonner par récurrence. Pour $n=0$ on a bien $(x+y)^0=1=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x^0y^0$. Supposons maintenant l'égalité vraie pour n et montrons qu'elle est vraie aussi pour $n+1$. On a $(x+y)^{n+1}=(x+y)(x+y)^n=(x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$, où la deuxième égalité découle de l'hypothèse de récurrence. On développe et on a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n+1-k}$. En posant $k=k+1$, la première somme devient $\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^ky^{n+1-k}$. On a alors $(x+y)^{n+1}=\binom{n}{n}x^{n+1}y^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^ky^{n+1-k}+\binom{n}{0}x^0y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n+1-k}$. En réordonnat les termes on a : $(x+y)^{n+1}=\binom{n}{0}x^0y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{n})x^ky^{n+1-k}+\binom{n}{n}x^{n+1}y^0$. En utilisant la formule de Pascal et le fait que $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$ pour tout n on a : $(x+y)^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}x^0y^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^ky^{n+1-k}+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^ky^{(n+1)-k}$.
En prenant $x=y=1$ dans la formule du binôme de Newton on obtient :

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

En prenant $x=-1$ et $y=1$ dans la formule du binôme de Newton on obtient :

$$0=(-1+1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

4. * (La formule du binôme de Vandermonde) : Soient m, n, $p\in\mathbb{N}$ tels que $p\leqslant m+n$. Alors

$$\binom{m+n}{p}=\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

Dans cette égalité nous avons utilisé la convention suivante : si $k>m$ on définit $\binom{m}{k}$ en posant $\binom{m}{k}=0$.
Indication : Utiliser l'identité $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ *et la formule du binôme de Newton.*

RÉPONSE. Comme suggéré on considère $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$. La formule du binôme de Newton donne alors l'égalité : $\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j=\sum_{p=0}^{n+m}\binom{n+m}{p}x^p$. Il suffit alors de développer le produit :

$$\sum_{p=0}^{n+m}x^p\sum_{i+j=p}\binom{m}{i}\binom{n}{j}=\sum_{p=0}^{n+m}x^p\sum_{\substack{i+j=p\\0\leqslant i\leqslant m\\0\leqslant j\leqslant n}}\binom{m}{i}\binom{n}{j}=\sum_{p=0}^{n+m}x^p\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k},$$

où l'on a posé $k=i$ et $j=p-i=p-k$. En identifiants les coefficients du polynôme en x on a pour tout $p\leqslant m+n$

$$\binom{m+n}{p}\sum_{k=0}^{p}=\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

EXERCICE 14

1. Montrer par récurrence qu'un ensemble à n éléments possède 2^n sous-ensembles.

RÉPONSE. On va raisonner par récurrence sur n. Si $n = 0$ l'ensemble est vide et il est son seul sous-ensemble. Montrons maintenant que si un ensemble a $n+1$ élements alors il a 2^{n+1} sous-ensembles si l'on suppose la propriété vraie pour les ensembles avec n éléments. Un ensemble E avec $n+1 \geqslant 1$ éléments contient au moins un élément x_0. Si A est une partie de E ou bien elle contient x_0 ou bien elle ne le contient pas. On peut alors considérer les sous-ensembles de $\mathscr{P}(E)$ suivants : $X = \{A \subset E \mid x_0 \in A\}$ et $Y\{A \subset E \mid x_0 \notin A\}$. On a $X \cap Y = \emptyset$ et $X \cup Y = \mathscr{P}(E)$. Le nombre de sous-ensembles de E sera alors égal à la somme du nombre des éléments de X et de Y. Observons maintenant qu'il y a autant d'éléments dans X que dans Y. En effet pour tout $A \in X$, l'ensemble $A \cup \{x_0\}$ appartient à Y tandis que si $B \in Y$ alors $B \smallsetminus \{x_0\} \in X$. Par ailleurs si $A, A' \in X$ avec $A \neq A'$ alors $A \cup \{x_0\} \neq A' \cup \{x_0\}$ et de même si $B, B' \in Y$ avec $B \neq B'$ alors $B \smallsetminus \{x_0\} \neq B' \smallsetminus \{x_0\}$.
Il suffit maintenant de remarquer que $X = \mathscr{P}(E \smallsetminus \{x_0\})$. Puisque $E \smallsetminus \{x_0\}$ est un ensemble avec n éléments, on a que X et Y on 2^n éléments et E a $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ sous-ensembles.

2. Montrer par récurrence qu'un ensemble à n éléments possède $\binom{n}{k}$ sous-ensembles ayant k éléments, $k = 0, \dots, n$. En déduire l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

RÉPONSE. - Nous avions déjà fait la première partie de la question sur zoom (démonstration "combinatoire".)
- L'égalité dit simplement que $\mathscr{P}(E)$ est l'union disjointe des ensembles de parties de E avec k éléments, pour k de 0 à n, nombre d'éléments de E.