Exercice 4

On donne les fonctions réelles f et g en spécifiant $f(x) = \sin(\pi x)$ et $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1. Déterminer les domaines de définition de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Réponse. On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [-1, 1]$. Il s'ensuit facilement que $D_{f\circ g} = D_g = [-1, 1]$. Puisque $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, on voit que $D_{g\circ f} = D_f = \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble image (c'est-à-dire l'image de leur domaine de définition) de f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Réponse. On a déjà remarqué que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Puisque les valeurs de $1 - x^2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont comprises entre 0 et 1, on voit que $g([-1, 1]) = [0, 1]$. Il s'ensuit que $f \circ g([-1, 1]) = [0, 1]$ et $g \circ f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

Exercice 5

Soit $f : E \to F$ une application, et soient A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Réponse. On a $y \in f(A \cup B)$ si et seulement s'il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Cela est le cas si et seulement s'il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ ou s'il existe $x' \in B$ tel que $y = f(x')$. La condition est équivalente à $f(x) \in f(A) \cup f(B)$ ce qui montre l'égalité.

2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et trouver un exemple qui montre que l'inclusion peut être propre.

Réponse. On a $y \in f(A \cap B)$ si et seulement s'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A$ et $x \in B$ cela dit que $y \in f(A) \cap f(B)$ et on a montré l'inclusion. En considérant l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, en prenant $A = [-1, 0]$ et $B = [0, 1]$ on voit que l'inclusion peut être stricte. En effet on a $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ et $f(A) \cap f(B) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$.

Exercice 6

Soit $f : E \to F$ une application, et soient C et D deux parties de F.

1. Démontrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Réponse. On a $x \in f^{-1}(C \cup D)$ si et seulement si $f(x) \in C \cup D$ et cela est équivalent à $f(x) \in C$ ou $f(x) \in D$ et donc si et seulement si $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ ce qui montre l'égalité.

2. Démontrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Réponse. On a $x \in f^{-1}(C \cap D)$ si et seulement si $f(x) \in C \cap D$ et cela est équivalent à $f(x) \in C$ et $f(x) \in D$ et donc si et seulement si $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ ce qui montre l'égalité.