Université Aix-Marseille | Portail Descartes
Semestre 1 | 2020-2021

Planche 1
Langage et raisonnement mathématique

Exercice 16

Définir en termes d'intervalles les ensembles suivants.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq |x^2-3|\}$.

Réponse. On a $x+1>0$ si et seulement si $x>-1$ tandis que $x^2-3<0$ si et seulement si $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$. On doit considérer les cas suivants : ($x \leq -\sqrt{3}$ et $-x-1 \leq x^2-3$) ou ($-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ et $-x-1 \leq -x^2+3$) ou ($-1 \leq x \leq \sqrt{3}$ et $x+1 \leq -x^2+3$) ou ($x \geq \sqrt{3}$ et $x+1 \leq x^2-3$). Des calculs élémentaires montrent que les quatre assertions sont vérifiées respectivement par les x des ensembles $]-\infty,-2]$, $[(1-\sqrt{17})/2,-1]$, $[-1,1]$ et $[(-1+\sqrt{17})/2,+\infty[$. Cela donne $A =]-\infty,-2] \cup [(1-\sqrt{17})/2,1] \cup [(-1+\sqrt{17})/2,+\infty[$.

2. $B = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-x-3| > x+1\}$.

Réponse. On va étudier deux cas selon que $x^2-x-3 \geq 0$ ou $x^2-x-3 \leq 0$. Dans le premier cas, ($x \leq (1-\sqrt{13})/2$ ou $x \geq (1+\sqrt{13})/2$) et on a $x^2-x-3 > x+1$. Cette dernière inégalité est équivalente à $x^2-2x-4>0$ et elle est vérifiée pour $x<(1-\sqrt{5})/2$ ou $x>(1+\sqrt{5})/2$. L'ensemble des x qui satisfont les deux conditions à la fois est $]-\infty,(1-\sqrt{13})/2] \cup](1+\sqrt{13})/2,+\infty[$.
Dans le deuxème cas, $(1-\sqrt{13})/2 \leq x \leq (1+\sqrt{13})/2$ et on a $-x^2+x+3 > x+1$. Cette dernière inégalité est équivalente à $x^2-2<0$ et elle est vérifiée pour $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. L'ensemble des x qui satisfont les deux conditions à la fois est $[(1-\sqrt{13})/2,\sqrt{2}[$.
Finalment on obtient $B =]-\infty,\sqrt{2}[\cup](1+\sqrt{13})/2,+\infty[$.

3. $C = \{x \in \mathbb{R} : |3x-|2x+1|| < 2\}$.

Réponse. On commence par éliminer la valeur absolue $|2x+1|$ en considérant deux cas : ($x \leq -1/2$ et $|3x+2x+1|<2$) ou ($x \geq -1/2$ et $|3x-2x-1|<2$). Dans le premier cas, puisque $x \leq -1/2$ on voit que $5x+1<0$ et donc on peut écrire ($x \leq -1/2$ et $-5x-1<2$). Cette condition est vérifiée lorsque $-3/5<x \leq -1/2$. Dans le deuxième cas, on doit considérer deux sous-cas : ($-1/2 \leq x \leq 1$ et $-x+1<2$) ou ($x \geq 1$ et $x-1<2$). Les x qui vérifient la première condition sont $-1/2<x \leq 1$ tandis que ceux qui satisfont la deuxième sont $1 \leq x < 3$. On obtient donc $C =]-3/5,3[$.

Exercice 18

Soit l'assertion : (X) : $\forall x \in \mathbb{R}, [\exists y \in \mathbb{R}, y^2 < x$ ou $xy \leq 0]$.

1. Écrire sa négation.

Réponse. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, [\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x$ et $xy > 0]$.

2. Préciser si elle est vraie ou fausse, puis le démontrer.

Réponse. L'assertion X est vraie. En effet en prenant $y=0$ pour tout x on a $xy = 0 \leq 0$.

Exercice 21

Utiliser le fait que la somme et le produit de deux nombres rationnels est encore un nombre rationnel pour démontrer que

1. $\forall q \in \mathbb{Q},\ q+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Réponse. Si, par l'absurde, $r = q+\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors $\sqrt{2} = r-q$ doit l'être aussi en tant que différence de nombres rationnels. Or on sait que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Cette contradiction permet de conclure.

2. $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Réponse. Supposons par l'absurde que $q = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, nécessairement non nul. On peut écrire $q-\sqrt{2} = \sqrt{3}$. En prenant le carré des deux membres de l'égalité on a $q^2+2+2q\sqrt{2} = 3$. On peut alors expliciter $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = (1-q^2)/2q$. Puisque le membre de droite est un nombre rationnel, on arrive a une contradiction car $\sqrt{2}$ ne l'est pas.
Attention ! Le fait que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ ne sont pas des nombres rationnels ne permet pas de conclure directement que leur somme ne l'est pas. En effet, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, mais $\sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0$ l'est.