Algèbre 3 - Semestre 5. Licence L3. Année 2020-21
Planche de TD 2

Exercice 1 *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. Appelons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soient $\mathcal{B}^\star$ et $\mathcal{B}'^\star$ les bases duales de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Soit Q la matrice de passage de $\mathcal{B}^\star$ à $\mathcal{B}'^\star$.*

1. *Montrer que $Q = {}^tP^{-1}$.*
2. *Déterminer $\mathcal{B}'^\star$ si $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B}' = ((1,1,-2),(2,2,-2),(1,-1,-1))$.*

Exercice 2 *Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{C}$ une base de $E^\star$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E, telle que $\mathcal{B}^\star = \mathcal{C}$. (On dit que $\mathcal{B}$ est la base pré-duale de $\mathcal{C}$.)*

Exercice 3 *On définit, sur $\mathbb{R}^3$, les formes linéaires : $\varphi_1(x,y,z) = x+y+z$, $\varphi_2(x,y,z) = x+\alpha y+z$, $\varphi_3(x,y,z) = x+y+\beta z$. Discuter, suivant les valeurs α et β, le rang de la famille $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.*

Exercice 4 *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et E_0 un sous-espace vectoriel de E. On appelle annulateur de E_0 l'ensemble :*

$$Ann(E_0) = \{\varphi \in E^\star \,/\, \forall u \in E_0, \varphi(u) = 0\}.$$

1. *Montrer que $Ann(E_0)$ est un sous-espace vectoriel de $E^\star$.*
2. *Une base de E_0 étant donnée, expliquer comment déterminer une base de $Ann(E_0)$.*
3. *Montrer que $dim(Ann(E_0)) + dim(E_0) = dim(E)$.*
4. *Montrer que $Ann(E_0)$ est isomorphe à E/E_0.*

Exercice 5 *Soient n un entier naturel, et E l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients complexes. (On note en général $E = \mathbb{C}_n[X]$.) Pour tout z élément de $\mathbb{C}$, on définit la forme linéaire φ_z sur E, telle que $\varphi_z(P) = P(z)$. Soient $z_0, z_1, \ldots, z_n$, $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que $\mathcal{B}^\star = (\varphi_{z_0}, \varphi_{z_1}, \ldots, \varphi_{z_n})$ est une base $E^\star$. Déterminer sa base pré-duale $\mathcal{B}$.*

Exercice 6 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré 2 à coefficients réels en une indéterminée X.*

1. *Quelle est la dimension de E ? celle de E^* ?*
2. *Pour tout $P(X) = aX^2 + bX + c$, on pose : $\chi_0(P) = c$, $\chi_1(P) = b$, $\chi_2(P) = a$. Montrer que $\mathcal{B}^* = (\chi_0, \chi_1, \chi_2)$ est une famille libre de E^*. En déduire que c'est une base. Quelle est sa base pré-duale $\mathcal{B}$?*
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $P \in E$, on définira $ev_x(P) = P(x)$. Montrer que ev_x est une forme linéaire sur E.*
4. *Ecrire les coordonnées de ev_0, ev_1, et de ev_{-1} dans la base $\mathcal{B}^*$.*
5. *Montrer que (ev_0, ev_1, ev_{-1}) est une base de E^*.*
6. *Soient x, y, z trois réels deux à deux distincts. Montrer que*
$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$
7. *En déduire une généralisation de la question 5 : pour tout triplet de réels (x, y, z) deux à deux distincts, (ev_x, ev_y, ev_z) est une base de E^**
8. *Montrer que deux polynôme de degré 2 qui coïncident en trois points deux à deux distincts de $\mathbb{R}$ sont égaux.*

Les deux exercices suivants anticipent un peu sur le cours. Néanmoins, ils peuvent être traités avec des connaisssances élémentaires concernant les produits scalaires.

Exercice 7 *Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ une famille de formes linéaires sur E. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si : $\bigcap_{i=1}^n Ker(\varphi_i) = \{0\}$.*

Exercice 8 *Soit E un espace vectoriel réel. On suppose E muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base ortho-normée de E. Soit $\varphi \in E^\star$. Soit $V_\varphi = \Sigma_{i=1}^n e_i \varphi(e_i)$.*

1. *Montrer que V_φ est l'unique vecteur de E tel que : $\forall\ W \in E$, $\varphi(W) = (W|V_\varphi)$, et que $\|V_\varphi\| = \|\varphi\|$.*
2. *Inversement, soit V un vecteur non nul de E, de norme 1. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi \in E^\star$, telle que $\varphi(V) = 1$, et $\|\varphi\| = 1$.*
3. *Avec V et φ comme dans la question précédente, soit $\psi \in E^\star$, tel que $\|\psi\| = 1$, et $\psi(V) = 1$. Soit V_ψ tel que $\psi(W) = (W|V_\psi)$, $\forall W \in E$. Montrer que $V_\varphi - V_\psi$ est orthogonal à V_φ. En déduire que $V_\varphi = V_\psi$, et que $\varphi = \psi$.*

4. *Montrer que le produit scalaire de E détermine un isomorphisme isométrique de E sur $E^\star$.*

Exercice 9 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'anneau des polynôme à coefficients réels en une indéterminée X.*

1. *Quelle est la dimension de E ?*
2. *Pour tout $P \in E$, on pose $N(P) = (\int_{-1}^{1} P^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que N est une norme sur E, satisfaisant l'identité du parallélogramme.*
3. *En déduire que N dérive d'un produit scalaire, et donner l'expression de ce produit scalaire.*
4. *Montrer que $\forall P_1\,, P_2\, \in E, \int_{-1}^{1} P_1^2(t)dt \int_{-1}^{1} P_2^2(t) \geq (\int_{-1}^{1} P_1(t)P_2(t)dt)^2$.*

Exercice 10 *Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E = \mathbb{R}^4$, on notera $\epsilon_i(x) = x_i, i \in [\![1, 4]\!]$. Les formes linéaires ainsi définies sont appelées <u>formes coordonnées</u>.*

1. *Montrer que $\mathcal{B}^\star = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ est une base de $E^\star$. Quelle est la base pré-duale $\mathcal{B}$, de $\mathcal{B}^\star$?*
2. *On considère maintenant les formes linéaires $\varphi_i, i \in [\![1, 4]\!]$, telles que $\varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4$, $\varphi_2(x) = x_1 + x_2 + kx_3 + x_4$, $\varphi_3(x) = x_1 + x_3 + (k + 4)x_4$, $\varphi_4(x) = x_2 - 3x_3 - kx_4$. Ici, k est un paramètre réel fixé. Donner les composantes de ces formes linéaires dans la base $\mathcal{B}^\star$.*
3. *Discuter le rang de la famille $\{\varphi_i,\, i \in [\![1, 4]\!]\}$.*

Exercice 11 *Soient n un entier strictement positif, et $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On se donne $A \in E$, une matrice fixée. On définit $\varphi_A : E \to \mathbb{R}$, telle que $\varphi_A(M) = tr(AM), \forall M \in E$.*

1. *Montrer que φ_A est une forme linéaire sur E.*
2. *Montrer que l'application $A \mapsto \varphi_A$ est une application linéaire de E dans $E^\star$.*
3. *On note, $E_{i,j}$ la matrice dont toutes les entrées sont nulles à l'exception de celle se trouvant à l'intersection de la ligne i, et de la colonne j, qui vaut 1. (Cette matrice s'appelle une <u>unité matricielle</u>).*
   Montrer que $\mathcal{B} = \{E_{i,j}, (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]\}$ est une base de E, et donner sa base duale $\mathcal{B}^\star$.
4. *Déterminer $Ker\varphi_{E_{i_0,j_0}}$, avec i_0, et j_0 fixés.*

5. *Montrer que l'application* $A \mapsto \varphi_A$ *(cf question 2) est surjective. Cette application est elle un isomorphisme de* E *sur* $E^\star$ *? (Indication : considérer* $\varphi_A({}^tA)$*).*

Exercice 12 *Soit* E_0 *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $\{(1,1,1,1),(-1,1,-2,2),(-1,5,-4,8),(-3,1,-5,3)\}$.

1. *Déterminer la dimension de* E_0*, et celle de* $Ann(E_0)$*.*
2. *Donner une base de* $Ann(E_0)$*. (On pourra, par exemple, utiliser l'exercice 8.)*