Algèbre 3 - Semestre 5. Licence L3. Année 2020-21
Planche de TD 3

Exercice 1 *Déterminer la forme polaire, le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :*

1. $q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz.$
2. $q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$
3. $q(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx.$

Exercice 2 *Effectuer une réduction de Gauss des formes quadratiques suivantes, puis en déterminer le rang et la signature :*

1. $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz.$
2. $q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz.$
3. $q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$
4. $q(A) = tr(A^2), \forall A \in M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}.$
5. $q(A) = tr({}^tAA), \forall A \in M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}.$

Exercice 3 *Soit $n \geq 1$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit :*

$$B(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt, \quad \textit{et } q(P) = B(P,P).$$

1. *Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Anti-symétrique ?*
2. *La forme quadratique q admet-elle des vecteurs isotropes non nuls ?*
3. *Donner la matrice de q dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$.*
4. *Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle définie ?*

Exercice 4 *Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, telle que $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.*

1. *Montrer que q est définie positive.*
2. *Déterminer une base ortho-normale pour q en utilisant la réduction de Gauss, puis par la méthode de Gramm-Schmidt.*

Exercice 5 *Soient E un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel, et B une forme bilinéaire sur E, on note q la forme quadratique associée.*

1. *Montrer l'identité de Cauchy :*

$$q(q(u)v - B(u,v)u) = q(u)[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)],\ \forall u,v \in E.$$

2. *On suppose q définie positive. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$B(u,v)B(v,u) \leq q(u)q(v),\ \forall u,v \in E.$$

Exercice 6 *Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On définit, sur $E \times E$ l'application $B(M,N) = Tr(MJN)$.*

1. *Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Anti-symétrique ?*
2. *Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{1}, e_{1,2}, e_{2,1})$. (Ici, $\mathbf{1}$ désigne la matrice unité, et $e_{1,2}, e_{2,1}$ désignent les unités matricielles canoniques.) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.*
3. *Calculer dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de la forme quadratique q, associée à B.*
4. *Déterminer la signature, le rang et le noyau de q. La forme quadratique q est-elle définie ? positive ? négative ? non dégénérée ?*
5. *Soit $F = \mathbb{R}.\mathbf{1} \subset E$. Déterminer $F^{\perp}$ (l'orthogonal de F relativement à q.)*

Exercice 7 *(Plan hyperbolique.) Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la forme quadratique $q(x,y) = x^2 - y^2$. On note B la forme bilinéaire associée. Trouver deux vecteurs isotropes $u, v \in E$ tels que $B(u,v) = 1$.*

Exercice 8 *Soit q une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour toute $\mathcal{B}$, base de E, on notera $M(\mathcal{B})$ la matrice de la forme polaire de q dans $\mathcal{B}$.*

1. *Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Redémontrer la formule permettant de calculer $M(\mathcal{B})$ à partir de $M(\mathcal{B}')$.*
2. *En choisissant judicieusement $\mathcal{B}'$, montrer, à l'aide de la question précédente, que $det(M(\mathcal{B})) > 0$.*
3. *Pour tout $k \leq n$. On définit $M(\mathcal{B};k)$ la sous matrice de $M(\mathcal{B})$ constituée des k premières lignes et des k premières colonnes de $M(\mathcal{B})$. Montrer que $det(M(\mathcal{B};k)) > 0$.*

Exercice 9 *Cet exercice propose une réciproque de l'exercice 8.*
Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, tel que $dim(F) = k$, et $v \in E$, $v \notin F$. Soit q une forme quadratique sur $F + \mathbb{R}.v$. Soit M la matrice de la forme polaire de q. On suppose que la restriction $q|_F$ est définie positive.

1. *Montrer qu'il existe une base de $F + \mathbb{R}.v$ dans laquelle la matrice M est de la forme $\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{k} c_i(e_{i,k+1} + e_{k+1,i}) + c_{k+1}e_{k+1,k+1}$. C'est à dire, un matrice identité de taille $k \times k$, bordée à droite par une colonne de $k + 1$ coefficients, et en bas par la transposée de cette colonne, comme ci-dessous :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_k \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_k & c_{k+1} \end{pmatrix}.$$

2. *Soit M une matrice de cette forme. Supposons de plus que $det(M) > 0$. Montrer qu'alors $c_{k+1} > \sum_{i=1}^{k} c_i^2$.*
3. *Si q est comme dans la question précédente, montrer qu'il existe une base de $F + \mathbb{R}.v$ dans laquelle la matrice de q est diagonale, et à coefficients strictement positifs.*
4. *Déduire de la question précédente que q est définie positive sur $F + \mathbb{R}.v$*
5. *En déduire une réciproque de l'exercice 8.*

Exercice 10 *En utilisant les exercices 8 et 9, montrer le critère de Sylvester :*
Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, de dimension n. Soit $M(\mathcal{B})$ la matrice de la forme polaire de q, dans une base $\mathcal{B}$ quelconque. Pour tout $k \leq n$, on appellera sous-matrice principale d'ordre k, la sous matrice $M(\mathcal{B}; k)$ de $M(\mathcal{B})$, constituée des k premières lignes et des k premières colonnes de $M(\mathcal{B})$ (cf. exercice 8.) Alors :

a) q est définie positive si et seulement si $\forall 1 \leq k \leq n$, $det(M(\mathcal{B}; k) > 0$.

b) q est définie négative si et seulement si $\forall 1 \leq k \leq n$, le signe de $det(M(\mathcal{B}; k)$ est $(-1)^k$.

Exercice 11 *En appliquant le critère de Sylvester (cf. exercice 10), déterminer si les matrices suivantes définissent des formes quadratiques définies ? positives ? négatives ?*

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ } (a \in \mathbb{R}),$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$