Algèbre 3 - Semestre 5. Licence L3. Année 2020-21
Planche de TD 4

Exercice 1 *(Dualité dans les espaces euclidiens - théorème de représentation de Riesz.)*

Soit $(E, \prec\,|\,\succ)$*un espace euclidien.*

1. *Soit* $x_0 \in E$*. On note* φ_{x_0} *l'application telle que :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{x_0}: & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \prec x \mid x_0 \succ \end{array} .$$

   Montrer que φ_{x_0} *est une forme linéaire.*

2. *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & E & \to & E^* \\ & x_0 & \mapsto & \varphi_{x_0} \end{array}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. *(Théorème de Riesz.) En déduire que si* f *est une forme linéaire sur* E*, alors il existe un unique* $x_0 \in E$ *vérifiant :* $\forall x,\ f(x) = \prec x \mid x_0 \succ$ *.*
4. *(Application : description des hyperplans.) Soit* H *un hyperplan de* E*. Montrer qu'il existe* $v \in E\backslash\{0\}$ *tel que* $H = v^{\perp}$*.*
5. *(Application : existence de l'endomorphisme adjoint.) Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme* $v \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\forall x, y \in E,\ \prec u(x) \mid y \succ = \prec x \mid v(y) \succ$ *.*

Exercice 2 *(Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.)*

On se propose de démontrer le théorème suivant : Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base d'un espace euclidien E, alors il existe une base ortho-normée $(g_1, ..., g_n)$ vérifiant : $\forall k \in \{1, ..., n\},\ vect(g_1, ..., g_k) = vect(e_1, ..., e_k)$. De plus, on peut construire explicitement une telle base.

1. *Soit* E *un espace euclidien,* F *un sous-espace vectoriel de* E *admettant une base ortho-normée* $(g_1, ..., g_k)$*. Soit* $x \in E$*. Montrer qu'il existe un unique* $x_F \in F$ *vérifiant* $x - x_F \in F^{\perp}$ *; donner ses coordonnées dans la base* $(g_1, ..., g_k)$*.*

2. *Prouver le théorème par récurrence sur la dimension n de E.*
3. *Soit E euclidien et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. En déduire une procédure pour orthonormaliser $(e_1, ..., e_n)$.*
4. *(Exemple.) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille de vecteurs $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 0)$, $e_3 = (0, 1, 0)$, pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.*
5. *(Application.) Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F \bigoplus F^\perp = E$. En déduire la dimension de $F^\perp$.*

Exercice 3 *Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont orthogonales ?*

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *Déterminer, sans calculs, les inverses des matrices suivantes :*

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 *Soit A une matrice réelle de taille $(2n+1) \times (2n+1)$.*

1. *Soit $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A. Quel est son degré ?*
2. *On note $(l_+, l_-) = (\lim_{+\infty} P_A(X), \lim_{-\infty} P_A(X))$. Quelles sont les valeurs possibles du couple (l_+, l_-) ? En déduire que A admet au moins une valeur propre réelle.*
3. *Montrer que si $A \in \mathcal{O}(2n+1)$, alors 1 ou -1 est valeur propre de A.*
4. *En déduire une décomposition de $\mathcal{O}(2n+1)$ comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{O}(2n)$.*
5. *Montrer que si $A \in \mathcal{O}(3)$, il existe une base ortho-normée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A est de la forme :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, *ou :* $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Exercice 6 *Dans $\mathbb{R}^2$, on note (x, y) les coordonnées d'un point courant dans la base canonique. Etant donnés deux angles θ et α, on note R_θ la rotation vectorielle d'angle θ, et S_α la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x\tan(\frac{\alpha}{2})$.*

1. *Ecrire les matrices de* R_θ*, et de* S_α*.*
2. *Calculer et caractériser :* $R_\theta S_\alpha$, $S_\alpha R_\theta$, $S_\alpha S_\beta$, $S_\beta S_\alpha, R_\theta R_\eta, R_\eta R_\theta$.

Exercice 7 *Soit* $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{O}(n)$*. Montrer que* $\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\right| \leq n$*. (Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec un vecteur bien choisi.)*

Exercice 8 *Soient* E *un espace vectoriel euclidien,* $u \in \mathcal{L}(E)$*. On notera* A *la matrice de* u *dans une base orthonormée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. u *est une symétrie orthogonale.*
2. ${}^tAA = \mathbf{1}$ *et* ${}^tA = A$*.*

Cela reste-t-il vrai si A *est la matrice de* u *dans une base qui n'est pas orthonormée ?*

Exercice 9 *Soient* E *un espace vectoriel euclidien,* $p \in \mathcal{L}(E)$*. On notera* P *la matrice de* p *dans une base orthonormée. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. p *est une projection orthogonale.*
2. $P^2 = P$ *et* ${}^tP = P$*.*

Exercice 10 *Soient* E *un espace vectoriel euclidien, et* $S \in \mathcal{L}(E)$ *une symétrie orthogonale.*

1. *Quelles sont les valeurs propres de* S *?*
2. *Ecrire, en fonction de* S*, l'expression des projecteurs orthogonaux sur chacun des sous-espaces propres de* S*.*

Exercice 11 *Soient* E_1 *et* E_2 *deux sous espaces vectoriels d'un espace euclidien* E*, tels que* $E = E_1 \oplus^\perp E_2$*. (Somme directe orthogonale.) Soient* P_1 *et* P_2 *les projecteurs orthogonaux sur* E_1 *et* E_2 *respectivement.*

1. *Montrer que* $P_1 + P_2 = \mathbf{1}$, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.
2. *Ecrire les symétries orthogonales* S_1 *et* S_2*, par rapport à* E_1 *et à* E_2*, en fonction de* P_1 *et* P_2*.*

3. *On considère $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique B, et du produit scalaire euclidien. Soit $E_1 = \mathbb{R}.(1,1,1)$. Déterminer E_2, ainsi que l'expression des matrices de F_1, F_2, P_1, P_2 dans B.*

Exercice 12 *Soit A un matrice réelle, $n \times n$, antisymétrique. Montrer que :*

1. $A - \mathbf{1}$ *est inversible.*
2. $(A + \mathbf{1})(A - \mathbf{1})^{-1}$ *est une matrice orthogonale.*

Exercice 13 *Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales, et préciser leurs décompositions en produits de réflexions :* $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications linéaires définies par les matrices suivantes :* $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$, $B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, et $\vec{v}_2 = (1,0,1)$. Déterminer l'axe et l'angle d'une rotation ρ, de $\mathbb{R}^3$, telle que $\rho(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de ρ est de la forme :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.