Algèbre 3 - Semestre 5. Licence L3. Année 2020-21
Planche de TD 5
Espaces hermitiens

Exercice 1 *Soit* $E = \mathbb{C}^3$. *On considère l'application* $q : E \to \mathbb{R}$ *telle que* $q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_2} + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_3$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in E$.

1. *Déterminer la forme hermitienne* H, *sur* $E \times E$, *telle que* $\forall x \in E$, $q(x) = H(x, x)$.
2. *Déterminer la matrice de* H *dans la base canonique de* E.
3. *Déterminer une base de* E, *ortho-normée pour* q.

Exercice 2 *Soit* $E = \mathbb{C}^3$. *On suppose* E *muni de son produit scalaire canonique. Soit* $F \subset E$ *le sous-espace vectoriel d'équation* $x_1 - x_2 + ix_3 = 0$.

1. *Déterminer* $F^\perp$.
2. *Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur* F *dans la base canonique.*
3. *Donner une base ortho-normée de* F.

Exercice 3 *Soient* E *un espace hermitien de dimension finie, et soit* $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Montrer que* $Im(u)^\perp = Ker(u^\star)$.
2. *Montrer que* $Ker(u) = Ker(u^\star u)$.
3. *Montrer que si* u *est normal,* $Ker(u) = Ker(u^\star)$.
4. *Montrer que si* u *est normal,* $Im(u)^\perp = Ker(u)$
5. *Soit* v *un autre endomorphisme normal de* E. *Montrer que* $u \circ v = 0$ *si et seulement si* $v \circ u = 0$.

Exercice 4 *Soient E un espace hermitien de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$.*

1. *Montrer que $(u(x)|y) = 0$, pour tout y élément de E. (Indication: calculer $(u(x+y)|x+y)$, et $(u(x+iy)|x+iy)$.)*
2. *En déduire que $u = 0$.*
3. *Peut-on affirmer la même chose si E est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel euclidien ?*

Exercice 5 *Soient E un espace hermitien, et $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\forall (x,y) \in E \times E, (T(x)|T(y)) = \frac{1}{4} \Sigma_{k=0}^{3} i^k \|T(x + i^k y)\|^2$.*

Exercice 6 *Soit $E = \mathbb{C}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ la base canonique de E. On suppose E muni de son produit scalaire canonique. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $v(e_i) = e_{i+1}$, si $i < n$, et $v(e_n) = 0$.*

1. *Déterminer $v^\star$.*
2. *Calculer $v^\star v$ et $vv^\star$.*
3. *v est-il normal ?*