

# CATÉGORIES, ALGÈBRES, ESQUISSES et NÉO-ESQUISSES

27-30 Septembre 1994





## Avant-propos

Le volume que j'ai la fierté de présenter constitue les actes des journées mathématiques "*Catégories, Algèbres, Esquisses et Néo-esquisses*" (C.A.E.N.). Ces journées, qui se sont tenues à l'Université de Caen du 27 au 30 septembre 1994, ont permis de riches échanges franco-britanniques, ainsi qu'il est de tradition dans notre université depuis sa fondation en 1432 par le jeune Henri VI...

J'ai demandé à chacun des vingt-cinq conférenciers de me fournir un texte original de six pages reprenant d'autant près que possible le contenu de l'exposé oral. Ce sont ces textes, relus et corrigés avec soin, mais en aucune façon amendés, que l'on lira ici. Quatre conférenciers n'ont pu me fournir à temps la rédaction demandée : on trouvera les titres de leurs exposés en fin de volume. A l'inverse, les deux premières contributions sont l'œuvre de mathématiciens invités, mais empêchés en dernière minute. Au demeurant, l'ordre adopté est celui dans lequel se sont déroulées les conférences à Caen.

Au-delà de la diversité des approches et des styles, je souhaite que le lecteur soit comme je l'ai été sensible à la qualité scientifique et à la réelle cohérence de l'ensemble. Je renonce à dresser ici la liste des croisements innombrables, bien dessinés déjà ou seulement potentiels, que j'ai découverts entre ces vingt-deux essais.

Le colloque a bénéficié de crédits spécifiques de l'Université de Caen (8 000 F), d'une aide de la Ville de Caen (5 000 F) et d'une participation du Groupe de Recherche en Algorithmique et Logique (8 000 F). Sur le plan pratique, j'ai été efficacement secondé par l'équipe du secrétariat de mathématiques (Mesdames Lamotte, Vernet, Buchart, Dubois et Faride) ainsi que par André Sesboüé. Patrice Gourbin a créé le logo ; il est, plus souterrainement, responsable de bien davantage. Enfin, très chaleureusement, merci aux conférenciers : j'espère qu'ils gardent un bon souvenir de ces quelques jours en Normandie, que ce volume permettra de prolonger.

Pierre AGERON



# Des Graphes aux Patchworks via les Esquisses et les Trames

Christian LAIR

Université Denis Diderot-Paris 7, U.F.R. de Mathématiques, Equipe Catégories et Structures  
2, place JUSSIEU, 75251 PARIS CEDEX 05, FRANCE

## I Graphes et graphes à composition

### 1. Graphes

On sait (voir [1]) qu'un *graphe*  $\mathcal{G}$  est constitué d'un ensemble *d'objets*  $\text{Ob}(\mathcal{G})$ , d'un ensemble de *flèches*  $\text{Fl}(\mathcal{G})$  et de deux applications  $\text{dom}(\mathcal{G}) : \text{Fl}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{G})$  (*sélection des domaines*) et  $\text{codom}(\mathcal{G}) : \text{Fl}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{G})$  (*sélection des codomaines*) et on définit, alors, facilement ce qu'est un *homomorphisme* entre graphes

Un graphe *spécifie* la position relative de certaines sortes (ses objets) et de certaines fonctions (ses flèches). De ce point de vue,  $\mathcal{G}$  n'est rien d'autre que la représentation graphique d'une *signature multisorte*  $\Sigma$  (ayant autant de sortes que  $\mathcal{G}$  a d'objets), purement fonctionnelle (i. e. sans symboles relationnels) et où tous les symboles fonctionnels (autant que  $\mathcal{G}$  a de flèches) sont unaires. Inversement, une telle signature peut toujours être représentée par un tel graphe. De la sorte, un homomorphisme  $H : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}\text{ns}$ , de  $\mathcal{G}$  vers (le graphe sous-jacent à) la catégorie  $\mathcal{E}\text{ns}$ , s'identifie à une interprétation (ensembliste) de la signature  $\Sigma$  et réciproquement.

### 2. Graphes à composition

Un *graphe à composition* (voir [2] et [3])  $\mathcal{C}$  est constitué d'un graphe *sous-jacent*  $\text{Ssj}(\mathcal{C})$ , d'un ensemble  $\text{Comp}(\mathcal{C}) \subseteq \{(c', c) \mid (c', c) \in \text{Fl}(\mathcal{C}) \times \text{Fl}(\mathcal{C}) \text{ et } \text{dom}(\mathcal{C})(c') = \text{codom}(\mathcal{C})(c)\}$  de (certains) couples, dits *composables*, de flèches consécutives, d'une *loi de composition* (non nécessairement associative)  $\text{comp}(\mathcal{C}) : \text{Comp}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{C})$ , d'une partie  $\text{Obid}(\mathcal{C}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$  constituée d'objets, dits *à identités*, d'une application *sélection des identités*  $\text{selid}(\mathcal{C}) : \text{Obid}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Fl}(\mathcal{C})$  et ce de sorte que :

- pour tout objet à identité  $C \in \text{Obid}(\mathcal{C})$ , on a  $\text{dom}(\mathcal{C})(\text{selid}(\mathcal{C})(C)) = C = \text{codom}(\mathcal{C})(\text{selid}(\mathcal{C})(C))$ ,
- pour tout objet à identité  $C \in \text{Obid}(\mathcal{C})$  et toute flèche  $c \in \text{Fl}(\mathcal{C})$  telle que  $\text{dom}(\mathcal{C})(c) = C$  (resp.  $\text{codom}(\mathcal{C})(c) = C$ ), le couple  $(c, \text{selid}(\mathcal{C})(C))$  (resp.  $(\text{selid}(\mathcal{C})(C), c)$ ) est composable et de composé  $c$ ,
- pour tout couple composable  $(c', c) \in \text{Comp}(\mathcal{C})$ , on a  $\text{dom}(\mathcal{C})(\text{comp}(\mathcal{C})(c', c)) = \text{dom}(\mathcal{C})(c)$  et  $\text{codom}(\mathcal{C})(\text{comp}(\mathcal{C})(c', c)) = \text{codom}(\mathcal{C})(c')$ .

En particulier, les graphes sont évidemment les graphes à composition n'ayant *aucun* objet à identité et *aucun* couple composable de flèches. A l'opposé, les catégories sont les graphes à composition dont *tous* les objets sont à identité, où *tous* les couples de flèches consécutives sont composables et où la composition est *associative*.

Par analogie avec le cas des catégories, on définit aisément ce qu'est un *foncteur* entre graphes à composition.

Cette fois, outre des positions relatives de sortes et fonctions, un graphe à composition *spécifie* des équations fonctionnelles. Précisément,  $\mathcal{C}$  représente une théorie *équationnelle*  $\text{Teq}$ , écrite dans un langage multisorte purement fonctionnel et unaire (celui associé au graphe sous-jacent à  $\mathcal{C}$ ). A contrario, une telle théorie

équationnelle, écrite dans un langage multisorte, purement fonctionnel et unaire, peut toujours être représentée par un graphe à composition. De la sorte, un foncteur  $F: C \rightarrow Ens$  s'identifie à un modèle (ensembliste) de la théorie équationnelle  $Teq$ .

## II Esquisses

### 1. Cônes et limites

Si  $I$  est un graphe à composition, on note  $Coneproj(I)$  (resp.  $Coneind(I)$ ) le graphe à composition obtenu en adjoignant à  $I$  un objet « initial » (resp. « final ») et on désigne par  $injproj(I): I \rightarrow Coneproj(I)$  (resp.  $injind(I): I \rightarrow Coneind(I)$ ) le foncteur injection canonique. De la sorte,  $Coneproj(I)$  est « le » cône projectif (resp. inductif) « générique » d'indexation  $I$ .

Concrètement, maintenant, si  $C$  est un graphe à composition, un foncteur  $P: Coneproj(I) \rightarrow C$  (resp.  $Q: Coneind(I) \rightarrow C$ ) est un *cône projectif* (resp. *inductif*), dans  $C$ , d'indexation  $I$ , de base le foncteur  $P \circ injproj(I): I \rightarrow Coneproj(I) \rightarrow C$  (resp.  $Q \circ injind(I): I \rightarrow Coneind(I) \rightarrow C$ ).

Plus particulièrement encore, si  $\mathcal{A}$  est une catégorie, on voit qu'une *limite projective* (resp. *inductive*) s'identifie à un cône projectif (resp. inductif) de  $\mathcal{A}$  qui est *final* (resp. *initial*), ou encore *co-universel* (resp. *universel*), parmi tous les cônes projectifs (resp. inductifs) de  $\mathcal{A}$  de même indexation et de même base.

### 2. Esquisses

Une *esquisse* (voir [4])  $\mathcal{E}$  est constituée d'un graphe à composition *support*  $Supp(\mathcal{E})$ , d'une classe  $Proj(\mathcal{E})$  de cônes projectifs *distingués* dans le support de  $\mathcal{E}$  et d'une classe  $Ind(\mathcal{E})$  de cônes inductifs *distingués* dans le support de  $\mathcal{E}$ .

Les *homomorphismes* entre esquisses sont les foncteurs entre leurs supports qui transforment les cônes distingués en cônes distingués.

De même, un *modèle*  $M: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$  de l'esquisse  $\mathcal{E}$  dans la catégorie  $\mathcal{A}$  est un foncteur  $M: Supp(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$  transformant tout cône distingué dans  $\mathcal{E}$  en un cône *limite* dans  $\mathcal{A}$ .

Dans ces conditions, du point de vue de ses modèles dans une catégorie quelconque, une esquisse *spécifie* non seulement des positions relatives de sortes et de fonctions, non seulement des équations fonctionnelles, mais aussi comment certaines sortes sont constructibles à partir d'autres, grâce à des « constructeurs de limites ».

Plus précisément encore, on peut montrer que (voir [5] et [6]), du point de vue de ses modèles *ensemblistes*,  $\mathcal{E}$  représente une théorie axiomatique  $Tax$  (écrite dans un langage multisorte, non nécessairement purement fonctionnel ou unaire, et où les formules sont du premier ordre mais éventuellement infinitaires). A contrario, une telle théorie axiomatique du premier ordre (éventuellement infinitaire) est toujours *esquissable*, i. e. peut être représentée (et même de plusieurs manières, en général) par une esquisse. De la sorte, un modèle  $M: \mathcal{E} \rightarrow Ens$  s'identifie à un modèle (ensembliste) de la théorie  $Tax$ .

## III Trames

### 1. Prolongements et prolongements universels

Si  $I, J$  et  $C$  sont trois graphes à composition et si  $L: I \rightarrow J$  est un foncteur, alors un foncteur  $P: J \rightarrow C$  est un *prolongement*, dans  $C$ , de base  $P \circ L$ , le *long* du foncteur  $L$ .

Par exemple, un cône projectif (resp. inductif), dans  $C$ , d'indexation  $I$ , est un prolongement le long du foncteur injection canonique  $injproj(I): I \rightarrow Coneproj(I)$  (resp.  $injind(I): I \rightarrow Coneind(I)$ ).

Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie, le foncteur  $R : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  est un *prolongement projectivement* (resp. *inductivement*) *universel* (du foncteur  $F = R \circ L : I \rightarrow \mathcal{A}$ , le long du foncteur  $L : I \rightarrow \mathcal{J}$ ), si :

- pour tout autre prolongement  $R' : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$ , de  $F$  le long de  $L$ , il existe une et une seule transformation naturelle  $r : R' \Rightarrow R$  (resp.  $r : R \Rightarrow R'$ ) telle que  $r \circ L = 1_F$ .

Par exemple, on voit qu'une limite projective (resp. inductive) dans  $\mathcal{A}$  est un prolongement projectivement (resp. inductivement) universel. De même, il est facile de voir qu'une extension de Kan (voir [1]) droite (resp. gauche), le long d'un foncteur  $L' : I \rightarrow \mathcal{J}'$  entre deux catégories (pour simplifier), s'identifie à un prolongement projectivement (resp. inductivement) universel, le long du foncteur injection canonique  $L : I \rightarrow \text{laxcolim}(L' : I \rightarrow \mathcal{J}')$  de  $I$  vers la lax-colimite « contravariante » (resp. « covariante ») de la flèche  $L' : I \rightarrow \mathcal{J}'$ , dans « la » 2-catégorie « des catégories ».

## 2. Trames d'ordre $\leq 1$

Une *trame* (voir [7])  $T$ , d'*ordre*  $\leq 1$ , est constituée d'un graphe à composition *support*  $\text{Supp}(T)$ , d'un premier ensemble  $\text{Prolp}(T)$  de prolongements (dits *projectifs*) *distingués* dans  $\text{Supp}(T)$  et d'un second ensemble de prolongements (dits *inductifs*) *distingués* dans  $\text{Supp}(T)$ .

Par exemple, les esquisses sont exactement les trames d'ordre  $\leq 1$  où les seuls prolongements projectifs (resp. inductifs) distingués sont des cônes projectifs (resp. inductifs).

Les *homomorphismes* entre trames d'ordre  $\leq 1$  sont bien sûr les foncteurs entre leurs supports qui (par composition) transforment les prolongements projectifs (resp. inductifs) distingués en prolongements projectifs (resp. inductifs) distingués.

De même, un *modèle*  $M : T \rightarrow \mathcal{A}$  de la trame  $T$  dans la catégorie  $\mathcal{A}$  est un foncteur  $M : \text{Supp}(T) \rightarrow \mathcal{A}$  transformant tout prolongement projectif (resp. inductif) distingué dans  $T$  en un prolongement projectivement (resp. inductivement) *universel*.

Du point de vue de ses modèles dans une catégorie quelconque, il convient de voir une trame d'ordre  $\leq 1$  comme spécifiant non seulement des positions relatives de sortes et de fonctions, non seulement des équations fonctionnelles, mais aussi le *statut* (projectivement ou inductivement) *universel*, non seulement de certains objets *isolément constructibles* à partir de groupes d'autres, mais aussi de certains *diagrammes d'objets et flèches* constructibles à partir d'autres, par des *constructeurs* de prolongements universels.

Plus particulièrement, au même titre que les extensions de Kan vers  $\mathcal{E}\text{ns}$  se calculent par limites, il se trouve que, du point de vue des modèles *ensemblistes*, les trames d'ordre  $\leq 1$  représentent ni plus ni moins que les esquisses, à savoir les théories du premier ordre !

## 3. Prolongements complexes et prolongements complexes universels.

Supposons que  $n > 1$  est un entier et qu'on ait défini les trames d'ordre  $\leq n$ , leurs supports, leurs homomorphismes et leurs modèles dans les catégories.

Si, cette fois,  $L : I \rightarrow \mathcal{J}$  est un tel *homomorphisme* entre de telles trames d'ordre  $\leq n$  et si  $C$  est un graphe à composition, on dit encore qu'un foncteur  $P : \text{Supp}(\mathcal{J}) \rightarrow C$  est un *prolongement*, mais *complexe d'ordre  $\leq n$* , dans  $C$ , le long de l'*homomorphisme*  $L$ , de base le foncteur  $P \circ \text{Supp}(L) : \text{Supp}(I) \rightarrow C$ .

Si  $\mathcal{A}$  est une catégorie, un modèle  $M : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$  est un *prolongement projectivement* (resp. *inductivement*) *universel*, mais *complexe d'ordre  $\leq n$* , dans  $\mathcal{A}$ , le long de l'*homomorphisme*  $L : I \rightarrow \mathcal{J}$ , du modèle  $M \circ L : I \rightarrow \mathcal{A}$ , si :

- pour tout autre modèle  $M' : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$ , tel que  $M' \circ L = M$ , il existe une et une seule transformation naturelle  $m : M' \Rightarrow M$  (resp.  $m : M \Rightarrow M'$ ) telle que  $m \circ L = 1_F$ .

Par exemple, si  $L' : I \rightarrow \mathcal{J}'$  est un homomorphisme entre deux esquisses (i. e. entre deux trames d'ordre  $\leq 1$  particulières) et si  $M' : \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{E}\text{ns}$  est le modèle *librement engendré* par un certain modèle  $N : I \rightarrow \mathcal{E}\text{ns}$ , alors on dispose du prolongement  $M : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{E}\text{ns}$ , inductivement universel, complexe d'ordre  $\leq 1$ , de  $N$  le long de l'*homomorphisme* injection canonique  $L : I \rightarrow \mathcal{J}$  de  $I$  vers l'esquisse « lax-co-limite co-variente »  $\mathcal{J} = \text{laxcolim}(L' : I \rightarrow \mathcal{J}')$  (qu'on laisse au lecteur le soin de préciser).

#### 4. Trames quelconques

Une *trame* (voir [7])  $T$ , d'ordre  $\leq n+1$ , est constituée d'un graphe à composition *support*  $\text{Supp}(T)$ , d'un premier ensemble  $\text{Prolp}(T)$  de prolongements complexes d'ordre  $\leq n$  (dits *projectifs*) distingués dans  $\text{Supp}(T)$  et d'un second ensemble de prolongements complexes d'ordre  $\leq n$  (dits *inductifs*) distingués dans  $\text{Supp}(T)$ .

Les *homomorphismes* entre trames sont évidemment les foncteurs entre leurs supports qui (par composition) transforment les prolongements complexes projectifs (resp. inductifs) distingués en prolongements complexes projectifs (resp. inductifs) distingués.

De même, un *modèle*  $M : T \rightarrow \mathcal{A}$  de la trame  $T$  dans la catégorie  $\mathcal{A}$  est un foncteur  $M : \text{Supp}(T) \rightarrow \mathcal{A}$  transformant tout prolongement complexe projectif (resp. inductif) distingué en un prolongement complexe projectivement (resp. inductivement) universel.

Du point de vue de ses modèles dans une catégorie quelconque, une trame (d'ordre quelconque) spécifie non seulement des positions relatives de sortes et de fonctions, non seulement des équations fonctionnelles, mais aussi le statut (projectivement ou inductivement) universel non seulement de certains diagrammes d'objets et flèches (i. e. de *sous-trames d'ordre 0*) par rapport à d'autres, mais aussi de certaines *sous-spécifications (plus) complexes* (i. e. de *sous-trames d'ordre éventuellement > 0*) constructibles à partir d'autres, à l'aide de constructeurs de prolongements complexes universels.

Cela signifie, notamment (et pas seulement du seul point de vue des modèles ensemblistes) qu'une trame  $T$  d'ordre quelconque représente une théorie du deuxième ordre « universel » au sens, en tout cas englobant celui, du  $\lambda$ -calcul du second ordre (voir [7] et [8]).

### IV Patchworks

#### 1. Prolongements potentiellement et réellement contraints

Supposons, de nouveau (« à l'ordre 0 »), que  $L : I \rightarrow J$  est un foncteur entre deux graphes à composition. Une *contrainte*  $\Omega$  pour (les prolongements le long de)  $L$  est constituée par :

- un cône projectif  $\text{Clause}(\Omega) = (\Pi_X : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_X)_{X \in \mathcal{X}}$ , qu'on peut appeler la *clause de la contrainte*, d'indexation une certaine catégorie (pour simplifier)  $\mathcal{X}$  et formé de graphes à composition et de foncteurs,
- d'un foncteur  $\text{Attach}(\Omega) : J \rightarrow \mathcal{K}$ , attachant  $L$  à la clause.

Dans ces conditions, si  $C$  est un graphe à composition, un prolongement (quelconque)  $P : J \rightarrow C$  (de  $P \circ L$  le long de  $L$ ) sera dit *potentiellement contraint par*  $\Omega$ .

En particulier, si  $\mathcal{A}$  est une catégorie, le foncteur  $R : J \rightarrow \mathcal{A}$  est un *prolongement* (de  $R \circ L$  le long de  $L$ ) *réellement contraint par*  $\Omega$  si  $R$  vérifie la *clause* de la contrainte  $\Omega$ , i. e. si :

- pour tout foncteur  $Q : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ , tel que  $Q \circ \text{Attach}(\Omega) = R$ , il existe (au moins) un objet  $X$  de  $\mathcal{X}$  et au moins un foncteur  $Q_X : \mathcal{K}_X \rightarrow \mathcal{A}$  tel que  $Q_X \circ \Pi_X = Q$  et ce de sorte que deux telles factorisations (de  $Q$ ) sont dans la même composante connexe de la catégorie (comma)  $(\mathcal{K}_X)_{X \in \mathcal{X}} / \mathcal{A}$  (i. e. sont connectées par une suite finie de triangles commutatifs dont deux côtés sont d'autres factorisations de  $Q$  et dont le troisième côté figure dans la base de la clause).

Par exemple, à un foncteur  $L : I \rightarrow J$ , on peut attacher la contrainte *projectivement* (resp. *inductivement*) *universalisante*  $\text{Projuniv}(L)$  (resp.  $\text{Induniv}(L)$ ) telle que :

- $\mathcal{X}$  est la catégorie **1** (à un seul objet 0 et une seule flèche),
- $\mathcal{K} = J +_I J$  est le graphe à composition représentant deux prolongements « abstraits » (de  $I$  à  $J$ ) de même base (à savoir  $I$ ),
- $\mathcal{K}_0$  est le graphe à composition contenant  $\mathcal{K}$  et représentant une factorisation du deuxième prolongement au travers du premier,
- $\Pi_0 : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_0$  est le foncteur injection canonique,
- $\text{Attach}(\text{Projuniv}(L)) : J \rightarrow \mathcal{K}$  (resp.  $\text{Attach}(\text{Induniv}(L)) : J \rightarrow \mathcal{K}$ ) est le foncteur injection canonique sur le deuxième (resp. le premier) des deux prolongements contenus dans  $\mathcal{K}$ ,

Alors, un prolongement  $R : J \rightarrow \mathcal{A}$  réellement contraint par la contrainte  $\text{Projuniv}(L)$  (resp.  $\text{Induniv}(L)$ ), est évidemment un prolongement projectivement (resp. inductivement) universel.

## 2. Patchworks d'ordre $\leq 1$

Un *patchwork* (voir [3])  $\mathcal{P}$ , d'*ordre*  $\leq 1$ , est constitué d'un graphe à composition *support*  $\text{Supp}(\mathcal{P})$  et d'un ensemble  $\text{Prolocont}(\mathcal{P})$  de prolongements potentiellement contraints *distingués* dans  $\text{Supp}(\mathcal{P})$ . Par exemple, on voit qu'une trame d'*ordre*  $\leq 1$  est un patchwork d'*ordre*  $\leq 1$  particulier.

Les *homomorphismes* entre patchworks d'*ordre*  $\leq 1$  sont les foncteurs entre leurs supports qui (par composition) transforment les prolongements potentiellement contraints distingués en prolongements potentiellement contraints distingués.

De même, un *modèle*  $M : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$  du patchwork  $\mathcal{P}$  dans la catégorie  $\mathcal{A}$  est un foncteur  $M : \text{Supp}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{A}$  transformant tout prolongement potentiellement contraint distingué dans  $\mathcal{P}$  en un prolongement *réellement* contraint.

## 3. Prolongements complexes potentiellement et réellement contraints

Supposons que  $n > 0$  est un entier et qu'on ait défini les patchworks d'*ordre*  $\leq n$ , leurs supports, leurs homomorphismes et leurs modèles dans les catégories.

Si  $L : I \rightarrow J$  est un tel *homomorphisme* entre de tels patchworks d'*ordres*  $\leq n$  et si  $C$  est un graphe à composition, on dit encore qu'un *foncteur*  $P : \text{Supp}(J) \rightarrow C$  est un *prolongement*, mais *complexe d'*ordre*  $\leq n$* , dans  $C$ , le long de l'*homomorphisme*  $L$ , du foncteur  $P \circ \text{Supp}(L) : \text{Supp}(I) \rightarrow C$ .

Alors, une *contrainte*  $\Omega$ , mais *complexe d'*ordre*  $\leq n$* , pour (les prolongements le long de l'*homomorphisme*)  $L$  est (de nouveau, mais « à l'*ordre*  $\leq n$  ») constituée par :

- un cône projectif  $\text{Clause}(\Omega) = (\Pi_X : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_X)_{X \in X}$ , la clause *complexe* de la contrainte, indexé par une catégorie (pour simplifier)  $X$  et formé de patchworks d'*ordre*  $\leq n$  et d'*homomorphismes*,
- un *homomorphisme*  $\text{Attach}(\Omega) : J \rightarrow \mathcal{K}$ , attachant  $L$  à la clause,  $\text{Attach}(\Omega) : J \rightarrow \mathcal{K}$ .

Dans ces conditions, si  $C$  est un graphe à composition, un prolongement complexe  $P : J \rightarrow C$  (du foncteur  $P \circ L$  le long de l'*homomorphisme*  $L$ ) sera également dit d'*ordre*  $\leq n$  et *potentiellement contraint par*  $\Omega$ .

De même, si  $\mathcal{A}$  est une catégorie, le modèle  $R : J \rightarrow \mathcal{A}$  est un prolongement complexe d'*ordre*  $\leq n$ , du modèle  $R \circ L$ , le long de l'*homomorphisme*  $L$ , *réellement contraint par*  $\Omega$ , si  $R$  vérifie la clause *complexe* de la contrainte  $\Omega$ , i. e. si :

- pour tout modèle  $Q : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ , tel que  $Q \circ \text{Attach}(\Omega) = R$ , il existe (au moins) un objet  $X$  de  $X$  et au moins un modèle  $Q_X : \mathcal{K}_X \rightarrow \mathcal{A}$  tel que  $Q_X \circ \Pi_X = Q$  et ce de sorte que deux telles factorisations (de  $Q$ , par des *modèles*) sont dans la même composante connexe de la catégorie  $(\mathcal{K}_X)_{X \in X} / \text{modèles } \mathcal{A}$  (i. e. sont connectées par une suite finie de triangles commutatifs dont deux côtés sont d'autres factorisations de  $Q$  par des *modèles* et dont le troisième est un *homomorphisme* figurant dans la base de la clause).

Par exemple, si  $\mathcal{P}$  est un patchwork d'*ordre*  $\leq n$ , son graphe à composition support  $J = \text{Supp}(\mathcal{P})$  s'identifie à un patchwork d'*ordre* 0 (i. e. sans prolongements potentiellement contraints distingués). Alors, le foncteur  $L = \text{Id}(J) : I = J \rightarrow J$  s'identifie à un homomorphisme entre patchworks et le foncteur identité  $\text{Id}(J) : J \rightarrow J = \text{Supp}(\mathcal{P})$  définit un homomorphisme entre patchworks  $H : I \rightarrow \mathcal{P}$  (qui n'est évidemment pas, en général, un *homomorphisme* identité).

Maintenant, attachons à  $L$  la contrainte  $\text{Non}(\mathcal{P})$  telle que :

- $\text{Clause}(\text{Non}(\mathcal{P}))$  est le cône projectif d'indexation  $X = \emptyset$  et de sommet  $\mathcal{P}$ ,
- $\text{Attach}(\text{Non}(\mathcal{P})) = H : J \rightarrow \mathcal{P}$ .

Il est facile de voir qu'un foncteur  $M : \text{Supp}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{A}$ , i. e. un modèle  $M : J \rightarrow \mathcal{A}$ , est réellement contraint par  $\text{Non}(\mathcal{P})$  si, et seulement si, il n'est pas modèle de  $\mathcal{P}$ .

## 4. Patchworks quelconques

Un *patchwork* (voir [3])  $\mathcal{P}$ , d'*ordre*  $\leq n+1$ , est constitué d'un graphe à composition *support*  $\text{Supp}(\mathcal{P})$  et d'un ensemble  $\text{Prolocont}(\mathcal{P})$  de prolongements, complexes d'*ordres*  $\leq n$ , potentiellement contraints, *distingués* dans  $\text{Supp}(\mathcal{P})$ .

Les *homomorphismes* entre patchworks sont évidemment les foncteurs entre leurs supports qui (par composition) transforment les prolongements complexes, potentiellement contraints, distingués, en prolongements complexes, potentiellement contraints (avec les mêmes contraintes), distingués.

De même, un *modèle*  $M : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$  du patchwork  $\mathcal{P}$  dans la catégorie  $\mathcal{A}$  est un foncteur  $M : \text{Supp}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{A}$  transformant tout prolongement complexe, potentiellement contraint, distingué dans  $\mathcal{P}$ , en un prolongement complexe, *réellement contraint*.

Du point de vue de ses modèles dans une catégorie quelconque, un patchwork spécifie, non seulement des positions relatives de sortes et de fonctions, non seulement des équations fonctionnelles, mais aussi le statut, non nécessairement universel (plus complexe) de certaines de ses sous-spécifications complexes, éventuellement re-constructibles à partir d'autres.

Du point de vue des modèles ensemblistes, les patchworks sont des représentations diagrammatiques, « orientées sous-diagrammes » des théories du second ordre.

## V Bibliographie

- [1] S. MacLane, Categories for the Working Mathematician, Grad. Text in Math. 5, Springer, 1971.
- [2] C. Ehresmann, Catégories et Structures, Dunod, Paris, 1965.
- [3] C. Lair, Éléments de Théorie des Patchworks (I), Diagrammes 29, Paris, 1993.
- [4] C. Ehresmann, Esquisses et Types des Structures Algébriques, Bull. Inst. Polit. Iasi, XIX, 1968.
- [5] R. Guitart et C. Lair, Limites et Co-limites pour Représenter les Formules, Diagrammes 7, Paris, 1982.
- [6] C. Lair, Cours de 3ème Cycle, Multigraphié, Paris, 1986.
- [7] C. Lair, Trames et Sémantiques Catégoriques des Systèmes de Trames, Diagrammes 18, Paris, 1987.
- [8] P. Ageron, Sémantique Catégorique des Types : Comprendre le Système F, Diagrammes 19, Paris, 1988.
- [9] C. Lair, Éléments de Théorie des Patchworks (V), à paraître.

# Une modalité autoduale pour le connecteur « précède »

Christian Retoré

INRIA Lorraine et CRIN C.N.R.S., 615 rue du jardin botanique, BP 101, 54 602 Villers lès Nancy Cedex — retore@loria.fr

**Résumé:** Dans son article « A new constructive logic: classical logic » J.-Y. Girard soulève la question d'une modalité autoduale. Cette note fournit une solution sémantique relative au connecteur autodual et non-commutatif précède dans la catégorie des espaces cohérents.

## A. Présentation

Les règles structurelles de la logique classique sont responsables de son non-déterminisme, et la logique linéaire qui les traite subtilement par le biais de deux modalités évite cet écueil. La modalité « ? » autorise la contraction et l'affaiblissement en position positive, tandis que la modalité duale « ! » les autorise en position négative.

Du point de vue sémantique qui sera le nôtre ici, cela signifie que l'on a les morphismes canoniques suivants:

$$\begin{array}{ccc} !A & \xrightarrow{\quad} & !A \otimes !A \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ 1 & & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} ?A & \xrightarrow{\quad} & ?A \wp ?A \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ 1 & & A \end{array}$$

Les coupures croisées de la logique classique de [Gen34] sont en fait des coupures dont les deux prémisses principales sont des formules qui viennent d'être contractées. Ceci est une cause majeure de son non-déterminisme, comme en témoigne l'exemple 2 de l'annexe B de [Gir91].

Ceci ne peut se produire en logique linéaire, puisque pour être contractée une formule doit être de la forme  $?A$ , et que par suite sa négation est  $!A^\perp$  qui ne peut pas être contractée.

Pour étudier un tel phénomène il faut disposer d'une modalité autoduale, autorisant la contraction tant en position négative qu'en position positive. On note alors que l'affaiblissement est plutôt mal-venu, car même si ce n'est que sémantiquement vrai, il serait curieux d'avoir un morphisme de  $A$  dans  $1$  et un de  $1$  dans  $A$  pour tout  $A$ .

Nous nous concentrerons sur le modèle des espaces cohérents qui est conceptuellement lié à la logique linéaire, puisqu'elle en est issue. Dans ce cadre nous avons déjà étudié un connecteur non-commutatif et autodual nommé précède, et conçu le calcul ordonné qui étend la logique linéaire à ce connecteur [Re93].

S'inspirant de la définition de ce connecteur en termes d'espaces cohérents, on définit une modalité autoduale pour laquelle existent les morphismes canoniques suivants:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad \text{rétraction de} \quad} & \dashv A & \xrightarrow{\quad \text{isomorphisme} \quad} & \dashv A < \dashv A \\ \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \text{rien} & & \circ \end{array}$$

Il n'y a pas à l'heure actuelle de syntaxe étendant le calcul ordonné à cette modalité. Il faut pour cela étudier les cas de base d'élimination des coupures et les diagrammes commutatifs qui en résultent comme cela a été fait pour le système LC de [Gir91] dans [Qua95].

On peut s'étonner que j'étudie un éventuel modèle avant de savoir précisément ce qu'il modélise. Disons que c'est un moyen de guider les choix syntaxiques en évitant la dégénérescence du système, et que c'est un peu l'analogie pour les modèles de Heyting, de ce que la théorie des modèles appelle la théorie d'un modèle.

Que le lecteur m'excuse de n'avoir pas rappelé comment les espaces cohérents interprètent la logique linéaire. Cela se trouve dans l'article original de J.-Y. Girard «Linear logic» [Gir87], ainsi que dans le livre de A. S. Troelstra «Lectures on linear logic» [Tro92] — et une présentation étroitement liée aux réseaux de démonstration est reprise dans [Ret94a].

Pour plus de détails sur cette note, on pourra consulter [Ret94b].

## B. Remarques préliminaires

**DÉFINITION 1** Un espace cohérent  $A$  est un graphe simple dénombrable dont l'ensemble des sommets est appelé la trame et noté  $|A|$ . Deux points adjacents  $x$  et  $y$  sont dits strictement cohérents, ce qui se note  $x \wedge y[A]$ ; les abréviations suivantes sont pratiques:  $x \odot y[A]$  . ssi .  $x = y$  ou  $x \wedge y[A]$ ,  $x \vee y[A]$  . ssi . non  $x \odot y[A]$ .

Etant donné un espace cohérent  $A$ , son dual  $A^\perp$  est le graphe complémentaire.

Une application linéaire  $f$  de  $A$  dans  $B$  est une relation entre  $A$  et  $B$  telle que pour tous couples distincts  $(a, b), (a', b') \in f$  si  $a \odot a'[A]$  alors  $b \wedge b'[B]$ . Les applications linéaires se composent comme les relations. On parlera notamment d'isomorphisme linéaire partiel lorsque la relation est fonctionnelle et linéaire dans les deux sens, et de plongement linéaire lorsque de plus elle définit une application (au sens ensembliste) de  $|A|$  dans  $|B|$ .<sup>1</sup>

**DÉFINITION 2** Etant donnés deux espaces cohérents  $A$  et  $B$ , l'espace cohérent  $A$  précède  $B$ , noté  $A < B$ , est défini par:

trame:  $|A < B| = |A| \times |B|$

cohérence:  $(a, b) \sim (a', b')[A < B]$  . ssi .  $(a \wedge a'[A] \text{ et } b = b')$  ou  $b \wedge b'[B]$

**PROPOSITION 1** ([Ret93]) Ce connecteur est:

non-commutatif  $A < B \not\equiv B < A$ ,

autodual  $(A < B)^\perp \equiv A^\perp < B^\perp$ ,

associatif  $A < (B < C) \equiv (A < B) < C$ ,

admet 1 pour neutre  $A < 1 \equiv A \equiv 1 < A$ ,

entre la disjonction  $\varphi$  et la conjonction  $\otimes$  pour l'implication linéaire: pour tout couple d'espaces cohérents  $A$  et  $B$ , on a  $A \otimes B \multimap A < B$  et  $A < B \multimap A \varphi B$ .

1. On fera attention: ainsi décrite, une application linéaire n'est pas une application au sens ensembliste. La terminologie se justifie ainsi: les objets intéressants d'un espace cohérent  $A$  sont ses cliques, car si  $A$  interprète une formule  $\tilde{A}$ , une démonstration de  $\tilde{A}$  est interprétée par une clique de  $A$  — et une application linéaire de  $A$  dans  $B$  est bel et bien une application au sens ensembliste de l'ensemble des cliques de  $A$  dans l'ensemble des cliques de  $B$ .

DÉFINITION 3 On note  $2$  l'ensemble  $\{0, 1\}$ ,  $2^*$  l'ensemble des mots sur  $2$ , — y compris le mot vide  $\epsilon$  —, et  $2^\omega$  l'ensemble des mots infinis sur  $2$ , muni de l'ordre lexicographique habituel et la topologie produit. Les lettres  $w, v, u$  désignent des mots infinis de  $2^\omega$ , tandis que la lettre  $m$  et ses dérivées désignent des mots finis de  $2^*$ .

PROPOSITION 2 L'ensemble  $\text{gt}_M$  des fonctions continues de  $2^\omega$  dans un ensemble  $M$  muni de la topologie discrète, est en correspondance bijective avec l'ensemble des arbres binaires dont les feuilles sont étiquetées par des éléments de  $M$  de sorte que deux feuilles sœurs n'aient jamais la même étiquette.

Ainsi un élément de  $\text{gt}_M$  peut-il être décrit par un ensemble fini  $\{(m_1, a_1), \dots, (m_k, a_k)\} \in \mathcal{P}_{fin}(2^* \times M)$  satisfaisant:

- (1)  $\forall w \in 2^\omega \exists ! i \exists w' \in 2^\omega w = m_i w'$
- (2)  $\forall i, j [\exists m \in 2^* m_i = m0 \text{ et } m_j = m1] \Rightarrow a_i \neq a_j$

La fonction continue correspondante se calcule ainsi:  
pour un  $w \in 2^\omega$  il existe, d'après (1) un unique  $i$  tel qu'il existe un  $w'$  avec  $w = m_i w'$ , et on pose  $f(w) = a_i$ .

### C. La modalité et ses propriétés

DÉFINITION 4 Soit  $A$  un espace cohérent. On définit  $\mathfrak{A} A$  par:

trame: l'ensemble  $\text{gt}_{|A|}$  des fonctions continues de  $2^\omega$  dans  $|A|$  muni de la topologie discrète

cohérence: deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\text{gt}_{|A|} = |\mathfrak{A} A|$  sont dites strictement cohérentes lorsque

$$\exists w \in 2^\omega f(w) \cap g(w)[A] \text{ et } \forall w' > w f(w') = g(w')$$

PROPOSITION 3 La modalité précédemment définie jouit des propriétés suivantes:

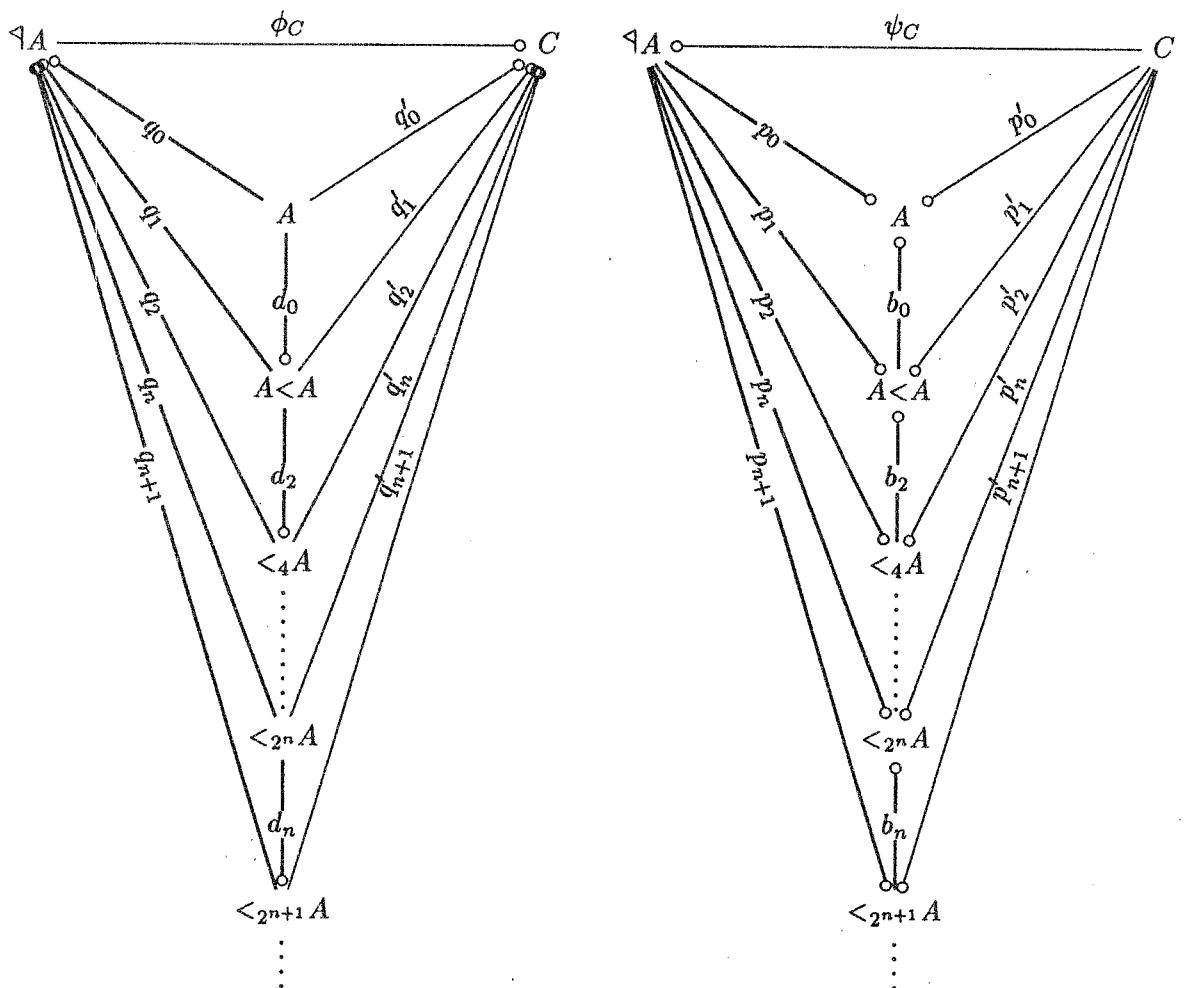
- (1) Si  $|A|$  est dénombrable, il en est de même de  $|\mathfrak{A} A|$ .
- (2) La modalité  $\mathfrak{A}$  est autoduale, c.-à-d.  $(\mathfrak{A} A)^\perp \equiv \mathfrak{A}(A^\perp)$ .
- (3) La modalité  $\mathfrak{A}$  est un endofoncteur —  $\mathfrak{A} \ell = \{(f, g) / \forall w \in 2^\omega (f(w), g(w)) \in \ell\} \subset |\mathfrak{A} A| \times |\mathfrak{A} B|$
- (4) L'ensemble  $\{(f_0, f_1), f / f(0w) = f_0(w) \text{ et } f(1w) = f_1(w)\}$  est un isomorphisme linéaire entre  $\mathfrak{A} A$  et  $\mathfrak{A} A$ .
- (5) L'ensemble  $\{(a, \underline{a}) / \underline{a}(w) = a\}$  est un plongement linéaire de  $A$  dans  $\mathfrak{A} A$  et de  $\mathfrak{A} A$  dans  $A$ . De ce fait,  $A$  est une rétraction linéaire de  $\mathfrak{A} A$ .

La proposition précédente est établie directement, en raisonnant sur  $2^\omega$  et les arbres, dans [Ret94b]. Néanmoins elle se déduit aisément de la proposition plus « catégorique » que voici:

**PROPOSITION 4** Notons  $\langle_{2^n} A$  l'espace cohérent  $A < A \dots A < A$  ( $2^n$  fois) — rappelons que  $<$  est associatif —, et notons  ${}_2 k$  l'écriture de l'entier  $k$  en base 2. Définissons, pour  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} d_n &= \{((x_0, \dots, x_{2^n-1}), (x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_{2^n-1}, x_{2^n-1}))\} \subset |\langle_{2^n} A| \times |\langle_{2^{n+1}} A| \\ b_n &= \{(\bar{y}, \bar{x}) / (\bar{x}, \bar{y}) \in d_n\} \subset |\langle_{2^{n+1}} A| \times |\langle_{2^n} A| \\ q_n &= \{((x_0, \dots, x_{2^n-1}), f) / \forall k \in [0, 2^n - 1] \forall w \in 2^\omega \quad f(({}_2 k)w) = x_k\} \subset |\langle_{2^n} A| \times |\mathcal{A}| \\ p_n &= \{(f, \bar{x}) / (\bar{x}, f) \in q_n\} \subset |\mathcal{A}| \times |\langle_{2^n} A| \end{aligned}$$

Alors ces relations sont des isomorphismes linéaires partiels, les  $d_n$  et  $q_n$  sont des plongements linéaires, et  $\mathcal{A}$  est la limite inductive du diagramme des  $d_n$ , les « injections » étant les  $q_n$ , et la limite projective du diagramme des  $b_n$ , les « projections » étant les  $p_n$ .



*Démonstration:* Les deux parties de la proposition étant similaires, on se contentera de montrer que  $\mathcal{A}$  est la limite inductive des  $d_n$ . La commutation des triangles  $q_n = q_{n+1} \circ d_n$  est immédiate.

Soit maintenant un cône de même base et de sommet  $C$ , le morphisme de  $\langle_{2^n} A$  dans  $C$  étant appelé  $q'_n$ . Soit  $\phi_C$  l'ensemble suivant:

$$\phi_C = \{(q_n(x_0, \dots, x_{2^n-1}), c) / ((x_0, \dots, x_{2^n-1}), c) \in q'_n\} \subset |\mathbf{A}| \times |C|$$

Il est clair d'après sa définition que  $\phi_C$  factorise les  $q'_n$ . Montrons rapidement qu'elle est unique à le faire. Soit  $\phi'_C$  une autre factorisation des  $q'_n$ . Soit  $(f, c) \in \phi'_C$ ; alors il existe un  $n$  et un  $\bar{x} \in |\langle_{2^n} A|$  tel que  $q_n(\bar{x}) = f$ . Donc  $(\bar{x}, c)$  est dans  $q'_n$ , car il est dans  $\phi'_C \circ q_n$ , auquel cas  $(f, c)$  est aussi dans  $\phi_C$ . Soit maintenant  $(f, c) \in \phi_C$ ; alors il existe un  $n$  et un  $\bar{x}$  dans  $\langle_{2^n} A$  tel que  $q_n(x_0, \dots, x_{2^n-1}) = f$  et  $((x_0, \dots, x_{2^n-1}), c)$  est dans  $q'_n$ . Comme  $\phi'_C \circ q_n = q'_n$ , et que  $f$  est l'unique image de  $\bar{x}$  par  $q_n$ ,  $\phi'_C$  doit contenir  $(f, c)$ .

Il reste maintenant à montrer que  $\phi_C$  définit une application linéaire de  $\mathbf{A}$  dans  $C$ .

$$\text{Si } (f, c), (f', c') \in \phi, \text{ alors il existe un entier } k \text{ et un entier } l \text{ tels que: } \begin{cases} ((x_0, \dots, x_{2^k-1}), c) \in q'_k \\ ((x'_0, \dots, x'_{2^l-1}), c') \in q'_l \\ q_k(x_0, \dots, x_{2^k-1}) = f \\ q_l(x'_0, \dots, x'_{2^l-1}) = f' \end{cases}$$

Supposons que  $l \leq k$  et considérons  $d_{k-1}(\dots(d_{l+1}(d_l(x_0, \dots, x_{2^k-1})))\dots) \in |\langle_{2^l} A|$ . Comme les  $d_n$  sont des plongements linéaires et que  $q'_l = q'_k \circ d_{k-1} \circ \dots \circ d_l$  on a  $(d_{k-1}(\dots(d_l(x_0, \dots, x_{2^k-1})))\dots), c \in q'_l$  et comme  $q_l = q_k \circ d_{k-1} \circ \dots \circ d_l$ , on a aussi  $q_k(d_{k-1}(\dots(d_l(x_0, \dots, x_{2^l-1})))\dots)) = f'$ .

$$\text{On peut donc dire qu'il existe un entier } r = \max\{l, k\} \text{ tel que } \begin{cases} ((x_0, \dots, x_{2^r-1}), c) \in q'_r \\ ((x'_0, \dots, x'_{2^r-1}), c') \in q'_r \\ q_r(x_0, \dots, x_{2^r-1}) = f \\ q_r(x'_0, \dots, x'_{2^r-1}) = f' \end{cases}$$

Supposons maintenant que  $f \cap f'[\mathbf{A}]$ . Comme  $q_r$  est un plongement linéaire, on a  $(x_0, \dots, x_{2^r-1}) \cap (x'_0, \dots, x'_{2^r-1})[\langle_{2^r} A]$  et donc  $c \cap c'[C]$  — puisque  $q'_r$  est linéaire. Si  $f = f'$  alors  $(x_0, \dots, x_{2^r-1}) = (x'_0, \dots, x'_{2^r-1})[\langle_{2^r} A]$  et donc  $c \cap c'[C]$  — puisque  $q'_r$  est linéaire.

On démontre de même que  $\mathbf{A}$  est la limite projective du diagramme des  $b_n$ . Cela tient aux faits évidents suivants: les applications linéaires  $d_n$  et  $q_n$  sont des isomorphismes linéaires partiels, les  $b_n$  et les  $p_n$  sont leur transposées, et la transposition est bien évidemment un foncteur (contravariant) dans la catégorie des ensembles munie des relations comme morphismes. Ainsi la factorisation  $\psi_C$  d'un autre cône utilisant des morphismes  $p'_n$  admet-elle pour définition la «transposée» de celle de  $\phi_C$ :

$$\psi_C = \{(c, f) / \exists n \exists \bar{x} \in \langle_{2^n} A \ f = q_n(\bar{x}) \text{ et } (c, \bar{x}) \in p'_n\}$$

◊

Pour finir, je répondrai à une question qu'on m'a souvent posée:

**REMARQUE 1**  $\mathbf{A}$  est ni une monade, ni une comonade — puisque  $\mathbf{A}$  est autoduale ces deux propriétés sont équivalentes.

*Démonstration:* Il n'y a pas de transformation naturelle  $r : \mathbf{A} \rightarrow \text{Id}$ .

Supposons qu'il y ait une telle transformation naturelle  $r$ , et soit  $1 \oplus 1$  l'espace cohérent constitué de deux sommets incohérents  $a$  et  $b$ , et  $1$  l'espace cohérent à un sommet. Soient  $\ell_a, \ell_b, \ell_{ab} : 1 \oplus 1 \rightarrow 1$  les trois applications linéaires définies par

$$\ell_a = \{(a, *)\} \quad \ell_b = \{(b, *)\} \quad \ell_{ab} = \{(a, *), (b, *)\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(1 \oplus 1) & \xrightarrow{\mathbf{r}_{1 \oplus 1}} & 1 \oplus 1 \\ \downarrow \ell_? & & \downarrow \ell_? \\ \mathbf{A}1 \equiv 1 & \xrightarrow{\mathbf{r}_1} & 1 \end{array}$$

Etudions la commutativité des diagrammes ci-contre. Pour  $\ell_? = \ell_{ab}$ , on voit que  $\mathbf{r}_1$ , qui est soit  $\emptyset$  soit  $\text{Id}_1$ , est  $\text{Id}_1$ . Considérons les trois éléments  $\{(\varepsilon, a)\}, \{(0, a), (1, b)\}, \{(\varepsilon, b)\}$ . Pour  $\ell_? = \ell_a$  on voit que de ces trois éléments, seul le premier s'envoie sur  $a$  par  $\mathbf{r}_{1 \oplus 1}$ , et en utilisant ce même diagramme pour  $\ell_? = \ell_b$  on voit que de ces trois éléments seul le troisième s'envoie sur  $b$  par  $\mathbf{r}_{1 \oplus 1}$ . Par conséquent  $\mathbf{r}_{1 \oplus 1}$ , n'envoie le second sur rien, ce qui empêche le diagramme obtenu pour  $\ell_? = \ell_{ab}$  de commuter.

On peut néanmoins se demander s'il n'existe pas une transformation naturelle  $s : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^A$  satisfaisant le principe de co-associativité. Je ferai une réponse informelle: l'application linéaire  $s_A = \{(f, (\varepsilon, f))\}$  ne satisfait pas la condition de naturalité, et la seule transformation naturelle qui satisfasse la co-associativité à laquelle je puisse penser, est donc celle définie par:

$$s_A = \{ (f, \{(m_i, f_i)\}) / f(m_i w) = f_i(w) \} \subset |\mathbf{A}| \times |\mathbf{A}^A|$$

Si la relation  $s_A$  satisfait la condition de naturalité et la co-associativité, elle ne définit cependant pas une application linéaire. Considérons les trois éléments suivants de  $|\mathbf{A}(1 \oplus 1)|$ :  $f_{ba} = \{(0, b); (1, a)\}$ ,  $f_a = \{(\varepsilon, a)\}$  et  $f_{a(ba)} = \{(0, a); (10, b); (11, a)\}$ . Soient maintenant les deux éléments suivants de  $\mathbf{A}^A(1 \oplus 1)$ :  $F_{f_{a(ba)}} = \{(\varepsilon, f_{a(ba)})\}$  et  $F_{f_a f_{ba}} = \{(0, f_a); (1, f_{ba})\}$ . On a alors  $F_{f_{a(ba)}} \circ F_{f_a f_{ba}}[\mathbf{A}(1 \oplus 1)]$ , tandis que  $(f_{a(ba)}, F_{f_a f_{ba}})$  et  $(f_{a(ba)}, F_{f_a f_{ba}})$  sont tous deux dans  $s_{1 \oplus 1}$ . ◇

**Remerciements:** Je remercie Pierre Ageron, Thomas Ehrhard, Philippe de Groote, Jean-Yves Girard, Catherine Gourion, Achim Jung, Myriam Quatrini, et Thomas Streicher de leurs commentaires. Les diagrammes sont dessinés avec `diagrams`, outil L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X de Paul Taylor.

## Références

- [Gen34] Gehard Gentzen. Untersuchungen über das logische Schließen II. *Mathematische Zeitschrift*, 39:405–431, 1934. Traduction française de J. Ladrière et R. Feys: Recherches sur la déduction logique, Presses Universitaires de France, Paris, 1955.
- [Gir87] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1):1–102, 1987.
- [Gir91] Jean-Yves Girard. A new constructive logic: classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1(3):255–296, November 1991.
- [Qua95] Myriam Quatrini. *Sémantique cohérente des exponentielles: de la logique linéaire à la logique classique*. Thèse de Doctorat, spécialité Mathématiques, Université Aix-Marseille 2, janvier 1995.
- [Ret93] Christian Retoré. *Réseaux et Séquents Ordonnés*. Thèse de Doctorat, spécialité Mathématiques, Université Paris 7, février 1993.
- [Ret94a] Christian Retoré. On the relation between coherence semantics and multiplicative proof nets. Rapport de Recherche 2430, INRIA, décembre 1994.
- [Ret94b] Christian Retoré. A self-dual modality for "before" in the category of coherence spaces and in the category of hypercoherences. Rapport de Recherche 2432, INRIA, décembre 1994.
- [Tro92] Anne Sjerp Troelstra. *Lectures on Linear Logic*, volume 29 of *Center for the Study of Language and Information (CSLI) Lecture Notes*. University of Chicago Press, 1992.

# Le groupe de structure d'une identité algébrique

PATRICK DEHORNOY  
GRAL, Mathématiques  
Université  
14032 Caen cedex

dehornoy@geocub.greco-prog.fr

Appliquer à un terme  $Q$  une identité algébrique, donnée comme un couple de termes abstraits  $(P, P')$ , par exemple le couple  $(X * (Y * Z), (X * Y) * Z)$  dans le cas de l'associativité, c'est remplacer dans  $Q$  un sous-terme qui est obtenu à partir de  $P$  par une substitution (un homomorphisme alphabétique)  $\sigma$  par le sous-terme  $P'^\sigma$ , ou effectuer la transformation inverse. Il est naturel de voir la transformation ci-dessus comme l'application au terme  $P$  d'un *opérateur*, fonction partielle de l'ensemble des termes dans lui-même<sup>1</sup>. Cet opérateur dépend évidemment de l'identité considérée, mais aussi de l'*endroit* où l'identité a été appliquée, c'est-à-dire de l'adresse du sous-terme qu'on a modifié.

Pour rendre les choses précises, on se restreindra désormais au cas d'une signature réduite à une unique opération binaire (comme dans le cas de l'associativité). De la sorte, un terme apparaît naturellement comme un arbre binaire, une variable correspondant à un arbre réduit à un point, et le produit de deux termes  $Q$  et  $R$  correspondant à l'arbre dont le sous-arbre gauche est l'arbre associé à  $Q$  et le sous-arbre droit est l'arbre associé à  $R$ . Pour spécifier l'adresse d'un sous-arbre (c'est-à-dire d'un sous-terme) dans un tel arbre, on peut par exemple utiliser une suite finie de 0 et de 1 qui indique le chemin à suivre pour « descendre » de la racine de l'arbre au point considéré, 0 signifiant « prendre la branche de gauche », et 1 « prendre la branche de droite ». Pour une identité algébrique  $(\mathcal{I})$  (un couple de termes écrits avec l'opérateur  $*$ ), et  $u$  une adresse (c'est-à-dire une suite finie de 0 et de 1), on notera  $\Omega_{\mathcal{I}}(u)$  l'opérateur consistant à appliquer  $(\mathcal{I})$  à l'adresse  $u$ . Ainsi, par exemple, on vérifiera que, si  $(\mathcal{A})$  est l'associativité,

---

<sup>1</sup> Le caractère fonctionnel n'est garanti que si l'identité considérée satisfait quelques propriétés de régularité minimales, par exemple que les mêmes variables interviennent dans les deux membres. On peut facilement de passer de cette hypothèse en adoptant le point de vue de l'*unification* de termes.

et si  $Q$  est le terme

$$(X * Y) * (Z * ((X * Y) * X)),$$

alors l'image de  $Q$  par  $\Omega_{\mathcal{A}}(1)$  est

$$(X * Y) * ((Z * (X * Y)) * X),$$

tandis que l'image de  $Q$  par  $\Omega_{\mathcal{A}}(\Lambda)$  (en notant  $\Lambda$  la suite vide, c'est-à-dire l'adresse de la racine de l'arbre, correspondant donc à appliquer l'identité au terme tout entier) est

$$((X * Y) * Z) * ((X * Y) * X),$$

et celle de  $Q$  par  $\Omega_{\mathcal{A}}(11)^{-1}$  (la transformation réciproque de  $\Omega_{\mathcal{A}}(11)$ ) est

$$(X * Y) * (Z * (X * (Y * X))).$$

Par contre l'image de  $Q$  par  $\Omega_{\mathcal{A}}(0)$  ou  $\Omega_{\mathcal{A}}(11)$  n'est pas définie.

On notera  $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}^+$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$  les monoïdes engendrés respectivement par tous les opérateurs  $\Omega_{\mathcal{I}}(u)$ , et par tous les opérateurs  $\Omega_{\mathcal{I}}(u)$  et  $\Omega_{\mathcal{I}}(u)^{-1}$  pour  $u$  décrivant l'ensemble des toutes les adresses, le produit étant l'inverse de la composition. De la sorte il est clair que deux termes  $Q, Q'$  sont équivalents *modulo* l'identité  $(\mathcal{I})$  si et seulement si il existe un élément  $\Phi$  de  $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$  qui envoie  $Q$  sur  $Q'$ . *Les éléments de  $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$  sont des témoins effectifs pour l'application de l'identité  $(\mathcal{I})$ , qui prennent en compte les chemins par où se fait le passage.*

Il semble que le monoïde  $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$  « capture » une fraction importante de la « géométrie » de l'identité  $(\mathcal{I})$ <sup>2</sup>. Dans [2] il a été utilisé de façon essentielle pour résoudre le *problème de mot* pour l'identité d'autodistributivité  $x(yz) = (xy)(xz)$ . Ce problème avait suscité un intérêt très particulier, car sa décidabilité avait d'abord été établie par R. Laver au moyen d'un axiome de grand cardinal dont l'apparition semblait paradoxale pour un tel problème de nature finitiste [7]. La preuve de [2] a montré qu'aucune hypothèse exotique n'était nécessaire à la résolution du problème, mais le rôle joué par la théorie des ensembles restera déterminant car il est peu probable que la motivation nécessaire au développement de la preuve de [2], techniquement délicate, aurait été trouvée sans le moteur constitué

---

<sup>2</sup> Il est aisément d'étendre la construction au cas de plusieurs identités simultanées. On peut alors en particulier montrer que le monoïde obtenu ne dépend que de la variété équationnelle engendrée par ces identités, et non du choix de celles-ci : il s'agit donc un objet assez intrinsèque (*cf.* [1]).

par la preuve de Laver<sup>3</sup>. Il se trouve que le monoïde de structure  $\mathcal{M}_I$  associé à l'identité d'autodistributivité mentionnée ci-dessus est très proche algébriquement du groupe  $B_\infty$  des tresses d'Artin, ce qui a permis d'établir un lien fructueux entre l'étude de l'identité en question, celle du monoïde associé, et finalement celle des tresses, avec des applications nouvelles telles que la construction d'un ordre total (*cf.* [5] pour une présentation générale).

Dans le cas de l'associativité, la situation est bien plus simple, mais fait néanmoins apparaître des questions non triviales [4]. Parmi celles-ci, la détermination des *présentations* de  $\mathcal{M}_A$  et  $\mathcal{M}_A^+$  est intéressante. Il s'agit donc de déterminer quelles sont les relations qui relient entre elles les transformations  $\Omega_A(u)$ .

Il est facile d'obtenir une liste de relations en utilisant la nature géométrique des transformations considérées. Par exemple, si on considère deux adresses incompatibles vis à vis de la relation de préfixe, c'est-à-dire deux adresses de formes respectives  $w0u$  et  $w1v$ , il est clair que les opérateurs associés commutent, puisqu'ils s'appliquent à des sous-arbres disjoints. Ainsi on a donc les relations, essentiellement triviales (et valables pour *toute* identité)

$$\Omega_A(w0u) \Omega_A(w1v) = \Omega_A(w1v) \Omega_A(w0u).$$

De la même façon, on remarque que, puisque le sous-terme d'adresse 0 possède, lorsque  $\Omega_A(\Lambda)$  est appliqué, une unique copie d'adresse 00, alors il revient au même d'effectuer une transformation quelconque d'adresse 0u puis  $\Omega_A(\Lambda)$ , ou d'abord  $\Omega_A(\Lambda)$  puis la transformation d'adresse 00u. Ceci donne lieu d'une façon générale aux relations

$$\Omega_A(w0u) \Omega_A(w) = \Omega_A(w) \Omega_A(w0u).$$

Un argument semblable donnera

$$\Omega_A(w10u) \Omega_A(w) = \Omega_A(w) \Omega_A(w01u)$$

et

$$\Omega_A(w11u) \Omega_A(w) = \Omega_A(w) \Omega_A(w1u).$$

On constate que toutes les relations écrites jusqu'alors ont une forme syntaxique particulière, à savoir qu'elles sont toutes du type

$$\Omega_A(u) \dots = \Omega_A(v) \dots,$$

---

<sup>3</sup> Il faut du reste mentionner qu'il existe d'autres résultats (de nature finitiste) concernant l'algèbre de l'identité d'autodistributivité dont la seule preuve connue actuellement requiert un axiome de grand cardinal, *cf.* [8].

c'est-à-dire qu'elles indiquent comment, pour une paire d'adresses  $\{u, v\}$ , compléter à droite les opérateurs d'adresses  $u$  et  $v$  pour obtenir une égalité<sup>4</sup>. Il se trouve que presque toutes les paires d'adresses se trouvent traitées de la sorte, à l'exception des paires de type  $\{w, w1\}$ . Il est naturel de chercher si ces dernières donnent également lieu à une relation « de complément à droite ». La réponse est positive, en vertu de la relation

$$\Omega_{\mathcal{A}}(w1) \Omega_{\mathcal{A}}(w) \Omega_{\mathcal{A}}(w0) = \Omega_{\mathcal{A}}(w) \Omega_{\mathcal{A}}(w),$$

dans laquelle on reconnaît la relation du pentagone de McLane-Stasheff [9].

La question est alors de savoir si la liste des relations précédentes est exhaustive, c'est-à-dire constitue une présentation du monoïde  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^+$ , et, de même, si cette liste complétée des relations « triviales » affirmant que  $\Omega_{\mathcal{A}}(w)^{-1}$  est (presque) un inverse de  $\Omega_{\mathcal{A}}(w)$  constitue une présentation de  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ . Cette dernière question est équivalente au *problème de cohérence* pour l'associativité, tel que posé classiquement en théorie des catégories. On sait que la réponse est positive. Par contre la question dans le cas du monoïde « positif »  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^+$  ne semble pas abordée en général, non plus par exemple que le cas où l'associativité est remplacée par une autre identité comme l'autodistributivité. Dans le cas de l'associativité, la réponse est bien celle qu'on peut espérer :

**Proposition 1.** ([4]) *Les relations ci-dessus constituent une présentation de  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^+$  et de  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  respectivement.*

Le principe de l'argument utilisé dans [4] (et [2] pour l'autodistributivité) est le suivant. Tout élément du monoïde  $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^+$  est, par construction, un produit d'une suite (finie) d'opérateurs  $\Omega_{\mathcal{A}}(u_1), \dots, \Omega_{\mathcal{A}}(u_n)$ . Si  $U$  est la suite des adresses  $(u_1, \dots, u_n)$ , notons simplement  $\Omega_{\mathcal{A}}(U)$  le produit précédent. Il s'agit de montrer que, si deux opérateurs  $\Omega_{\mathcal{A}}(U)$  et  $\Omega_{\mathcal{A}}(V)$  (correspondant à deux suites d'adresses  $U$  et  $V$ ) coïncident, ou même seulement envoient un terme  $P$  sur un même terme  $Q$ , alors les suites  $U$  et  $V$  sont équivalentes *modulo* la relation d'équivalence  $\equiv^+$  sur les suites d'adresses qui est engendrée exactement par les relations énumérées plus haut. Le problème est un problème de complétude au sens des logiciens, dans la mesure où on veut tirer une conséquence purement syntaxique ( $U \equiv^+ V$ ) d'une hypothèse « sémantique » faisant intervenir l'opération de  $U$  et  $V$  sur les termes *via* les transformations  $\Omega_{\mathcal{A}}$ . L'idée est d'introduire, pour chaque terme  $P$ <sup>5</sup>, une suite d'adresses  $\chi(P)$  qui en

<sup>4</sup> Ceci revient à affirmer une *confluence locale* des transformations vues comme règles de réécriture sur les termes.

<sup>5</sup> Il est ici suffisant de considérer les termes en une seule variable  $X$ .

constitue une sorte de contrepartie « syntaxique ». Dans le cas présent de l'associativité, on peut prendre pour  $\chi(P)$  une suite d'adresses telle que l'opérateur  $\Omega_A(\chi(P))$  construise le terme  $P$  en un sens convenable. La solution n'est pas unique. On peut par exemple choisir pour  $\chi(P)$  une suite telle que  $\Omega_A(\chi(P))$  envoie tout terme  $X^N$  (c'est-à-dire  $X * (X * (X\dots))$ ,  $N$  fois  $X$ ) sur le terme  $P * X^{N-p}$  correspondant, en notant  $p$  le nombre d'occurrences de la variable  $X$  dans  $P$ . L'existence d'une telle suite  $\chi(P)$  se montre inductivement sur la complexité du terme  $P$  : pour  $P = X$ , la suite vide convient; ensuite, supposant  $\chi(Q)$  et  $\chi(R)$  déterminés, la formule

$$\chi(Q * R) = \chi(Q) . 1\chi(R) . A,$$

où  $1U$  représente la suite obtenue à partir de la suite  $U$  en apposant un  $1$  au début de chacune des adresses qui y figurent, permet de monter l'induction.

L'argument technique essentiel est alors le suivant. Supposons que l'opérateur  $\Omega_A(U)$  envoie le terme  $P$  sur le terme  $Q$  : alors l'opérateur  $\Omega_A(0U)$  envoie tout terme  $P * X^{N-p}$  sur le terme  $Q * X^{N-p}$  correspondant, et, par conséquent, les deux opérateurs

$$\Omega_A(\chi(P) . 0U) \quad \text{et} \quad \Omega_A(\chi(Q))$$

envoient  $X^N$  sur  $Q * X^{N-p}$ . Si donc il est vrai que les relations écrites plus haut constituent la présentation cherchée, on *doit* avoir l'équivalence

$$\chi(P) . 0U \equiv^+ \chi(Q).$$

Or cette équivalence, si elle est vraie, doit pouvoir se vérifier « à la main ». En effet, il suffit de la montrer lorsque  $U$  est de longueur 1, et, essentiellement, dans le cas particulier où  $U$  est la suite ( $A$ ), ce qui revient à montrer la formule

$$\chi(P_1 * (P_2 * P_3)) . 0 \equiv^+ \chi((P_1 * P_2) * P_3),$$

laquelle est effectivement vraie.

Supposons maintenant que les deux opérateurs  $\Omega_A(U)$  et  $\Omega_A(V)$  envoient le terme  $P$  sur un même terme  $Q$ . On déduit directement de ce qui précède les équivalences

$$\chi(P) . 0U \equiv^+ \chi(Q) \equiv^+ \chi(P) . 0V,$$

et, en particulier, on a établi l'existence d'une suite  $W$  vérifiant

$$W . 0U \equiv^+ W . 0V.$$

Ceci est apparemment plus faible que la conclusion désirée

$$U \equiv^+ V,$$

mais c'est alors une question de pure algèbre sur le monoïde  $\mathcal{M}_A^+$  de savoir si la première équivalence implique la seconde. C'est effectivement le cas, comme le montre une preuve qui repose sur la forme particulière des relations mises en jeu, à savoir le fait qu'il s'agisse de relations liées à un « complément à droite ». Cette dernière condition fournit notamment un cadre uniforme pour traiter les problèmes de divisibilité (ici problème d'élimination du facteur  $W$  initial), cf. [3].

**Remarque.** Les opérateurs  $\Omega_{\mathcal{I}}(w)^{-1}$  ne sont *pas* des inverses « exacts » pour les opérateurs associés  $\Omega_{\mathcal{I}}(w)$ , car ils s'agit d'applications non partout définies. Dans les bons cas, comme celui de l'associativité (ou de la commutativité), on peut, par un passage au quotient convenable, se ramener au cas d'un groupe, qu'il est alors naturel d'appeler le *groupe de l'identité considérée* (comme dans le titre de cet exposé). Dans d'autres cas plus compliqués, comme celui de l'autodistributivité, le passage au quotient est techniquement malcommode, mais il peut être utile d'introduire de façon volontariste le groupe qui est présenté par les relations géométriques considérées plus haut, et de remplacer l'étude du monoïde  $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$  par celle, plus commode, de ce dernier groupe. Cette approche a en particulier permis la construction de réalisations effectives pour les algèbres autodistributives libres [6].

## Références

- [1] P. DEHORNOY, *Structural monoids associated to equational varieties*, Proc. Amer. Math. Soc., **117-2** (1993) 293–304.
- [2] —, *Braid Groups and Left Distributive Operations*, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.
- [3] —, *Groups with a Complemented Presentation*, preprint (1993).
- [4] —, *The Structure Group for the Associativity Identity*, J Pure Appl. Algebra, à paraître.
- [5] —, *From large Cardinals to Braids via Left Distributive Algebra*, J. Knot Theory and Ramifications, à paraître.
- [6] —, *Construction of Left Distributive Operations*, preprint (1994).
- [7] R. LAVER, *The left distributive law and the freeness of an algebra of elementary embeddings*, Advances in Math., **91-2** (1992) 209–231.
- [8] —, *On the algebra of elementary embeddings of a rank into itself*, Advances in Math., à paraître.
- [9] S. MAC LANE, *Natural associativity and commutativity*, Rice Univ. Studies, **49** (1963) 28–46.

# Théorie des esquisses

et

## Théorie des groupes

Pierre Ageron

GRAL, Département de Mathématiques et Mécanique  
Université de Caen, 14032 CAEN Cedex (France)

---

*"The categorical approach to universal algebra (...) despite its generality (...) allows consideration of specific problems analogous to those arising in group theory, ring theory and other parts of classical algebra." (F.W. Lawvere, [3]).*

Les succès remportés par la méthode des esquisses d'Ehresmann (ou par celle des théories algébriques de Lawvere, qui en constitue un cas très particulier) peuvent s'expliquer par la double apparence de ces êtres mathématiques : ainsi, une esquisse  $\mathbb{E}$  est tout à la fois un *objet syntaxique* (une axiomatique pour un "type" de structures) et un *objet algébrique* (dans la catégorie des esquisses). De même, un modèle de  $\mathbb{E}$  est tout à la fois un *objet sémantique* (interprétation ensembliste de  $\mathbb{E}$ ) et un *objet géométrique* (donnée d'ensembles sur lesquels  $\mathbb{E}$  opère).

Ainsi, il est souvent utile de penser à une esquisse comme à un groupe généralisé. D'ailleurs un groupe  $G$  s'identifie à une esquisse très particulière, dont les modèles sont exactement les  $G$ -ensembles.

En vertu d'une sorte de principe de complétude logique effectif, *tout* phénomène mathématique (propriété ou construction portant sur des catégories de modèles) devrait pouvoir s'expliquer par une propriété ou construction portant sur les esquisses correspondantes. Un programme aussi ambitieux, qui est à la théorie des esquisses ce que le programme d'Erlangen fut à la théorie des groupes, demande que la classification et l'algèbre des esquisses soient davantage développées.

La méthode préconisée par Lawvere à cette fin (voir citation en exergue) reste d'actualité : elle consiste à travailler par analogie (en fait généralisation) avec les structures algébriques classiques, comme les groupes. Le travail de M. Mathieu sur les extensions de théories, présenté dans ce volume, est une excellente illustration de ce point de vue. Nous nous proposons ici d'en indiquer une autre.

On sait que pour les groupes, on dispose d'une notion de complétude algébrique, qui est la suivante :

**Définition.-** Un groupe  $G$  est *complet* si et seulement si le morphisme de groupes  $\partial : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ,  $a \mapsto (x \mapsto axa^{-1})$  est sectionnable.

(Cette propriété signifie donc que tout automorphisme de  $G$  est intérieur, et ceci de façon homomorphe. Classiquement, on exige même que  $\partial$  soit un isomorphisme ; cette propriété plus forte ne nous intéressera pas ici.)

Est-il possible d'adapter cette définition au cas d'une esquisse ? Telle quelle, elle paraît vraiment spécifique à la structure de groupe : même la généralisation à un monoïde n'est pas claire. Cependant, il est possible de formuler autrement la complétude d'un groupe, grâce à la notion d'*holomorphe*. Rappelons que si  $G$  est un groupe, on appelle *holomorphe* de  $G$  et on note  $\text{Hol}(G)$  le produit semi-direct  $G \rtimes_{\text{id}} \text{Aut}(G)$ . Il est facile d'établir le résultat suivant :

**Proposition.-** Un groupe  $G$  est complet si et seulement si le morphisme de groupes  $h : G \rightarrow \text{Hol}(G)$ ,  $a \mapsto (a, \text{id}_G)$  est rétractable.

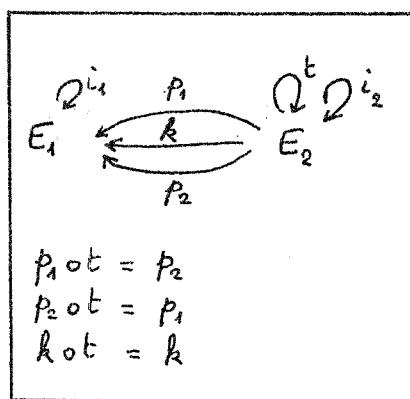
Il nous reste donc à définir une notion judicieuse d'*holomorphe* d'une esquisse.

Or cette construction existe depuis plus de vingt ans ! Il est vrai que son auteur, C. Lair, utilisait une toute autre terminologie (voir [2]). Comme dans le cas des groupes, Lair effectue le produit semi-direct de  $\mathbb{E}$  par un certain groupe  $\Gamma(\mathbb{E})$  (il s'agit en fait d'un produit croisé au sens d'Ehresmann). Mais plutôt que de prendre pour  $\Gamma(\mathbb{E})$  le groupe des automorphismes de  $\mathbb{E}$ , il considère, ce qui est beaucoup plus intéressant, un groupe plus vaste, celui des semi-automorphismes de  $\mathbb{E}$ . De quoi s'agit-il ? Par définition, un automorphisme de  $\mathbb{E}$  doit (entre autres conditions) préserver et refléter chaque cône  $\gamma$  (projectif ou inductif) que l'on a distingué dans  $\mathbb{E}$ . Mais un *semi-automorphisme* n'y est contraint qu'à un automorphisme de l'indexation de  $\gamma$  près. A titre d'exemple, considérons l'esquisse des magmas commutatifs représentée sur la figure 1; elle admet deux semi-automorphismes : l'identité bien sûr, et l'automorphisme  $A$  du graphe compositif sous-jacent qui échange  $p_1$  et  $p_2$ . Notons que tout semi-automorphisme de  $\mathbb{E}$  induit un automorphisme de la catégorie  $\text{Mod}(\mathbb{E})$ , que l'on peut appeler un *partenariat* sur  $\text{Mod}(\mathbb{E})$  (dans le cas où il est d'ordre 2, on dira plutôt une *dualité*).

**Définition.-** Soit  $\mathbb{E}$  une esquisse. L'*holomorphe* de  $\mathbb{E}$  est l'esquisse  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  ainsi construite :

- les objets de  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  sont ceux de  $\mathbb{E}$  ;
- une flèche de  $E$  vers  $E'$  dans  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  est un couple  $(e, A)$  où  $A$  est un semi-automorphisme de  $\mathbb{E}$  et  $e$  est une flèche de  $A(E)$  vers  $E'$  dans  $\mathbb{E}$  ;
- l'identité d'un objet  $E$  dans  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  est la flèche  $(\text{id}_E, \text{id}_{\mathbb{E}})$  ;
- deux flèches  $(e', A')$  et  $(e, A)$  sont composables dans  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  si et seulement si  $e'$  et  $A'(e)$  le sont dans  $\mathbb{E}$ , on pose alors  
 $(e', A') \circ (e, A) = (e' \circ A'(e), A' \circ A)$ ;
- les cônes projectifs et inductifs distingués dans  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  sont les images par le morphisme  $h : e \mapsto (e, \text{id}_{\mathbb{E}})$  de ceux qui sont distingués dans  $\mathbb{E}$ .

On peut dire qu'un modèle de  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  est un modèle de  $\mathbb{E}$  mis en partenariat avec lui-même, et ceci de toutes les façons syntaxiquement possibles. Par exemple, si  $\mathbb{E}$  est l'esquisse des magmas, un modèle de  $\text{Hol}(\mathbb{E})$  s'identifie à un magma muni d'un antiautomorphisme involutif. Autre exemple : considérons à nouveau l'esquisse des magmas commutatifs, représentée sur la figure 1. Son esquisse holomorphe est représentée sur la figure 2 ; on note ici un phénomène particulier, dont l'explication sémantique est claire : l'existence d'un morphisme d'esquisses  $f : \text{Hol}(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{E}$  tel que  $f \circ h = \text{id}_{\mathbb{E}}$  (il suffit en effet de poser  $f(i'_1) = i_1$ ,  $f(i'_2) = t$ ,  $f(p'_1) = p_2$ ,  $f(p'_2) = p_1$ ,  $f(k') = k$  et enfin  $f(t') = i_2$ ) . Dans une telle situation, je propose de dire que  $\mathbb{E}$  est holomorphiquement complète ; en fait, la "bonne" définition est la suivante :



[dans ces deux esquisses, le cône projectif  $(p_1, p_2)$  est distingué, et  $i_1, i_2$  sont des identités]

fig. 1

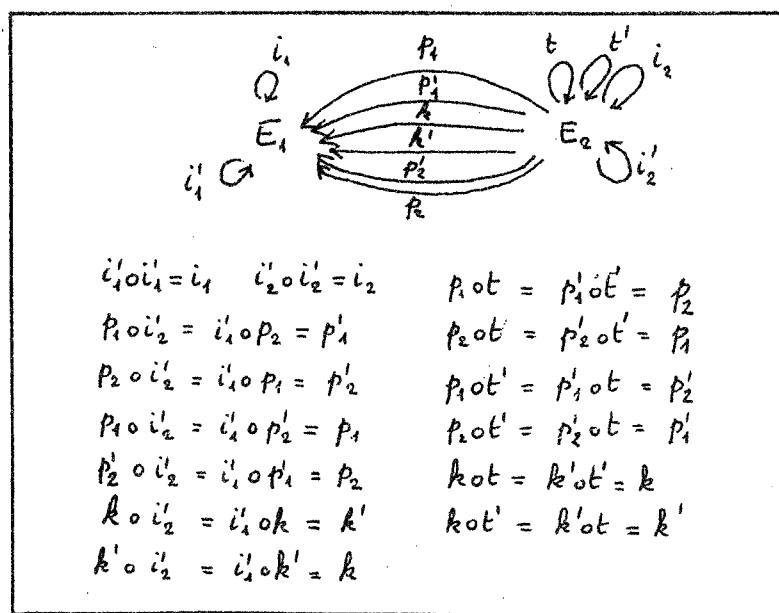


fig. 2

**Définition.-** Soient  $\mathbb{E}$  une esquisse et  $i : \mathbb{E} \rightarrow \text{Th}(\mathbb{E})$  le morphisme canonique de  $\mathbb{E}$  vers la théorie (ou type) qu'elle engendre librement. On dit que  $\mathbb{E}$  est *holomorphiquement complète* si et seulement si il existe un morphisme  $f : \text{Hol}(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{E}$  tel que  $f \circ h = i$  (où  $h$  désigne toujours le morphisme canonique de  $\mathbb{E}$  vers  $\text{Hol}(\mathbb{E})$ ) .

On peut alors appeler *hauteur* de  $\mathbb{E}$  le plus petit ordinal  $\alpha$  (s'il existe) tel que l'esquisse  $\text{Hol}^\alpha(\mathbb{E})$  (définie par une récurrence transfinie évidente) soit holomorphiquement complète. Le *groupe dialectique* de  $\mathbb{E}$ , noté  $\Delta(\mathbb{E})$ , est la réunion croissante des  $\Gamma(\text{Hol}^\alpha(\mathbb{E}))$  pour  $\alpha < \text{hauteur}(\mathbb{E})$ . Ce groupe apporte une information fine sur les symétries et dissymétries cachées de  $\mathbb{E}$ , alors que le groupe  $\Gamma(\mathbb{E})$  ne rend compte que des symétries apparentes. En particulier, les esquisses holomorphiquement complètes sont exactement celles dont le groupe dialectique est trivial.

Citons pour finir les résultats de quelques calculs effectués dans [1] :

- si  $\mathbb{E}$  est l'esquisse des magmas autodistributifs à gauche, ou bien celle des magmas commutatifs, ou bien celle des groupes, alors  $\Delta(\mathbb{E}) = \{*\}$  ;
- si  $\mathbb{E}$  est l'esquisse des magmas associatifs, alors  $\Delta(\mathbb{E}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ;
- si  $\mathbb{E}$  est l'esquisse des magmas, alors  $\Delta(\mathbb{E}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$  ;
- si  $\mathbb{E}$  est l'esquisse des catégories cartésiennes et cocartésiennes, alors  $\Delta(\mathbb{E}) \cong D_4$  (groupe diédral d'ordre 8).

### Bibliographie

- [1] **Pierre Ageron** - *La tour holomorphe d'une esquisse* , rapport de recherche GRAL 1994-10, Université de Caen.
- [2] **Christian Lair** - *Dualités pour les structures algébriques esquissées* , Cahiers de Topologie et de Géométrie Différentielle 15 (1974) 353-376.
- [3] **F.William Lawvere** - *Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories* , in : LNM 61 (Springer, 1968) 41-61.

# Esquisses et calcul

Dominique DUVAL \*      Jean-Claude REYNAUD †

Journées “Catégories, Algèbres, Esquisses et Néo-esquisses”  
CAEN, 27–30 septembre 1994.

## Introduction

Cet exposé présente rapidement, à un public connaissant déjà la théorie des catégories et des esquisses, une partie des articles [Duval et Reynaud]. Nous souhaitons mettre l’accent sur l’intérêt que présente cette théorie pour l’informatique, plutôt que sur les détails techniques (qui, pour notre public, sont “classiques”).

Tout ce travail a été effectué en collaboration avec Christian LAIR.

Notre but est de fournir des définitions, des énoncés et des preuves simples et rigoureux pour des notions informatiques courantes, comme les notions de *type*, *programme*, *valeur*, *évaluation*, et ceci dans un cadre plus général que celui qui est habituel en spécification algébrique.

Nous utilisons dans ce but la *théorie des esquisses*. Pour définir un type nous introduisons la notion d’*équiv-esquisse*. Pour traduire les notions de programme et de valeur nous construisons la *catégorie d’évaluation* et la *catégorie de substitution* d’une équiv-esquisse. Enfin, la description de l’évaluation nous amène à définir les équiv-esquisses *quasi-projectives*.

## 1 “Types” et équiv-esquisses

Un “type” informatique correspond souvent à un ensemble : on dispose en *Pascal* du type *integer*, qui correspond à l’ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, en *Axiom* de types plus sophistiqués comme *Matrix(Polynomial(Integer))*, qui correspond à l’ensemble des matrices dont les coefficients sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Un “type” informatique peut aussi, même si c’est plus rare, correspondre à toute une famille d’ensembles : en *Axiom*, on peut construire un “type” correspondant à  $\mathbb{Q}(\alpha)$  où  $\mathbb{Q}$  est l’ensemble des nombres rationnels et  $\alpha$  désigne *n’importe quel* nombre complexe (voir [Gomez Diaz] pour de telles constructions).

---

\*LACO, 123 Avenue Albert Thomas, 87060 LIMOGES cedex. Avec le support du PRC/GDR mathématiques-informatique et du Projet Esprit 6846 - POSSO.

†LGI-IMAG-CNRS, B.P.53, 38041 GRENOBLE cedex 9. Avec le support du PRC/GDR programmation.

La notion informatique de “type” peut être traduite par celle d’*esquisse*. A toute esquisse correspondent ses *modèles ensemblistes*, parmi lesquels on peut parfois distinguer un modèle particulier : le *modèle initial* de l’esquisse. En fait, d’une part nous nous limitons aux esquisses à cônes distingués discrets et finis, et d’autre part nous assouplissons la notion d’équation dans l’esquisse.

**Définitions.** Une *équiv-esquisse* (*à cônes distingués discrets et finis*)  $\|\mathbf{S}\|$  est formée :

- d’un *graphe*  $\mathbf{S}$  (objets et flèches) avec identités (une flèche  $ids$  pour tout objet  $S$ ).
- d’un ensemble  $\mathcal{P}$  de *cônes projectifs distingués* de base discrète et finie.
- d’un ensemble  $\mathcal{I}$  de *cônes inductifs distingués* de base discrète et finie.
- de *relations de composition* notées  $f \sim g$  où  $f$  et  $g$  sont deux chemins dans le graphe de même source et même but.

Le sommet d’un cône projectif distingué de base vide est noté  $\mathbb{I}$ .

En oubliant  $\mathcal{I}$ , on obtient une autre équiv-esquisse, appelée l’*équiv-esquisse projective sous-jacente* à  $\|\mathbf{S}\|$  et notée  $/\mathbf{S}/$ .

Un *modèle (ensembliste)* d’une équiv-esquisse  $\|\mathbf{S}\|$  est un foncteur du graphe  $\mathbf{S}$  dans la catégorie des ensembles, qui envoie chaque cône de  $\mathcal{P}$  sur un produit, chaque cône de  $\mathcal{I}$  sur une somme, et chaque relation de composition sur une égalité entre applications.

**Esquisses et équiv-esquisses.** En remplaçant toute relation de composition  $f \sim g$  par une équation  $f = g$ , on obtient une esquisse. Les modèles de l’équiv-esquisse sont les mêmes que ceux de l’esquisse qui lui est ainsi associée. Aux sections suivantes nous verrons l’intérêt de la notion d’équiv-esquisse par rapport à celle d’esquisse.

**Modèle initial.** Une esquisse n’a généralement pas de modèle initial. Cependant une esquisse projective (pour laquelle  $\mathcal{I}$  est vide) a toujours un modèle initial, et une esquisse dont tous les cônes inductifs distingués sont discrets et finis a toujours une *famille localement initiale de modèles*, voir [Diers, Guitart et Lair].

**Exemple.** On peut construire une équiv-esquisse  $\|\mathbf{K}\|$  dont les modèles sont les corps, de sorte que les modèles de l’équiv-esquisse  $/\mathbf{K}/$  soient les anneaux commutatifs unitaires (voir [Duval et Reynaud]). Le modèle initial de  $/\mathbf{K}/$  est l’anneau  $\mathbb{Z}$ , la famille localement initiale de modèles de  $\|\mathbf{K}\|$  est formée des corps premiers :  $\mathbb{Q}$  et les corps finis  $\mathbb{F}_p$  pour  $p$  premier.

## 2 “Programmes” et catégorie d’évaluation

Nous nous limitons ici à des programmes bien particuliers : les programmes “fonctionnels” avec pour unique “structure de contrôle” des “*si... alors... sinon...*”, éventuellement emboîtés.

Par exemple, sur un corps, on peut considérer le programme :

*si*  $2 = 0$  *alors* 0 *sinon*  $1/2$ .

Etant donnée une équiv-esquisse  $\|\mathbf{S}\|$ , la notion de “programme” (sur  $\|\mathbf{S}\|$ ) peut être traduite par celle d’*expression*.

De même que nous avons généralisé la notion d'esquisse en équiv-esquisse, nous généralisons la notion de catégorie en équiv-catégorie : il y a entre les flèches d'une équiv-catégorie une relation d'équivalence qui remplace l'habituelle égalité. Une équiv-catégorie est dite distributive si la flèche "canonique" :  $(S \times T_1) + (S \times T_2) \rightarrow S \times (T_1 + T_2)$  admet toujours un "équiv-inverse".

**Définitions.** La *catégorie d'évaluation* de  $\|S\|$ , notée  $\text{Eval}(\|S\|)$ , est l'équiv-catégorie à produits et sommes, distributive, engendrée par  $\|S\|$ . Une *expression* de  $\|S\|$  est une flèche de source  $\mathbb{I}$  dans  $\text{Eval}(\|S\|)$ .

**Remarque.** Pour une preuve de l'existence et de l'unicité de la catégorie d'évaluation voir [Ehresmann, Coppey et Lair].

**Théorème.** *Les expressions définissent (en quotientant par la relation d'équivalence) un modèle de  $/S/$ , qui n'est généralement pas un modèle de  $\|S\|$ .*

**Exemple.** Les expressions de  $\|K\|$  forment un anneau (on peut les ajouter ou les multiplier), mais pas un corps (on ne peut pas les diviser, car on ne peut pas savoir si une expression est nulle ou non).

### 3 "Valeurs" et catégorie de substitution

Qu'est-ce que la "valeur" d'un programme donné ? Par exemple, nous avons considéré le programme :

$$\text{si } 2 = 0 \text{ alors } 0 \text{ sinon } 1/2$$

Sur un corps de caractéristique 0, sa valeur est  $1/2$ . Sur un corps de caractéristique 2, c'est 0.

Etant donnée une équiv-esquisse  $\|S\|$ , et une expression  $\varepsilon$  de  $\|S\|$ , une "valeur" de  $\varepsilon$  est un *terme* de  $\|S\|$  qui est équivalent à  $\varepsilon$ .

**Définitions.** La *catégorie de substitution* de  $\|S\|$ , notée  $\text{Subst}(\|S\|)$ , est l'équiv-catégorie engendrée par  $/S/$ . Un *terme* de  $\|S\|$  est une flèche de source  $\mathbb{I}$  dans  $\text{Eval}(/S/)$ .

**Remarques.** Pour une preuve de l'existence et de l'unicité de la catégorie de substitution voir [Ehresmann, Coppey et Lair].

De plus, tout terme peut être considéré comme une expression particulière, ce qui permet de parler d'équivalence entre un terme et une expression.

**Théorème.** *Les termes définissent (en quotientant par la relation d'équivalence) un modèle de  $/S/$ , qui est initial, et qui n'est généralement pas un modèle de  $\|S\|$ .*

**Exemple.** Les termes de  $\|K\|$  définissent l'anneau  $\mathbb{Z}$ .

## 4 “Evaluation” et équiv-esquisses quasi-projectives

**Définition.** Etant donnée une équiv-esquisse  $\|S\|$  et une expression  $\varepsilon$  de  $\|S\|$ , évaluer  $\varepsilon$  c'est calculer un terme de  $\|S\|$  qui est équivalent à  $\varepsilon$ .

**Remarques.** Une expression peut donc avoir plusieurs valeurs. En fait, dans l'idée “habituelle” d'évaluation figurent deux phases : élimination des structures de contrôle, et simplification des termes. Notre définition s'attache à traduire la première phase, et à montrer que l'on peut effectuer la seconde phase dans une équiv-esquisse projective, c'est-à-dire dans un cadre purement “équationnel”.

Il n'est pas toujours possible d'évaluer une expression donnée : par exemple, le programme :

$$si \ 2 = 0 \ alors \ 0 \ sinon \ 1/2$$

n'a pas de valeur dans l'équiv-esquisse des corps (de caractéristique quelconque). C'est pourquoi :

- D'une part nous définissons les équiv-esquisses *quasi-projectives*, sur lesquelles toute expression a une valeur, et nous décrivons sur ces équiv-esquisses le processus d'*évaluation statique*.
- D'autre part, nous définissons la *valeur dynamique* d'une expression d'une équiv-esquisse non quasi-projective. Toute expression a une valeur dynamique, et le processus d'évaluation statique se généralise en un processus d'*évaluation dynamique*.

### 4.1 Evaluation statique

**Définition.** Une équiv-esquisse  $\|S\|$  est *quasi-projective* si ses termes en forment un modèle.

Cela revient à dire que le foncteur  $\text{Hom}(\mathbb{I}, -)$  commute aux sommes.

**Proposition.** Toute équiv-esquisse projective est quasi-projective, et toute équiv-esquisse quasi-projective admet un modèle initial.

Les deux réciproques sont fausses :

- La première réciproque est “très” fausse : Les corps de caractéristique fixée forment les modèles d'une équiv-esquisse quasi-projective, mais d'aucune équiv-esquisse projective.
- La seconde réciproque est “peu” fausse : Si une équiv-esquisse a un modèle initial, alors on peut l'enrichir pour obtenir une équiv-esquisse quasi-projective, sans modifier les modèles. Ce résultat est, en fait, une conséquence de l'évaluation dynamique.

Le modèle initial d'une équiv-esquisse quasi-projective est le modèle des termes, qui coïncide alors avec le modèle des expressions. Donc toute expression est équivalente à un terme, autrement dit tout “programme” a une “valeur”.

L'évaluation statique décrit précisément comment, à partir d'une expression, construire un terme équivalent. Essentiellement, on montre comment enlever un à un les “*si... alors... sinon...*”, et on prouve que cela suffit.

## 4.2 Evaluation dynamique

Dans une équiv-esquisse non quasi-projective, une expression n'a généralement pas de valeur. Mais elle a toujours une *valeur dynamique*, au sens suivant :

**Définitions.** Un *scindage* d'une équiv-esquisse  $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$  est un ensemble  $\{\Psi_j : \langle\!\langle S \rangle\!\rangle \rightarrow \langle\!\langle S_j \rangle\!\rangle\}_{j \in J}$  d'enrichissements de  $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$  qui induit une partition des modèles de  $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$ : tout modèle de  $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$  est modèle d'une unique  $\langle\!\langle S_j \rangle\!\rangle$ , et tout modèle d'une  $\langle\!\langle S_j \rangle\!\rangle$  est modèle de  $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$ .

Une *valeur dynamique* d'une expression  $\epsilon$  de  $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$  est un scindage de  $\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$  accompagné d'une valeur de  $\epsilon$  dans  $\langle\!\langle S_j \rangle\!\rangle$  pour chaque  $j$ .

Le processus d'évaluation dynamique généralise le processus d'évaluation statique : essentiellement, lorsqu'on ne peut pas enlever un "*si... alors... sinon...*", parce qu'on ne sait pas répondre à la question suivant le "*si*", on effectue un scindage "élémentaire" de l'équiv-esquisse : c'est un scindage à deux branches, on enrichit l'esquisse d'un côté en ajoutant que la réponse à cette question est *oui*, et de l'autre côté en ajoutant que la réponse est *non*. La composition de ces scindages élémentaires fournit le scindage cherché.

Un point très important est de reconnaître, parmi les équiv-esquisses qui apparaissent dans les scindages, celles qui sont incohérentes. On peut alors les oublier, évitant ainsi une explosion de la taille du scindage.

**Exemples.** Sur l'équiv-esquisse  $\langle\!\langle K \rangle\!\rangle$ , le programme

$$\text{si } 2 = 0 \text{ alors } 0 \text{ sinon } 1/2$$

a pour valeur dynamique :

0 sur les corps de caractéristique 2, 1/2 sur les autres

ce qui est juste mais sans grand intérêt.

Cependant l'évaluation dynamique retourne souvent des résultats intéressants. Par exemple, elle peut servir à résoudre des systèmes polynomiaux (voir [Gomez Diaz]). Considérons une esquisse des corps de caractéristique 0, et ajoutons-lui quatre "constantes" (ou "paramètres")  $a, b, c, d$ . Les enrichissements dans les scindages correspondent à des "contraintes" sur les paramètres. Pour reconnaître facilement les équiv-esquisses incohérentes, on peut décider de mettre systématiquement ces contraintes sous forme "triangulaire". Considérons l'expression :

$$\text{si } a + b + c + d = 0 \text{ et } ab + bc + cd + da = 0$$

$$\text{et } abc + bcd + cda + dab = 0 \text{ et } abcd = 1 \text{ alors } 1 \text{ sinon } 0.$$

Par évaluation dynamique, on obtient un scindage dans lequel une seule équiv-esquisse correspond à la valeur 1 : c'est l'enrichissement de l'équiv-esquisse initiale par les contraintes  $a \neq 0$ ,  $b^2 = 1/a^2$ ,  $c = -a$ ,  $d = -b$ .

Autrement dit, on a résolu le système :

$$a + b + c + d = ab + bc + cd + da = abc + bcd + cda + dab = abcd - 1 = 0$$

sous la forme :

$$a \neq 0, \quad b^2 = \frac{1}{a^2}, \quad c = -a, \quad d = -b.$$

## Conclusion

La théorie des esquisses fournit un cadre simple et rigoureux pour traiter de notions informatiques "habituelles". Nous venons de le voir pour les notions de type, programme, valeur, évaluation. Cependant nous avons utilisé ces notions dans un sens relativement restreint (types "élémentaires", programmes "fonctionnels", évaluation "par réécriture"). Est-il possible d'élargir ce point de vue ? La réponse est positive pour les "types composés", voir [Duval et Sénéchaud, Sénéchaud]. Pour les programmes et l'évaluation, le travail est en cours.

## Bibliographie

- [Coppey et Lair] L. COPPEY, C. LAIR. Leçons de théorie des esquisses (I) et (II). *Diagrammes* 12 et 19 (L. Coppey, F. Foltz, C. Henry, C. Lair, Eds.), Université de Paris VII (1984) 1-38 et (1988) 1-68.
- [Diers] Y. DIERS. *Catégories localisables*. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI (1977).
- [Duval et Reynaud] D. DUVAL, J.-C. REYNAUD. Sketches and computation. Part I: Basic Definitions and Static Evaluation. Part II: Dynamic Evaluation and Applications. *Mathematical Structures for Computer Science* 4 (1994) 185-238 et 239-271.
- [Duval et Sénéchaud] D. DUVAL, P. SÉNÉCHAUD. Sketches and parametrization. *Theoretical Computer Science* 123 (1994) 117-130.
- [Ehresmann] C. EHRESMANN. Esquisses et types de structures algébriques. *Bulletinul Institutului Politehnic din Iași*, serie nouă, Tomul XIV(XVIII), fas. 1-2 (1968) 1-32.
- [Gomez Diaz] T. GOMEZ DIAZ. *Quelques applications de l'évaluation dynamique*. Thèse, Université de Limoges (1994).
- [Guitart et Lair] R. GUITART, C. LAIR. Calcul syntaxique dans des modèles et calcul des formules internes. *Diagrammes* 4 (L. Coppey, F. Foltz, R. Guitart, C. Lair, Eds.), Université de Paris VII (1980) GL1-GL106.
- [Sénéchaud] P. SÉNÉCHAUD. Structural parametrization and sketches. Soumis à publication.

# Une application des esquisses : la paramétrisation

Pascale Sénéchaud  
LACO  
123 Avenue Albert Thomas  
87060 Limoges cedex

## Introduction

En Calcul Formel il est fréquent de manipuler des structures paramétrées. Le problème que l'on se pose est d'englober dans un formalisme unique diverses formes de paramétrisation, en définissant et en étudiant ce que peut être une paramétrisation "générale".

La présentation faite ici sera succincte, pour plus de détails voir [Duval & Sénéchaud 94] et [Sénéchaud 94]. Nous donnerons une définition de la notion de paramétrisation : ce sera un foncteur entre deux catégories d'une même forme particulière. Puis, nous proposerons une méthode de construction d'un tel foncteur. Cette définition et cette construction correspondent à ce que l'on entend par paramétrisation en Calcul Formel : nous en verrons quelques exemples.

Un autre point de vue sur la question est développé dans [Gray87].

Nous ne rappellerons pas ici les notions utilisées autour des esquisses. Les principales définitions et propriétés se trouvent dans [Coppey & Lair 84], [Coppey & Lair 88] et [Duval & Reynaud 94-1]. On note  $\mathcal{ESQ}$  la catégorie des (équiv-)esquisses petites.

Nous ne décrirons pas entièrement les esquisses intervenant dans les exemples : nous nous restreindrons à ce qui nous semble essentiel pour les comprendre.

Une première partie sera consacrée à la définition générale et au procédé de construction. Une deuxième partie sera constituée d'exemples d'applications de cette construction.

## 1 Définition et construction

Soient  $G$  un graphe orienté et  $\phi : G \rightarrow \mathcal{ESQ}$  un morphisme de graphe.

- Considérons l'ensemble des couples  $(\psi, \hat{t})$  où  $\psi : G \rightarrow \mathcal{ESQ}$  est un morphisme de graphe et où  $\hat{t} : \phi \Rightarrow \psi$  est une transformation naturelle.
- Soient  $(\psi_1, \hat{t}_1)$  et  $(\psi_2, \hat{t}_2)$  deux éléments de cet ensemble. On considère qu'une transformation naturelle,  $\hat{t}_{1,2} : \psi_1 \Rightarrow \psi_2$ , telle que  $\hat{t}_{1,2} \circ \hat{t}_1 = \hat{t}_2$ , est une flèche de  $(\psi_1, \hat{t}_1)$  vers  $(\psi_2, \hat{t}_2)$ .
- On construit ainsi une catégorie que l'on note  $\phi/\mathcal{ESQ}$ .

Soit alors la définition suivante :

**Définition 1** Soient  $\phi : G \rightarrow \mathcal{ESQ}$  et  $\phi' : G' \rightarrow \mathcal{ESQ}$  deux morphismes de graphe. Une paramétrisation de base  $\phi$  et de cobase  $\phi'$  est un foncteur  $\mathcal{P} : \phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow \phi'/\mathcal{ESQ}$  qui commute aux colimites.

On introduit les notations suivantes :

- Soit  $G$  un graphe avec un unique sommet et sans arête et soit  $\phi : G \rightarrow \mathcal{ESQ}$  un morphisme de graphe. Notons  $\mathcal{E}$  l'esquisse image par  $\phi$  du sommet de  $G$ . La catégorie  $\phi/\mathcal{ESQ}$  n'est alors rien d'autre que la catégorie notée  $\mathcal{E}/\mathcal{ESQ}$  suivante :
  - les objets sont les morphismes d'esquisses de source  $\mathcal{E}$ .

- les flèches sont les  $\mathcal{E}$ -morphismes avec la définition suivante :  
si  $s_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}_1$  et  $s_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}_2$  sont deux morphismes d'esquisses, un  $\mathcal{E}$ -morphisme de  $s_1$  vers  $s_2$  est un morphisme d'esquisses  $F : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$  tel que :  $F.s_1 = s_2$ .
- Soient  $\phi : G \rightarrow \mathcal{ESQ}$  et  $\phi' : G' \rightarrow \mathcal{ESQ}$  deux morphismes de graphes et notons, si  $j$  et  $i$  sont des sommets respectifs de  $G$  et  $G'$ ,  $A_j = \phi(j)$ ,  $\mathcal{E}_i = \phi'(i)$ .

Donnons maintenant un processus de construction d'un tel foncteur.

#### • Première étape

Nous allons construire une famille de paramétrisations (foncteurs qui commutent aux colimites)  $\mathcal{P}_i : \phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow \mathcal{E}_i/\mathcal{ESQ}$  pour chaque sommet  $i$  de  $G'$ .

Soit  $\mathcal{A}$  la *colimite* du foncteur  $\phi$  et  $\text{coproj}_{\phi,j} : A_j \rightarrow \mathcal{A}$ , la coprojection associée. Considérons tout d'abord le foncteur, qui commute aux colimites,  $\text{Colim} : \phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{ESQ}$ , qui à l'objet  $(\psi, \hat{t})$  associe le morphisme  $t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , colimite des  $\hat{t}_j$  (donnés par la transformation naturelle  $\hat{t}$ , indexés par les sommets de  $G$ ). L'image d'une flèche de  $\phi/\mathcal{ESQ}$  est obtenue de même.

Soit  $q_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}_i$  un morphisme d'esquisse. Construisons, par somme amalgamée, un foncteur commutant aux colimites,  $Q_i : \mathcal{A}/\mathcal{ESQ} \rightarrow \mathcal{E}_i/\mathcal{ESQ}$  de la manière suivante :

A chaque morphisme  $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  on associe  $t_i : \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{F}_i$  donné par la construction de la somme amalgamée de  $\mathcal{B}$  avec  $\mathcal{E}_i$  au-dessus de  $\mathcal{A}$ ) et à chaque  $\mathcal{A}$ -morphisme de  $s$  vers  $s'$  on associe l'unique morphisme obtenu grâce à la propriété universelle de la somme amalgamée.

Posons  $\mathcal{P}_i = Q_i \circ \text{Colim}$ . Il s'agit bien d'un foncteur  $\phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow \mathcal{E}_i/\mathcal{ESQ}$ , qui commute aux colimites par composition.

#### • Deuxième étape

Nous venons de construire une famille de foncteurs  $\mathcal{P}_i : \phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow \mathcal{E}_i/\mathcal{ESQ}$  commutant aux colimites pour chaque  $\mathcal{E}_i = \phi'(i)$  ( $i$  sommet de  $G'$ ).

Remarquons que la catégorie  $\phi'/\mathcal{ESQ}$  est la catégorie lax-limite (indexée par le graphe  $G'^{\text{op}}$  dual de  $G'$ ) des catégories  $\mathcal{E}_i/\mathcal{ESQ}$  ([Gray69],[Street 72]). Pour tout sommet  $i$  de  $G'$  posons  $\mathcal{E}_i = \phi'(i)$  et notons  $\text{proj}_i : \phi'/\mathcal{ESQ} \rightarrow \mathcal{E}_i/\mathcal{ESQ}$  la  $i$ -ème projection.

La famille des foncteurs  $\mathcal{P}_i : \phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow \mathcal{E}_i/\mathcal{ESQ}$  définit un lax-cône projectif. On peut prendre l'unique foncteur  $\mathcal{P} : \phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow \phi'/\mathcal{ESQ}$  vérifiant  $\text{proj}_i \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}_i$ .

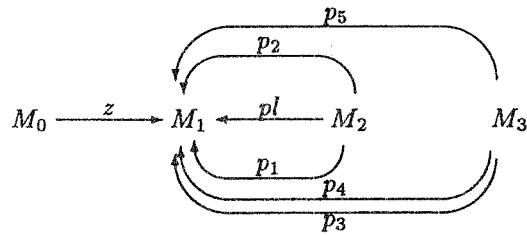
Le foncteur  $\mathcal{P}$  commute aux colimites par construction, il s'agit bien d'une paramétrisation de base  $\phi$  et de cobase  $\phi'$ .

Nous allons voir dans ce qui suit comment on peut lier le formalisme que l'on vient de décrire avec des exemples illustrant la notion de paramétrisation telle que l'on peut l'employer en Calcul Formel.

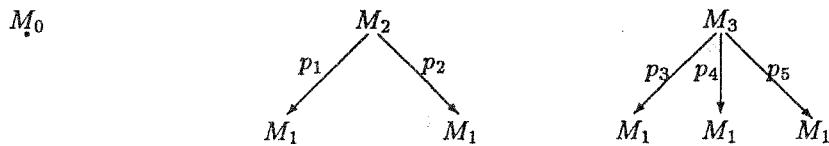
Avant d'étudier la paramétrisation proprement dite, nous allons introduire les esquisses dont nous aurons besoin par la suite. Afin d'alléger les descriptions graphiques, nous remplacerons certaines parties du graphe par des "boîtes" correspondant à des esquisses déjà décrites.

## 2 Quelques esquisses

- Une esquisse décrivant les monoïdes abéliens :  $\text{Mon}$ . On peut la décrire par le graphe suivant :

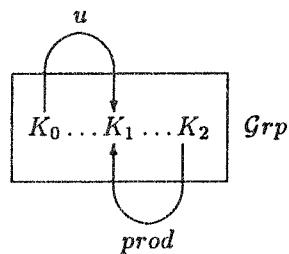


où l'on distingue les trois cônes projectifs :

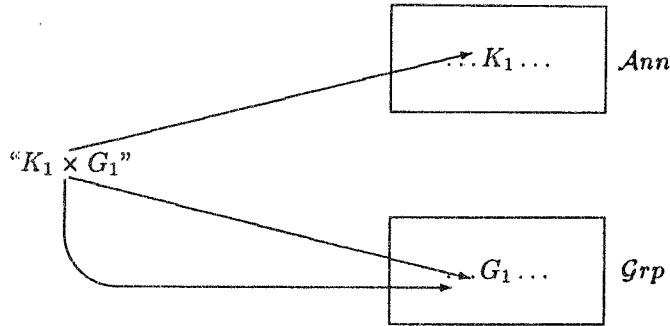


(le premier étant le cône projectif de base vide et de sommet  $M_0$ ) et auquel on ajoute les relations de composition nécessaires à la description des propriétés de monoïde.

- Une esquisse décrivant les groupes abéliens :  $\mathcal{Grp}$  : une telle esquisse peut être obtenue à l'aide de  $\mathcal{Mon}$  : il suffit d'ajouter une flèche  $m : M_1 \rightarrow M_1$  et certaines relations de composition de sorte que si  $M$  est un modèle de  $\mathcal{Grp}$ ,  $M(m)$  soit l'opération qui à tout élément du groupe associe son opposé.
- Une esquisse décrivant les anneaux unitaires :  $\mathcal{Ann}$  : on ajoute à l'esquisse  $\mathcal{Grp}$ , décrivant les groupes abéliens, les flèches  $u$  et  $prod$  et certaines relations de composition concernant ces nouvelles flèches et permettant de décrire les propriétés de la multiplication dans les anneaux. On obtient schématiquement le graphe :



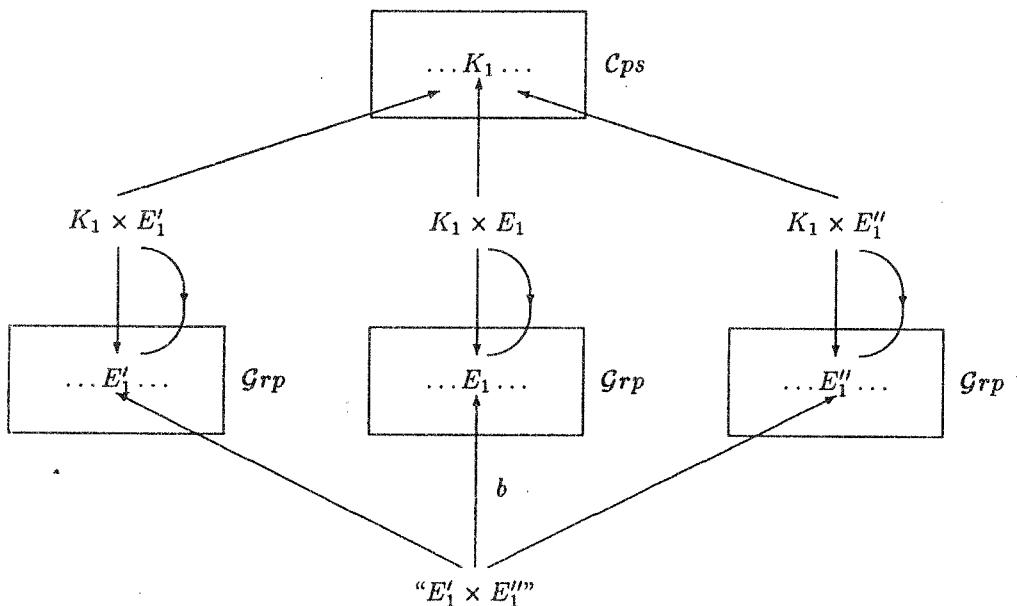
- Une esquisse décrivant les corps :  $\mathcal{Cps}$  : on peut facilement construire les corps à partir des anneaux : un corps est un anneau où  $1 \neq 0$  et où tout élément non nul est inversible. L'esquisse  $\mathcal{Cps}$  est essentiellement constituée de  $\mathcal{Ann}$  à laquelle on ajoute le sommet  $K_1^*$ , les flèches  $inv$  et  $i$  de ce nouveau sommet vers  $K_1$  et le cône inductif distingué de flèches  $i$  et  $z$  de sommet  $K_1$  et de base  $K_1^*, K_0$ .
- Une esquisse décrivant les modules :  $\mathcal{Mod}$  : construisons-la à partir des esquisses  $\mathcal{Ann}$  et  $\mathcal{Grp}$  décrivant respectivement les anneaux et les groupes. Le graphe sous-jacent à  $\mathcal{Mod}$  peut se schématiser par :



- Une esquisse décrivant les espaces vectoriels :  $\mathcal{V}ect$  : pour obtenir la structure d'espace vectoriel lorsque l'on a déjà construit la structure de module, il suffit d'y remplacer la structure d'anneau sous-jacent par celle de corps. C'est ce que l'on fait au niveau des esquisses : on reprend le schéma précédent en remplaçant  $\mathcal{A}nn$  par  $\mathcal{C}ps$ .
- Une esquisse décrivant les espaces vectoriels "tensorisés" relativement à deux espaces vectoriels :  $\mathcal{T}ns$ .

On dira que  $E$  espace vectoriel sur un corps  $K$  est tensorisé relativement à deux espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sur le même corps  $K$  si il existe une application  $b : G \times F \rightarrow E$  bilinéaire.

Soit  $\mathcal{T}ns$  l'esquisse schématisée par



Pour construire cette esquisse on a considéré trois exemplaires de  $\mathcal{V}ect$ , décrivant trois espaces vectoriels sur un même corps et on les a recollés au-dessus de la sous-esquisse correspondant à la description du corps de base. Puis on leur a ajouté le cône projectif distingué de base  $E'_1$  et  $E''_1$  et une flèche  $b : E'_1 \times E''_1 \rightarrow E_1$ . Cette esquisse décrit le produit "tensorisé" relativement à deux espaces vectoriels. Soit  $M$  un modèle de  $\mathcal{T}ns$ , on a traduit le fait que  $M(E_1)$  est muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $M(K_1)$ . Pour traduire le fait que  $M(E_1)$  est "tensorisé" relativement à  $M(E'_1)$  et  $M(E''_1)$  (i.e qu'il contient une image de  $M(E'_1) \otimes M(E''_1)$ ), il suffit de

traduire le fait que la flèche  $M(b) : M(E'_1) \times M(E''_1) \rightarrow M(E_1)$  est bilinéaire. Ceci s'obtient en introduisant des "produits" tels que  $K_1 \times E'_1 \times E''_1$  et des flèches dans l'esquisse  $Tns$  ainsi qu'un certain nombre de relations de composition. Nous ne l'explicitons pas ici.

### 3 Quelques exemples : du plus simple au plus compliqué

Nous allons maintenant utiliser les esquisses du paragraphe précédent dans les différents cas suivants :

#### 3.1 Cas où les graphes $G$ et $G'$ ne contiennent respectivement qu'un sommet et n'ont aucune arête

Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  deux esquisses, une paramétrisation est dans ce cas un foncteur de  $\mathcal{A}/\mathcal{ESQ}$  vers  $\mathcal{E}/\mathcal{ESQ}$  qui commute aux colimites (cf paragraphe 1).

Les catégories  $\mathcal{A}/\mathcal{ESQ}$  correspondent en fait à la notion de "paramètres" : l' esquisse  $\mathcal{A}$  peut décrire syntaxiquement une structure, les objets de la catégorie  $\mathcal{A}/\mathcal{ESQ}$ , c'est-à-dire les morphismes  $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sont un moyen de considérer des "exemples de  $\mathcal{A}$ ". En fait, d'après [Duval & Sénéchaud 94], il faut interpréter un morphisme  $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  comme un "modèle" de  $\mathcal{A}$  : intuitivement c'est le plus petit modèle de  $\mathcal{A}$  vérifiant les contraintes décrites par  $\mathcal{B}$ , lorsqu'il existe.

Les différentes étapes de la construction donnée dans le paragraphe précédent se simplifient. La première étape fournit un foncteur commutant aux limites de  $\mathcal{A}/\mathcal{ESQ}$  vers  $\mathcal{E}/\mathcal{ESQ}$ , la deuxième étape est donc supprimée. Dans la première étape la phase de construction des colimites est supprimée, il ne reste que la partie concernant la somme amalgamée qui donne directement le foncteur cherché.

- Un premier exemple : soit le morphisme  $p : Ann \rightarrow Mod$ , inclusion canonique de  $Ann$  dans  $Mod$ .

On considère le morphisme d'inclusion  $s_2 : Ann \rightarrow Cps$ . La somme amalgamée de  $Mod$  avec  $Cps$  au-dessus de  $Ann$  fournit une esquisse analogue à  $Mod$  mais qui contient " $Cps$ " à la place de  $Ann$  : il s'agit de l'esquisse  $Vect$ .

Les modules sont considérés comme paramétrés par les anneaux.

On peut remarquer que l'on traite ici un exemple où des esquisses n'ont pas de modèle initial.

- Un deuxième exemple : on peut, par le formalisme précédent, décrire la paramétrisation d'une esquisse par une flèche d'une autre esquisse. Pour cela on considère une esquisse  $\mathcal{S}$  avec un objet  $S_1$  et ayant au moins un cône distingué de base vide et de sommet  $S_0$ . On enrichit cette esquisse d'une flèche  $f : S_0 \rightarrow S_1$ . Soit  $\mathcal{S}f$  l'esquisse obtenue. Pour décrire la paramétrisation d'une esquisse  $\mathcal{E}$  par  $f$  et  $S$  on prendra un foncteur (commutant aux colimites) de  $\mathcal{S}f/\mathcal{ESQ}$  vers  $\mathcal{E}/\mathcal{ESQ}$ . On peut, par exemple, parler ainsi des polynômes de degré  $n$  et faire varier uniquement  $n$ . Pour des exemples plus concrets voir [Sénéchaud 94]

#### 3.2 Cas où $G$ est quelconque et où $G'$ a un seul sommet et aucune arête

Les paramétrisations considérées correspondent au cas où les paramètres sont dépendants, le graphe  $G$  décrit ces dépendances. Soit l'exemple :

Considérons l'esquisse  $Tns$  décrivant les espaces vectoriels tensorisés donnée précédemment. On prend pour  $G$  le graphe à trois sommets 1, 2, 3 et à deux flèches  $a' : 1 \rightarrow 2$  et  $a'' : 1 \rightarrow 3$

et pour  $\phi : G \rightarrow \mathcal{ESQ}$  l'homomorphisme défini par  $\phi(1) = Cps$ ,  $\phi(2) = Vect'$ ,  $\phi(3) = Vect''$ , où les esquisses  $Vect'$  et  $Vect''$  sont deux exemplaires de l'esquisse  $Vect$  et où  $\phi(a')$  et  $\phi(a'')$  sont les injections canoniques.

On construit une paramétrisation  $\mathcal{P} : \phi/\mathcal{ESQ} \rightarrow Tns/\mathcal{ESQ}$ , en appliquant (seulement) la première étape. La colimite de  $\phi$  est l'esquisse  $Cplvect$  dont les modèles sont les couples d'espaces vectoriels sur un même corps.

On désigne par  $p : Cplvect \rightarrow Tns$  l'injection canonique de  $Cplvect$  vers  $Tns$ .

Considérons l'objet  $(\psi, \hat{t})$  de la catégorie  $\phi/\mathcal{ESQ}$  donné par :

1. Images par  $\psi$  des sommets de  $G$  :

$\psi(1) = \mathcal{Cps}_3$  est l'esquisse décrivant les corps de caractéristique 3,  $\psi(2) = \mathcal{Vect}'_3$ ,  $\psi(3) = \mathcal{Vect}''_3$  sont deux exemplaires de l'esquisse obtenue à partir de  $\mathcal{Vect}$  dans laquelle la sous-esquisse  $\mathcal{Cps}$  est remplacée par  $\mathcal{Cps}_3$ .

2. Images par  $\psi$  des flèches de  $G$  :

$\psi(a') : \mathcal{Cps}_3 \rightarrow \mathcal{Vect}'_3$  et  $\psi(a'') : \mathcal{Cps}_3 \rightarrow \mathcal{Vect}''_3$  sont les injections canoniques.

3. La transformation naturelle  $\hat{t}$  est la transformation naturelle pour laquelle  $\hat{t}_1 : \mathcal{Cps} \rightarrow \mathcal{Cps}_3$ ,  $\hat{t}_2 : \mathcal{Vect}' \rightarrow \mathcal{Vect}'_3$  et  $\hat{t}_3 : \mathcal{Vect}'' \rightarrow \mathcal{Vect}''_3$  sont les injections canoniques.

Déterminons  $\mathcal{P}((\psi, \hat{t}))$ . On construit la colimite de  $\psi$  : c'est l'esquisse  $\mathcal{Cplvect}_3$  qui décrit les couples d'espaces vectoriels sur un même corps de caractéristique 3. L'esquisse  $\mathcal{Tens}_3$ , somme amalgamée de  $\mathcal{Tens}$  avec  $\mathcal{Cplvect}_3$  au-dessus de  $\mathcal{Cplvect}$ , décrit les espaces vectoriels tensorisés relativement à deux espaces vectoriels sur un corps de caractéristique 3, et  $\mathcal{P}((\psi, \hat{t})) : \mathcal{Tens} \rightarrow \mathcal{Tens}_3$  est l'inclusion canonique.

## 4 Conclusion

Nous sommes partis d'une définition générale de la notion de paramétrisation et nous avons vu comment cette notion peut en fait traduire et englober plusieurs formes de paramétrisation utiles en Calcul Formel. La théorie des esquisses offre un formalisme syntaxique qui devrait permettre de définir proprement d'autres notions utiles aux concepteurs de langages de Calcul Formel.

## Bibliographie

- [Coppey & Lair 84] L. Coppey, C. Lair. *Leçons de théorie des esquisses (I)*. Diagrammes 12, Paris, 1984.
- [Coppey & Lair 88] L. Coppey, C. Lair. *Leçons de théorie des esquisses (II)*. Diagrammes 19, Paris, 1988.
- [Duval & Reynaud 94-1] D. Duval, J.-C. Reynaud. *Sketches and Computation - I basic definition and static evaluation* Mathematical Structures for Computer Science, vol 4 pp 185-238, 1994
- [Duval & Reynaud 94-2] D. Duval, J.-C. Reynaud. *Sketches and Computation- II dynamic evaluation and applications* Mathematical Structures for Computer Science, vol 4 pp 239-271, 1994
- [Duval & Sénéchaud 94] D. Duval, P. Sénéchaud. *Sketches and parametrization..* Theoretical Computer Science 123 (1994) p117-130.
- [Even88] C.Even. *Modélisation des types algébriques et de leurs constructeurs par la théorie des esquisses.* Rapport de DEA Langages-Algorithmes-Programmation Univ. P. et M. Curie Paris 7. Jussieu
- [Gray69] J. W. Gray. *The Categorical Comprehension Scheme*. Lecture Notes in Math. 88, Springer, p 242-312, 1969.
- [Gray87] J. W. Gray. *Categorical Aspects of Data Type Constructors*. Theoretical Computer Science 50 p 103-135, 1987.
- [Sénéchaud 94] P.Sénéchaud. *Structural parametrization and sketches*. Soumis 1994.
- [Street 72] R. Street. *Two Constructions on Lax Functors*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. XIII, number 3, Paris, 1972.

# LE DIAGRAMME LOCALEMENT LIBRE COMME UNE COMPLETION INDUCTIVE D'UN SYSTEME DE CHOIX

Matthias Gerner\*      René Guitart†

Journées Catégories, Algèbres, Esquisses, Néo-Esquisses - Caen (France)  
27-30 Septembre 1994

## Abstract

La notion de diagramme localement libre, introduite par Guitart et Lair, est une généralisation de celle de structure libre. L'existence de ces diagrammes localement libres pour les foncteurs esquissables a été établie par Guitart et Lair ; la preuve est basée sur une construction transfinie par saturation. Il y a donc un principe itératif, mais à chaque étape la construction n'est pas effective. Pour cette raison la thèse de Gerner contient une autre démonstration qui est effective mais valable seulement pour les esquisses dont les cônes projectifs sont à bases finies. L'article présent fournit une nouvelle construction du diagramme localement libre qui sépare bien davantage la partie effective de la partie non-effective du processus (de nouveau les cônes projectifs doivent être à bases finies). Cette nouvelle construction représente une amélioration notable à l'égard de ([2], [3]).

## 1 Introduction

**Définition 1 :** Soient  $\underline{A}$  une catégorie,  $\underline{B}$  une catégorie complète et co-complète et  $U : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$  un foncteur. Le foncteur  $U$  admet des *Diagrammes Localement Libres* (D.L.L.) si et seulement si pour tout  $B \in \underline{B}$  il y a une petite catégorie  $DIL_U(B) \in ObCat$ , un foncteur  $D_U^B : DIL_U(B) \rightarrow \underline{A}$  et un cône projectif  $d_U^B = (B \rightarrow D_U^B(C))_{C \in DIL_U(B)}$  tels que pour tout  $A \in \underline{A}$  :

$$Hom_{\underline{B}}(B, UA) \cong \varinjlim_{C \in DIL_U(B)} Hom_{\underline{B}}(D_U^B(C), A).$$

Comme mentionné ci-dessus, Guitart et Lair [4] ont établi l'existence des D.L.L. pour les foncteurs esquissables  $U$ , en particulier pour  $U$  le foncteur-inclusion plein et fidèle de  $\underline{A} = Mod[S]$  dans  $\underline{B} = Set^{\underline{C}}$ , avec  $S = (\underline{C}, \underline{I}, \underline{IP})$  une esquisse mixte dont les ensembles de cônes inductifs et projectifs sont notés par

- $\underline{I} = \{ I = (U_J^I \xrightarrow{\alpha_J^I} U^I)_{J \in \underline{I}^I} \text{ tel que } \underline{I}^I \text{ est une petite catégorie } \}$
- $\underline{IP} = \{ P = (V^K^P \xrightarrow{\beta_K^P} V_K^P)_{K \in \underline{K}^P} \text{ tel que } \underline{K}^P \text{ est une petite catégorie } \}.$

---

\*Université Paris 7 Denis Diderot, e-mail address : gerner@mathp7.jussieu.fr

†Université Paris 7 Denis Diderot, Mathématiques 3<sup>e</sup> Cycle, Couloir 45-55 5<sup>e</sup> étage, 2 Place Jussieu, 75005 Paris

Dans la section 2 nous donnons une nouvelle preuve d'existence des D.L.L. (de nouveau pour un foncteur esquissable  $U$  et avec la restriction que les bases projectives doivent être finies) qui seront encore plus facilement manipulables que les précédents parce que, dans les D.L.L. construits en suivant cette preuve, se trouve mieux séparé ce qui est effectif de ce qui ne l'est pas. Puisque la nouvelle preuve coïncide en grande partie avec celle de Gerner, nous allons souvent nous reporter, dans la section 2, à ([2], [3]).

## 2 Une nouvelle preuve d'existence constructive des D.L.L.

### 2.1 Motivation

Si le foncteur  $(\underline{C} \xrightarrow{T} Set) \in Set^{\underline{C}}$  n'est pas un modèle (i.e. n'est pas dans  $Mod[S]$ ), nous pouvons trouver trois raisons principales pour lesquelles  $T$  ne l'est pas (les deux premiers concernent les limites inductives, le troisième se réfère aux limites projectives).

**Erreur 1** Il est possible que pour un cône inductif de  $S$  l'image de son sommet par  $T$  ne soit pas complètement atteinte par la base, i.e. qu'il existe  $I = (U_J^I \xrightarrow{\alpha_J^I} U^I)_{J \in \underline{J}^I} \in \mathbb{I}$  tel que  $\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} T(U_J^I) \neq T(U^I)$  parce que  $\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T(U_J^I) \subsetneq T(U^I)$ .

**Erreur 2** Il est possible pour un cône inductif de  $S$  que dans l'image de son sommet par  $T$  deux points de la base soient identifiés sans qu'il y ait un zig-zag dans la base qui les joigne ; autrement dit il y a un  $I = (U_J^I \xrightarrow{\alpha_J^I} U^I)_{J \in \underline{J}^I} \in \mathbb{I}$  tel que  $\varinjlim_{J \in \underline{J}^I} T(U_J^I) \neq T(U^I)$  parce qu'il existe  $J, J' \in \underline{J}^I$ ,  $x_J \in T(U_J^I)$  et  $x_{J'} \in T(U_{J'}^I)$  avec  $T(\alpha_J^I)(x_J) = T(\alpha_{J'}^I)(x_{J'})$ , mais sans aucune possibilité de combiner  $(x_J, J)$  et  $(x_{J'}, J')$  par un zig-zag.

**Erreur 3** Il existe  $P = (V^P \xrightarrow{\beta_K^P} V_K^P)_{K \in \underline{K}^P} \in \mathbb{P}$  tel que  $\varprojlim_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P) \neq T(V^P)$

Nous essayons de réparer ces trois types d'erreurs par des ensembles de saturations. Mais comme nous effectuons toutes ces saturations simultanément, il est possible que le nouveau foncteur contienne les trois erreurs à nouveau. Pour cela nous devons recommencer la procédure. Si  $T_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  foncteur de cette procédure, nous notons  $\coprod_{n \in \mathbb{N}} T_n$  par  $T_\infty$  et le quotientons par une relation d'équivalence convenable qui fournira un modèle  $T_\infty/\approx$ . Un tel modèle  $T_\infty/\approx$  sera ainsi donné par le choix d'une chaîne de saturation infinie convenable et d'une relation d'équivalence. Ces chaînes de saturation infinies terminées avec les relations d'équivalence convenables fourniront la catégorie sous-jacente du D.L.L de  $T$ .

### 2.2 La construction point par point du D.L.L.

#### 2.2.1 Les chaînes de saturation de base

Soit  $h : T \rightarrow M$  un morphisme de  $T$  vers un modèle  $M$  de  $S$ . Nous allons construire un ensemble de saturations, et Gerner montre dans [2] qu'il existe des saturations dans cet ensemble qui corrige les erreurs 1,2 et 3 et qui suivies de relations d'équivalences convenables transforment  $T$  en modèles de l'esquisse  $S$  :

**Erreur 1** Pour tout cône inductif  $I$  de l'esquisse  $S$  nous notons par  $T^I = T(U^I) \setminus [\bigcup_{J \in \underline{J}^I} T(\alpha_J^I)(T(U_J^I))]$  l'ensemble des points du sommet  $T(U^I)$  qui ne sont pas atteints par des points de la base  $(T(U_J^I))_{J \in \underline{J}^I}$ .

Nous pouvons définir la mesure de réparation de l'erreur 1 par

$$\Lambda(\underline{J}^I, T^I) = \{\lambda^I : Ob\underline{J}^I \rightarrow \mathcal{P}(T^I) / \lambda^I \text{ est une application}\}.$$

**Erreur 2** Ici nous devons corriger le problème des “zig-zags manquants” dans la base  $(T(U_J^I))_{J \in \underline{J}^I}$ . Sans nuire à la généralité nous ne considérons que les zig-zags du type suivant :

$$\begin{array}{ccccc} J' & \longrightarrow & J & \longleftarrow & J'' \\ J' & \xleftarrow{\gamma} & J & \xrightarrow{\delta} & J'' \end{array}$$

et seulement le deuxième type de zig-zag  $J' \xleftarrow{\gamma} J \xrightarrow{\delta} J''$  présente un problème de “zig-zags manquants” comme nous le montrons en [2]. Définissons ensuite

$$\Theta^{\gamma, \delta}(J) = \{(x_{J'}, x_{J''}) \in T(U_{J'}^I) \times T(U_{J''}^I) / \forall x_J \in T(U_J^I) : T(\gamma)(x_J) \neq x_{J'} \text{ ou } T(\delta)(x_J) \neq x_{J''}\}.$$

Avec  $\Theta^I(J) := \coprod_{\gamma, \delta} \Theta^{\gamma, \delta}(J)$  nous sommes maintenant capables de définir la mesure de réparation de l'erreur 2 par

$$\Theta(\underline{J}^I, T) = \{\vartheta^I : Ob\underline{J}^I \longrightarrow \mathcal{P}(\Theta^I) / \vartheta^I \text{ est une application avec } \forall J \in \underline{J}^I : \vartheta^I(J) \subseteq \Theta^I(J)\}$$

$$\text{où } \Theta^I = \coprod_{J \in \underline{J}^I} \Theta^I(J).$$

**Erreur 3** Afin de réparer l'erreur due au fait que  $T$  ne transforme pas les cônes projectifs de  $S$  en des limites projectives de  $Set$ , nous allons définir pour tout cône projectif  $P \in \mathbb{P}$  de  $S$  :

$$\Psi(\underline{K}^P, T) \stackrel{def}{=} \mathcal{P}(\prod_{K \in \underline{K}^P} T(V_K^P)).$$

La mesure globale de la correction des erreurs 1, 2 et 3 est l'ensemble

$$\Delta_0 = \Gamma = \prod_{I \in \mathbb{I}} \Lambda(\underline{J}^I, T) \times \prod_{I \in \mathbb{I}} \Theta(\underline{J}^I, T) \times \prod_{P \in \mathbb{P}} \Psi(\underline{K}^P, T).$$

Pour tout élément  $(\lambda, \vartheta, \psi) \in \Gamma$  nous avons maintenant le foncteur de saturation  $T_1 = T_1(\lambda, \vartheta, \psi)$  :

$$\begin{aligned} T_1(\lambda, \vartheta, \psi) : \quad & \underline{C} & \longrightarrow & Set \\ & Ob\underline{C} & \longrightarrow & ObSet \\ & W & \mapsto & T(W) + \coprod_{I \in \mathbb{I}} \coprod_{J \in \underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \lambda^I(J) & (\text{erreur1}) \\ & & & + \coprod_{I \in \mathbb{I}} \coprod_{J \in \underline{J}^I} Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \vartheta^I(J) & (\text{erreur2}) \\ & & & + \coprod_{P \in \mathbb{P}} Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi^P & (\text{erreur3}) \\ & Fl\underline{C} & \longrightarrow & FlSet \\ (W \xrightarrow{\epsilon} W') & \mapsto & (T_1(\lambda, \vartheta, \psi)(W) \xrightarrow{T_1(\epsilon)} T_1(\lambda, \vartheta, \psi)(W')) \end{aligned}$$

$T_1(\epsilon)$  est défini par morceaux :

$$\begin{aligned} T(W) & \xrightarrow{T(\epsilon)} T(W') \\ Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \lambda^I(J) & \mapsto Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W') \times \lambda^I(J) \\ (U_J^I \xrightarrow{\theta} W, x) & \mapsto (U_J^I \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\epsilon} W', x) \\ Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W) \times \vartheta^I(J) & \mapsto Hom_{\underline{C}}(U_J^I, W') \times \vartheta^I(J) \\ (U_J^I \xrightarrow{\theta} W, x) & \mapsto (U_J^I \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\epsilon} W', x) \\ Hom_{\underline{C}}(V^P, W) \times \psi^P & \mapsto Hom_{\underline{C}}(V^P, W') \times \psi^P \\ (V^P \xrightarrow{\theta} W, x) & \mapsto (V^P \xrightarrow{\theta} W \xrightarrow{\epsilon} W', x) \end{aligned}$$

Cependant, comme les différents cônes distingués de l'esquisse peuvent être entremêlés, il est possible qu'une saturation anéantisse les effets d'une autre. Pour cela nous allons répéter la procédure de saturation pour  $T_1$ . Ainsi nous obtenons l'ensemble

$$\Gamma_1 = \Gamma_1(\lambda, \vartheta, \psi) = \prod_{I \in \mathbb{I}} \Lambda(\underline{J}^I, T_1) \times \prod_{I \in \mathbb{I}} \Theta(\underline{J}^I, T_1) \times \prod_{P \in \mathbb{P}} \Psi(\underline{K}^P, T_1),$$

et nous pouvons définir  $\Delta_1 = \coprod_{(\lambda, \vartheta, \psi) \in \Gamma} \Gamma_1(\lambda, \vartheta, \psi)$ . Maintenant nous pouvons prolonger cette procédure en une récurrence infinie. Ainsi nous obtenons des foncteurs  $T_1, \dots, T_n$  et des ensembles  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ;  $\Delta_1 = \Delta_1(T), \dots, \Delta_n = \Delta_n(T)$ .

### 2.2.2 La construction du D.L.L.

Nous pouvons poser

$$\Delta_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{ \rho : \mathbb{N} \longrightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n(T) \}$$

Pour  $\rho \in \Delta_\infty$  nous pouvons définir le foncteur de saturation suivant :

$$T(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} T + \coprod_{n \in \mathbb{N}} T_{l(\rho(n))+1}(\rho(n)).$$

où  $l(\rho(n)) \in \mathbb{N}$  est tel que  $\rho(n) \in \Delta_{l(\rho(n))}$ .

Par récurrence nous pouvons définir ensuite des chaînes finies de saturation où chaque membre est défini sur son seul prédécesseur :

Pour  $n = 1$  une telle chaîne consiste en un élément  $\rho \in \Delta_\infty(T)$ . Supposons ensuite que nous ayons défini une chaîne du type  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  et un foncteur  $T(\rho_1, \dots, \rho_n) = T(\rho_1)(\rho_2) \dots (\rho_n)$ . Pour  $\rho \in \Delta_\infty(T(\rho_1, \dots, \rho_n))$  nous pouvons ainsi considérer la chaîne  $(\rho_1, \dots, \rho_n, \rho)$  et le foncteur  $T(\rho_1, \dots, \rho_n, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} T(\rho_1, \dots, \rho_n)(\rho)$ .

Définissons ensuite

$$\Delta_\infty^* = \Delta_\infty^*(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\rho_1, \dots, \rho_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : \rho_i \in \Delta_\infty(T(\rho_1, \dots, \rho_{i-1}))\}$$

Pour  $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in \Delta_\infty^*$ , pour  $H \in \text{Mod}[S]$ , pour  $g : T(\rho_1, \dots, \rho_n) \longrightarrow H$  et pour  $C \in \underline{C}$  nous avons une relation d'équivalence  $\approx_{g(C)}$  donnée par :

$$\forall x, y \in T(\rho_1, \dots, \rho_n)(C) : x \approx_{g(C)} y \Leftrightarrow g(C)(x) = g(C)(y).$$

Ainsi nous pouvons définir pour  $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in \Delta_\infty^*$  la classe suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma(\rho_1, \dots, \rho_n) = \Sigma(T, (\rho_1, \dots, \rho_n)) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\{g : T(\rho_1, \dots, \rho_n) \longrightarrow H / H \in \text{ObMod}[S], T(\rho_1, \dots, \rho_n)/_{\approx_g} \text{ est un modèle de } S\}. \end{aligned}$$

La classe  $\Sigma$  devient un ensemble si nous quotientons  $\Sigma$  par la relation d'équivalence suivante définie pour tous  $T(\rho_1, \dots, \rho_n) \xrightarrow{g} H$  et  $T(\rho_1, \dots, \rho_n) \xrightarrow{g'} H' \in \Sigma(T, (\rho_1, \dots, \rho_n))$  par :

$$g \approx g' \text{ si et seulement si } \forall C \in \underline{C}, \forall x, y \in T(\rho_1, \dots, \rho_n)(C) : g(C)(x) = g(C)(y) \Leftrightarrow g'(C)(x) = g'(C)(y).$$

Pour cela nous définissons

$$\Omega = \Omega(\rho_1, \dots, \rho_n) = \Omega(T, (\rho_1, \dots, \rho_n)) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma(T, (\rho_1, \dots, \rho_n))/\approx$$

La catégorie d'indexation du D.L.L., notée  $\mathcal{F}$ , peut être définie maintenant sur les objets de la façon suivante :

$$\text{Ob}\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{(\rho_1, \dots, \rho_n) \in \Delta_\infty^*} \Omega(T, (\rho_1, \dots, \rho_n))$$

Une flèche  $[(\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx] \rightarrow [(\rho'_1, \dots, \rho'_m), g'/\approx]$  est donnée par une transformation naturelle  $T(\rho_1, \dots, \rho_n)/_{\approx g} \rightarrow T(\rho'_1, \dots, \rho'_m)/_{\approx g'}$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{F}$  est une catégorie petite. Ainsi nous obtenons un foncteur :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & Mod[S] \\ [(\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx] & \longmapsto & T(\rho_1, \dots, \rho_n)/_{\approx g} \\ [(\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx] \longrightarrow [(\rho'_1, \dots, \rho'_m), g'/\approx] & \longmapsto & (T(\rho_1, \dots, \rho_n)/_{\approx g} \longrightarrow T(\rho'_1, \dots, \rho'_m)/_{\approx g'}) \end{array}$$

Nous avons, en outre, un cône projectif  $d : (d([(\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx])) : T \longrightarrow T(\rho_1, \dots, \rho_n)/_{\approx g})_{[(\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx] \in Ob\mathcal{F}}$ .

### 2.3 La construction de 2.2.2 est un D.L.L.

Dans cette partie nous montrons le

**Théorème 2.3 :** Le diagramme  $(\mathcal{F}, D, d)$  est localement libre pour le foncteur  $T : \underline{C} \longrightarrow Ens$ .

Afin de pouvoir prouver ce théorème nous avons besoin d'énoncer le lemme suivant :

**Lemme 2.4 :** Si  $M \in Mod[S]$  est un modèle de l'esquisse  $S$ ,  $F$  et  $G$  deux foncteurs et  $t : F \longrightarrow G$  une transformation naturelle dans  $Set^{\underline{C}}$ , alors pour tout  $\kappa \in \Delta_{\infty}(G)$  il existe une chaîne  $\rho \in \Delta_{\infty}(F)$  et une transformation naturelle  $t' : F(\rho) \longrightarrow G(\kappa)$  dont la restriction à  $F$  est  $t$ . Si  $t$  est surjective, alors  $t'$  l'est aussi.

**Preuve du Lemme :** Construction par image inverse.

**Preuve du Théorème 2.3 :** Conformément à la définition 1 nous devons vérifier pour tout modèle  $M \in Mod[S]$  et tout morphisme  $h : T \longrightarrow M$  dans  $Ens^{\underline{C}}$  les deux propriétés :

- D'abord nous devons trouver un  $[(\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx] \in Ob\mathcal{F}$  et une factorisation de  $(T \xrightarrow{h} M)$  par  $T \longrightarrow T(\rho_1, \dots, \rho_n)/_{\approx g}$ . Nous nous référons ici à [2], pp.32-41 ou à [3] où Gerner construit un  $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$  et un morphisme  $g : T(\rho) \longrightarrow M$  tels que  $T(\rho)/_{\approx g}$  est un modèle et tels que  $T(\rho)/_{\approx g}$  factorise  $(T \xrightarrow{h} M)$ .
- En outre, si  $((\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx, m)$  et  $((\rho'_1, \dots, \rho'_m), g'/\approx, m')$  factorisent le morphisme  $T \xrightarrow{h} M$ , nous devons trouver un zig-zag entre  $((\rho_1, \dots, \rho_n), g/\approx, m)$  et  $((\rho'_1, \dots, \rho'_m), g'/\approx, m')$ . Ecrivons  $\bar{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_n)$  et  $\bar{\rho}' = (\rho'_1, \dots, \rho'_m)$ . Supposons donc que  $[\bar{\rho}, g/\approx]$  et  $[\bar{\rho}', g'/\approx]$  satisfont la première propriété. Sans nuire à la généralité nous pouvons supposer que  $n = m$  (si ce n'est pas le cas, nous pouvons prolonger la suite la plus courte par des saturations vides). Considérons d'abord la somme amalgamée  $Q := (T(\bar{\rho})/_{\perp T(\bar{\rho}')/_{\approx g'}})$  qui est engendrée par les morphismes  $T \longrightarrow T(\bar{\rho})/_{\approx g}$  et  $T \longrightarrow T(\bar{\rho}')/_{\approx g'}$ . La propriété universelle de la somme amalgamée fournit un morphisme unique  $q : Q \longrightarrow M$  tel que  $q$  commute avec  $m$  et  $m'$ . En appliquant [2], pp.32-41 ou [3] au foncteur  $Q$ , nous pouvons trouver une application  $\mu : N \longrightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n(Q)$  et un morphisme  $t : Q(\mu) \longrightarrow M$  tels que  $Q(\mu)/_{\approx t}$  soit un modèle et tels que le morphisme  $q$  factorise par  $Q(\mu)/_{\approx t}$ . Jusqu'à la fin de cette preuve nous montrons maintenant qu'il existe un  $(\bar{\xi}, e/\approx) = ((\xi_1, \dots, \xi_{n+1}), e/\approx) \in Ob\mathcal{F}$  tel que  $T(\bar{\xi})/_{\approx e}$  soit isomorphe à  $Q(\mu)/_{\approx t}$ , et tels qu'il existe des flèches  $(\bar{\rho}, g/\approx) \longrightarrow (\bar{\xi}, e/\approx)$  et  $(\bar{\rho}', g'/\approx) \longrightarrow (\bar{\xi}, e/\approx)$  qui fournissent le zig-zag désiré.

Afin de prouver cela, nous devons énoncer le lemme suivant :

**Lemme 2.5 :** Avec les notations ci-dessus il existe une chaîne  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Delta_\infty^*(T)$  telle que  $T(\bar{\xi}) = T(\bar{\rho}) + \sum_i T(\bar{\rho}') + R(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$  où  $R(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$  est une somme de sous-foncteurs ( $R$  signifie “reste”) d’un des  $T(\xi_1, \dots, \xi_i)$  avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Il existe, en outre, des transformations naturelles  $T(\xi_1, \dots, \xi_i) \rightarrow Q$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) telles que le diagramme correspondant sur  $M$  soit commutatif et telles que  $T(\xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow Q$  soit surjective.

**Preuve du Lemme 2.5 :** La chaîne  $\bar{\xi}$  est obtenue par formation successive de sommes amalgamées.

Nous pouvons appliquer le Lemme 2.4 à la chaîne  $\mu \in \Delta_\infty(Q)$  et trouver une chaîne  $\xi_{n+1} \in \Delta_\infty(T(\bar{\xi}))$  et une transformation naturelle surjective  $T(\bar{\xi})(\xi_{n+1})$ . En combinant cette transformation naturelle  $Q(\mu) \rightarrow Q(\mu)/\approx_t$  nous obtenons une transformation naturelle surjective  $e : T(\bar{\xi})(\xi_{n+1}) \rightarrow Q(\mu)/\approx_t$ . Pour cette raison nous avons un modèle  $T(\bar{\xi})(\xi_{n+1})/\approx_e$  qui est engendré par un point du D.L.L. et qui est isomorphe à  $Q(\mu)/\approx_t$ . Les flèches  $(\bar{\rho}, g/\approx) \rightarrow (\bar{\xi}, e/\approx)$  et  $(\bar{\rho}', g'/\approx) \rightarrow (\bar{\xi}, e/\approx)$  fournissent le zig-zag désiré. □

## Références

- [1] Diers Y.  
Catégories Localisables, Thèse Paris 1977
- [2] Gerner M.,  
Le lien entre la logique et la géométrie via les esquisses,  
Thèse de Doctorat, Université Denis Diderot (Paris 7), 1994
- [3] Gerner M.,  
The locally free diagram revisited for a calculus of geometric invariants, submitted to J.P.A.A.
- [4] Guitart R. et Lair C.,  
Existence de Diagrammes Localement Libres I and II, Diagrammes, Vol. 6 et 7, Paris 1980 et 1981
- [5] Guitart R.,  
On the geometry of computations I and II,  
Cahiers de top. et géom. diff. cat., Vol. XXVII-4, 1986 et Vol. XXIX-4, 1988

# Une construction d'un nerf des $\infty$ -catégories

*A.Burroni & J.Penon*

Université Paris 7 -Denis-Diderot  
U.F.R. de mathématiques  
2 Place Jussieu 75251 PARIS cedex 05

## Introduction.

R.Street a donné dans [Str] une construction d'un nerf des  $\infty$ -catégories<sup>1</sup>. Nous proposons dans ce travail une nouvelle construction d'un nerf qui utilise les techniques classiques de l'algèbre homologique. Bien que l'identité entre les deux constructions reste à démontrer, on a vérifié qu'elles coïncident jusqu'à la dimension 6; ce sont celles qui sont calculées explicitement dans [Str].

Plus précisément, Street construit un objet cosimplicial de la catégorie des (petites)  $\infty$ -catégories, c'est-à-dire un foncteur  $\mathcal{O} : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ , d'où l'on déduit aussitôt un foncteur nerf  $N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \text{Simpl}$ . Nous proposons donc ici une nouvelle construction  $\mathcal{O}' : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$  d'un tel objet.

Le point de départ de notre construction utilise un résultat de D.Bourn [Bou] qui établit une équivalence fonctorielle entre la catégorie **Compl** des complexes de chaînes de groupes abéliens et la catégorie des objets  $\infty$ -catégories dans **Ab**<sup>2</sup>. En fait nous n'utiliserons que le foncteur  $B : \text{Compl} \rightarrow \infty\text{-Cat}$  déduit de l'équivalence précédente en oubliant les structures de groupes abéliens sur les  $\infty$ -catégories (cette construction sera rappelée dans la section 1).

Pour tout objet  $[n]$  de  $\Delta$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ), l' $\infty$ -catégorie  $\tilde{\Delta}^n = \mathcal{O}'([n])$ , qui se réduit à une  $n$ -catégorie, est appelée comme dans [Str] le  $n^{ième}$  oriental.

Voici, décrits de manière très informelle et abrégée en oubliant notamment les cellules dégénérées, les orientaux de petites dimensions:

- Pour  $n = 0$ : 
$$0 \xrightarrow{(0)} 1$$
 (un seul objet)
- Pour  $n = 1$ : 
$$0 \xrightarrow{(01)} 1$$
 (deux objets, une flèche)
- Pour  $n = 2$ : 
$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{(02)} & 2 \\ & \searrow (01) & \swarrow (12) \\ & 1 & \end{array}$$

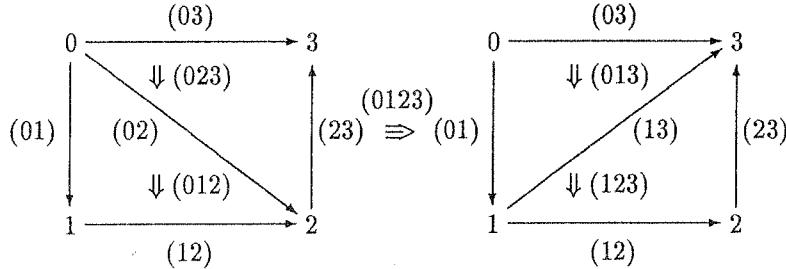
(trois objets, trois flèches et une 2-cellule :  $(02) \rightarrow (12) \circ (01)$ )

---

<sup>1</sup>En réalité Street utilise la notion plus générale de  $\omega$ -catégorie (qui admet des cellules de dimension infinie). Nous nous limitons ici aux  $\infty$ -catégories et nous adopterons une terminologie comme celle que l'on trouve par exemple dans [Bu].

<sup>2</sup>Analogue d'un résultat antérieur de Dold-Kan établissant une équivalence entre **Compl** et **Simpl(Ab)**.

- Pour  $n = 3$ : c'est une flèche dans un tétraèdre



où la figure a été dédoublée pour rendre lisible la 3-cellule  $(0123)$  (voir notations dans le texte).

Illustrons, toujours de manière informelle, par l'exemple d'une composition de 2-cellules dans  $\tilde{\Delta}^n$  ( $n \geq 4$ ), une différence essentielle entre les techniques utilisées dans [Str] et celles qui vont être développées dans ce travail:

la composition:

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ & \Downarrow & \\ & 1 & \end{array} \right) \circ \left( \begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{\quad} & 4 \\ & \Downarrow & \\ & 3 & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 & \xrightarrow{\quad} & 4 \\ & \Downarrow & & \Downarrow & \\ & 1 & & 3 & \end{array} \right)$$

est interprétée dans [Str] de façon ensembliste (ou si l'on veut, géométrique) par une réunion:

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ & \Downarrow & \\ & 1 & \end{array} \right) \cup \left( \begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{\quad} & 4 \\ & \Downarrow & \\ & 3 & \end{array} \right)$$

tandis que nous l'interpréterons ici de manière algébrique par une somme dans un groupe abélien:

$$\left( \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & 2 \\ & \Downarrow & \\ & 1 & \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{\quad} & 4 \\ & \Downarrow & \\ & 3 & \end{array} \right)$$

## 1 Construction des orientaux $\tilde{\Delta}^n$ .

La construction se fait en plusieurs étapes:

1<sup>ère</sup> étape. On note  $\Delta$  (resp.  $\Delta'$ ) la catégorie suivante:

- les objets de  $\Delta$  (resp.  $\Delta'$ ) sont les ensembles ordonnés  $[n] = (\{0, 1, \dots, n\}, \leq)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ( $\leq$  est l'ordre usuel sur les entiers).
- les morphismes de  $\Delta$  (resp.  $\Delta'$ ) sont les applications croissantes (resp. strictement croissantes)  $s : [n] \rightarrow [m]$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ). Il sera souvent commode de noter simplement  $(s_0, s_1, \dots, s_n)$  une telle application où  $s_i = s(i)$  pour  $0 \leq i \leq n$ . On a alors:  $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq m$  (resp.  $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq m$ ).

On appelle *ensemble simplicial* (resp. *ensemble présimplicial*) un objet de la catégorie  $\mathbf{Simpl} = \mathbf{Ens}^{\Delta^{op}}$  (resp.  $\mathbf{Simpl}' = \mathbf{Ens}^{\Delta'^{op}}$ ), c'est-à-dire un foncteur de la forme  $S : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$  (resp.  $S : \Delta'^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ). En particulier, si  $Y : \Delta' \rightarrow \mathbf{Simpl}'$  est le plongement de Yoneda, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  un ensemble présimplicial  $\Delta'^n = Y([n])$ . On note  $\Delta'^n$  l'ensemble  $\Delta'^n([p]) = \text{Hom}_{\Delta'}([p], [n])$  des  $s = (s_0, s_1, \dots, s_p)$  tels que  $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_p \leq n$ .

2<sup>ème</sup> étape. On note **Compl** la catégorie des complexes de chaînes de groupes abéliens. Un objet de **Compl** est donc un diagramme A de la forme:

$$A_0 \xleftarrow{\partial_1} A_1 \xleftarrow{\partial_2} A_2 \leftarrow \cdots A_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} A_n \leftarrow \cdots$$

où  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a un foncteur  $Z : \mathbf{Simpl}' \rightarrow \mathbf{Compl}$  qui associe à tout ensemble présimplicial  $S$  le complexe  $Z(S)$  suivant:

$$\mathbf{Z}S_0 \xleftarrow{\partial_1} \mathbf{Z}S_1 \xleftarrow{\partial_2} \mathbf{Z}S_2 \leftarrow \cdots \mathbf{Z}S_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} \mathbf{Z}S_n \leftarrow \cdots$$

où  $S_n = S([n])$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\mathbf{Z}S_n$  est le groupe abélien libre engendré par  $S_n$  et où  $\partial_n$  est l'application linéaire définie pour tout élément  $s$  de la base canonique de  $\mathbf{Z}S_n$  par:

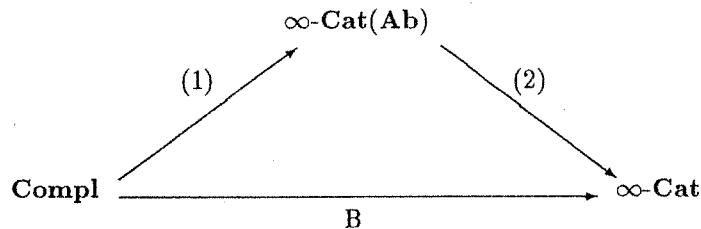
$$\partial_n(s) = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i(s).$$

Dans cette formule  $d_i : S_n \rightarrow S_{n-1}$  est l'application  $d_i = S(\delta_i)$  où  $\delta_i : [n-1] \rightarrow [n]$  est définie par:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } 0 \leq j < i \\ j+1 & \text{si } i \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Nous aurons exclusivement à considérer le cas des complexes  $K^n = Z(\Delta^n)$ . On notera que  $K^n$  est de dimension  $n$ , en ce sens que pour tout  $n < p$  on a  $K_p^n = 0$  et  $K_n^n \neq 0$ .

3<sup>ème</sup> étape. Le point le plus important de notre construction est la description du foncteur composé  $B$  suivant:



où (1) est la correspondance définie par Bourn [Bou] et (2) est le foncteur d'oubli, induit par **Ab**  $\rightarrow$  **Ens**.

Précisement, soit  $A$  un complexe de chaînes

$$A_0 \xleftarrow{\partial_1} A_1 \xleftarrow{\partial_2} A_2 \leftarrow \cdots A_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} A_n \leftarrow \cdots,$$

on lui associe l' $\infty$ -catégorie (en réalité un  $\infty$ -groupoïde)  $B(A)$  suivante:

$$B(A)_0 \overset{\text{dom}}{\longleftarrow} B(A)_1 \overset{\text{dom}}{\longleftarrow} B(A)_2 \overset{\text{dom}}{\longleftarrow} \cdots B(A)_n \overset{\text{dom}}{\longleftarrow} B(A)_{n+1} \overset{\text{dom}}{\longleftarrow} \cdots$$

cod                    cod                    cod

(le diagramme ci-dessus n'est que l' $\infty$ -graphe sous-jacent à l' $\infty$ -catégorie  $B(A)$ , voir [Bu]) où:

$$B(A)_p = A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_p.$$

et où

1. les applications domaines et codomaines sont définies pour tout  $0 \leq q < p$  par:

$$\begin{aligned}\text{dom}_q^p(a_0, a_1, \dots, a_p) &= (a_0, a_1, \dots, a_q) \\ \text{cod}_q^p(a_0, a_1, \dots, a_p) &= (a_0, a_1, \dots, a_q + \partial_{q+1}(a_{q+1}))\end{aligned}$$

2. les compositions par:

$$\begin{aligned}(a'_0, a'_1, \dots, a'_p) \circ_q^p (a_0, a_1, \dots, a_p) &= \\ (a_0, a_1, \dots, a_q, a'_{q+1} + a_{q+1}, \dots, a'_p + a_p)\end{aligned}$$

ssi

$$\text{dom}_q^p(a'_0, a'_1, \dots, a'_p) = \text{cod}_q^p(a_0, a_1, \dots, a_p)$$

3. les identités par:

$$\text{id}_q^p(a_0, a_1, \dots, a_q) = (a_0, a_1, \dots, a_q, 0, \dots, 0)$$

En particulier on obtient ainsi les  $\infty$ -catégories  $B(K^n)$ . Ce sont en fait des  $n$ -catégories, c'est-à-dire que pour  $p > n$  une  $p$ -cellule est toujours une identité.

4<sup>ème</sup> étape. Le dernier ingrédient nécessaire à la construction des orientaux est la "polarisation" des éléments d'un groupe abélien libre  $\mathbf{Z}X$ .

Si  $x = \sum_i n_i x_i$  (où  $x_i \in X$  pour tout  $i$ ) est un élément de  $\mathbf{Z}X$ , on note  $x^-$  l'élément  $\sum_i (n_i^-) x_i$ , où la notation  $n^-$  pour un entier  $n$  est définie par:

$$n^- = \begin{cases} -n & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

On peut maintenant définir, pour tout  $p \geq 0$  l'application

$$\text{cell}_p^n : \Delta'^n_p \longrightarrow B(K^n)_p$$

en posant, pour chaque simplexe  $s$   $\text{cell}_p^n(s) = (c_0, c_1, \dots, c_p)$  où  $c_p = s$  and  $c_i = (\partial(c_{i+1}))^-$ , ( $0 \leq i \leq p$ ). Finalement on obtient, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l' $\infty$ -catégorie  $\tilde{\Delta}^n$ , définie comme sous- $\infty$ -catégorie de  $B(K^n)$  engendrée par les cellules de la forme  $\text{cell}_p^n(s)$ , pour tout  $s \in \Delta'^n_p$ ,  $0 \leq p \leq n$ .  $\tilde{\Delta}^n$  est évidemment une  $n$ -catégorie.

## 2 Propriété des orientaux.

Dans une  $\infty$ -catégorie  $C$  une  $n$ -cellule  $x$  est dite *fermée* si  $\text{dom}_{n-1}^n(x) = \text{cod}_{n-1}^n(x)$  et est dite *dégénérée* s'il existe une  $(n-1)$ -cellule  $y$  telle que  $x = \text{id}_{n-1}^n(y)$ . Une  $\infty$ -catégorie est dite *sans boucle* ("loop-free") si toute cellule fermée est dégénérée. On dit que  $C$  est  $n$ -non dégénérée s'il existe une  $n$ -cellule non dégénérée.

**proposition 1** *La  $n$ -catégorie  $\tilde{\Delta}^n$  est  $n$ -non dégénérée et sans boucle.*

**preuve:** Il est clair que la  $n$ -cellule  $\text{cell}_n^n(I_n)$ , où  $I_n = (0, 1, \dots, n)$  est l'unique  $n$ -simplexe de  $\Delta'^n$ , est non dégénérée et donc que  $\tilde{\Delta}^n$  est non dégénérée.

Montrons maintenant que  $\tilde{\Delta}^n$  est sans boucle. Considérons d'abord l'application linéaire  $\pi_p : K_p^n \longrightarrow \mathbf{Z}$  définie sur les générateurs  $s = (s_0, s_1, \dots, s_p) \in \Delta'^n_p$  du groupe  $K_p^n = \mathbf{Z} \Delta'^n_p$  par  $\pi_p(s) = s_0 + s_1 + \dots + s_p$  (somme dans  $\mathbf{Z}$ ) puis définissons l'application  $\bar{\pi} : \tilde{\Delta}^n_p \longrightarrow \mathbf{Z}$  en posant  $\bar{\pi}_p(c) = \pi_p(c_p)$  pour toute  $p$ -cellule  $c = (c_0, c_1, \dots, c_p)$  de  $\tilde{\Delta}^n_p$ . La proposition sera alors conséquence de la propriété suivante:

si  $c \in \tilde{\Delta}_p^n$  ( $0 \leq p \leq n$ ) est non dégénérée on a

$$\bar{\pi}_{p-1}(\text{dom}_{p-1}^p(c)) < \bar{\pi}_{p-1}(\text{cod}_{p-1}^p(c)).$$

Il en résultera en effet que  $c$  n'est pas une boucle et donc que  $\tilde{\Delta}^n$  est sans boucle. On peut se ramener par induction au cas où  $c = \text{cell}_p^n(s)$  est une  $p$ -cellule génératrice, grâce à la formule:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{p-1}(\text{cod}_{p-1}^p(c' \circ_q^p c)) - \bar{\pi}_{p-1}(\text{dom}_{p-1}^p(c' \circ_q^p c)) = \\ [\bar{\pi}_{p-1}(\text{cod}_{p-1}^p(c')) - \bar{\pi}_{p-1}(\text{dom}_{p-1}^p(c'))] \\ + [\bar{\pi}_{p-1}(\text{cod}_{p-1}^p(c)) - \bar{\pi}_{p-1}(\text{dom}_{p-1}^p(c))] \end{aligned}$$

pour tous  $c, c' \in \tilde{\Delta}_p^n$  tel que  $\text{dom}_q^p(c') = \text{cod}_q^p(c)$  ( $0 \leq q < p$ ). Soit donc  $s \in \Delta_p'^n$ , on a:

$$\bar{\pi}_{p-1}(\text{cod}_{p-1}^p(\text{cell}_p^n(s))) - \bar{\pi}_{p-1}(\text{dom}_{p-1}^p(\text{cell}_p^n(s))) = \pi_{p-1}(\partial s)$$

Pour montrer que  $\pi_{p-1}(\partial s) > 0$ , on distingue deux cas:

- $p = 2k$  :  $\pi_{p-1}(\partial s) = \sum_{i=0}^{k-1} (s_{2i+1} - s_{2i}) + (\pi_p(s) - s_{2n}) > 0$
- $p = 2k + 1$  :  $\pi_{p-1}(\partial s) = \sum_{i=0}^{k-1} (s_{2i+1} - s_{2i}) > 0$ ,

ce qui termine la preuve.  $\square$

Une  $n$ -catégorie  $C$  est dite *finie* si pour tout  $0 \leq p \leq n$  l'ensemble  $C_p$  est fini. Dire que  $C$  est *finiment engendrée* signifie qu'il existe une suite de parties finies  $E_p \subset C_p$  pour  $0 \leq p \leq n$  pour laquelle la seule sous- $n$ -catégorie  $C'$  de  $C$  vérifiant  $E_p \subset C'_p$  pour tout  $0 \leq p \leq n$  est  $C$  elle-même.

**proposition 2** . Une  $n$ -catégorie sans boucle et finiment engendrée est finie. En particulier les  $n$ -catégories  $\tilde{\Delta}^n$  sont finies.

**preuve:** par induction on peut se ramener au cas suivant:  $E_p = C_p$  pour  $0 \leq p \leq n-1$ , et donc au cas où la sous- $(n-1)$ -catégorie  $C^{(n-1)}$  sous-jacente à  $C$  (c'est-à-dire obtenue en oubliant les  $n$ -cellules non dégénérées de  $C$ ) est finie. Pour le prouver il sera commode d'introduire quelques définitions. On posera  $E = E_n$  et on appellera  $E$ -factorisation élémentaire d'une  $n$ -cellule  $x$  un système de la forme:

$$(a, (u_1, v_1), \dots, (u_{n-1}, v_{n-1})) \in E \times (C_1 \times C_1) \times \cdots \times (C_{n-1} \times C_{n-1})$$

tel que:

$$x = \bar{v}_{n-1} \circ_{n-2} (\dots (\bar{v}_2 \circ_1 ((\bar{v}_1 \circ_0 a \circ_0 \bar{u}_1) \circ_1 \bar{u}_2) \dots) \circ_{n-2} \bar{u}_{n-1}$$

où l'on suppose que les compositions sont possibles et où l'on note de façon abrégée  $\circ_p$  au lieu de  $\circ_p^n$  et  $\bar{w}$  au lieu de  $\text{id}_p^n(w)$  pour tout  $w \in C_p$  avec  $0 \leq p < n$ . On dit qu'une  $n$ -cellule  $x$  est  $E$ -élémentaire si elle admet une telle factorisation. On démontre facilement la propriété de stabilité suivante:

si  $x$  est une  $n$ -cellule élémentaire, si  $w \in C_p$  pour un  $0 \leq p < n$  et si le composé  $\bar{w} \circ_q x$  (resp.  $x \circ_q \bar{w}$ ) existe pour un  $0 \leq q < p$ , alors ce composé est une  $n$ -cellule  $E$ -élémentaire.

Il résulte des hypothèses que les  $E$ -factorisations élémentaires sont en nombre fini et donc que le nombre de  $n$ -cellules  $E$ -élémentaires est également fini. Comme par hypothèse les  $n$ -cellules dans  $E$  engendrent  $C$ , il en est évidemment de même des  $n$ -cellules  $E$ -élémentaires, et il reste donc à démontrer pour conclure que ces dernières engendrent par composition un nombre fini de  $n$ -cellules.

D'abord remarquons qu'on peut toujours se ramener par de multiples inductions à des  $(n - 1)$ -compositions; en effet la règle de Godement permet par exemple pour une  $q$ -composition avec  $q < n - 1$  d'écrire:

$$x' \circ_q x = (\overline{\text{cod}_{q+1}(x')} \circ_q x) \circ_{q+1} (\overline{x' \circ_q \text{dom}_{q+1}(x)}).$$

Considérons les  $n$ -chemins  $E$ -irréductibles, c'est-à-dire les suites finies  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  de  $n$ -cellules élémentaires telles que le composé  $x = x_1 \circ_{n-1} x_2 \circ_{n-1} \cdots \circ_{n-1} x_k$  soit défini et telles que pour tout  $1 \leq i < j \leq k$  la cellule composée  $x_{ij} = x_i \circ_{n-1} x_{i+1} \circ_{n-1} \cdots \circ_{n-1} x_j$  soit non dégénérée. Le nombre de ces  $n$ -chemins  $E$ -irréductibles est nécessairement fini car le nombre de  $n$ -cellules  $E$ -élémentaires est fini et l'entier  $k + 1$  est majoré par le nombre d'éléments de  $C_{n-1}$ . En effet, si  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  est un tel  $n$ -chemin  $E$ -irréductible, les  $(n - 1)$ -cellules

$$y_0 = \text{cod}_{n-1}(x_1), \quad y_i = \text{dom}_{n-1}(x_i) \quad (1 \leq i \leq k)$$

doivent être, d'après les hypothèses, distinctes. Il résulte alors de la proposition 1 que  $\tilde{\Delta}^n$  est finie.  $\square$

### 3 Construction de l'objet cosimplicial $\mathcal{O}'$ .

On va commencer par construire un foncteur  $\mathcal{O}' : \Delta' \rightarrow \infty\text{-Cat}$  qui sera prolongé plus loin à  $\Delta$ .

On définit  $\mathcal{O}'$  de la manière suivante:

- sur les objets:  $\mathcal{O}'([n]) = \tilde{\Delta}^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- sur les morphismes: pour toute application strictement croissante  $f : [n] \rightarrow [m]$  on définit le foncteur  $\mathcal{O}'(f) : \tilde{\Delta}^n \rightarrow \tilde{\Delta}^m$  par la factorisation:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta}^n & \dashrightarrow & \tilde{\Delta}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(K^n) & \xrightarrow{B(Z(Y(f)))} & B(K^m) \end{array}$$

où  $Y : \Delta' \rightarrow \mathbf{Simpl}'$  est le plongement de Yoneda et où les flèches verticales sont des inclusions. La factorisation signifie que  $B(Z(Y(f)))$ , que l'on notera simplement  $f$  par la suite, transforme toute cellule génératrice de  $\tilde{\Delta}^n$  en une cellule de  $\tilde{\Delta}^m$ . Plus précisément on établit la formule  $f(\text{cell}_p^n(s)) = \text{cell}_p^m(f_p(s))$  pour tout  $s \in \Delta_p^n$ . Pour cela, il suffit de vérifier que  $f(c^-) = f(c)^-$  pour tout  $c \in K_p^n$  et d'utiliser le fait que  $Z(Y(f))$  est un morphisme de complexes de chaînes.

Nous allons montrer maintenant que le foncteur  $\mathcal{O}' : \Delta' \rightarrow \infty\text{-Cat}$  se prolonge à  $\Delta$  tout entier. La construction de ce prolongement est moins évidente et nécessite une procédure par étapes.

Tout d'abord nous allons caractériser dans la proposition 3 ci-dessous l'expression des différents termes des cellules génératrices de  $\tilde{\Delta}^n$ . On utilisera les notations suivantes:

- $I_n = (0, 1, \dots, n)$  est l'unique  $n$ -simplexe de  $\Delta'^n$ ;

- $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  pour  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , note le  $(n-k)$ -simplexe de  $\Delta'^n$  obtenu à partir de  $I_n$  en supprimant  $i_1, i_2, \dots, i_k$ ;
- $(\partial^-(c)) = (\partial(c))^-$  pour tout  $c \in K_p^n$ ;
- $\sum S$  est une abréviation pour  $\sum_{s \in S} s$ .

**proposition 3** Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a:

$$(\partial^-)^k(I_n) = \sum \{ \langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle \mid i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2, \dots, i_k \equiv k \pmod{2} \}.$$

preuve: elle se fait par induction sur  $k$ .

D'abord pour  $k = 1$  elle se réduit à la définition

$$\partial^-(I_n) = \sum \{ \langle i \rangle \mid i \equiv 1 \},$$

où l'on note simplement  $\equiv$  la congruence modulo 2. Ensuite supposons la formule vraie pour  $k$  et démontrons-la pour  $k+1$ . On s'appuiera sur la formule:

$$\begin{aligned} \partial(\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle) = & \\ & \sum_{j=0}^{i_1-1} (-1)^j \langle j, i_1, \dots, i_k \rangle \\ & + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=i_l+1}^{i_{l+1}-1} (-1)^{j-l} \langle i_1, \dots, i_l, j, i_{l+1}, \dots, i_k \rangle \\ & + \sum_{j=i_k+1}^n (-1)^{j-k} \langle i_1, \dots, i_k, j \rangle \end{aligned}$$

pour tout  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  tel que  $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2, \dots, i_k \equiv k$ .

Cette formule nous permet d'obtenir le calcul des coefficients des différents termes en  $\langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle$  qui apparaissent dans le calcul de  $\partial((\partial^-)^k I_n)$  puis celui de  $(\partial^-)_{k+1}^n$ . Pour un simplexe  $\langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle$  on peut ainsi évaluer la contribution de chacun des  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$ ,  $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2, \dots, i_k \equiv k$ , en faisant un raisonnement par cas.

- Si  $j_1 \equiv 0$ ,  $\langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle$  ne peut apparaître dans une dérivation que sous la forme  $\langle j, i_1, \dots, i_k \rangle$  avec  $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2, \dots, i_k \equiv k$ . Cela est conséquence de l'hypothèse d'induction sur la contrainte modulo 2. Son coefficient est égal à  $(-1)^j = 1$  et donc  $\langle j_1, j_2, \dots, j_k \rangle$  ne figure pas dans  $(\partial^-)^{k+1} I_n$ .
- Si  $j_1 \equiv 1, j_2 \equiv 2, \dots, j_{k+1} \equiv k+1$ , la seule apparition de  $\langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle$  est sous la forme  $\langle i_1, \dots, i_k, j \rangle$  avec  $i_1 \equiv 1, i_2 \equiv 2, \dots, i_k \equiv k$ . Son coefficient est égal à  $(-1)^{j+k} = (-1)^{k+1+k} = -1$ . Donc ce terme apparaît une fois et une seule dans  $(\partial^-)^{k+1} I_n$ .
- Si  $j_1 \equiv 1, j_2 \equiv 2, \dots, j_l \equiv l$  et  $j_{l+1} \equiv l$  pour un certain  $l$ ,  $1 \leq l \leq k$ ,  $\langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle$  apparaît exactement deux fois correspondant aux dérivations en  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  et  $\langle i'_1, i'_2, \dots, i'_k \rangle$ . Précisément:

$$\begin{aligned} \langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle &= \langle i_1, \dots, i_{l-1}, i_l, j, i_{l+1}, \dots, i_k \rangle, \\ \langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle &= \langle i'_1, \dots, i'_{l-1}, i'_l, j', i'_{l+1}, \dots, i'_k \rangle, \end{aligned}$$

donc avec  $j_1 = i_1 = i'_1, \dots, j_{l-1} = i_{l-1} = i'_{l-1}, j_l = i_l = j', j_{l+1} = j = i'_l, j_{l+2} = i_{l+1} = i'_{l+1}, \dots, j_k = i_k = i'_k$ . Les coefficients sont respectivement égaux à  $(-1)^{j-l} =$

$(-1)^{2l} = 1$  et  $(-1)^{j'-(l-1)} = -1$  et donc se neutralisent. Donc  $\langle j_1, j_2, \dots, j_{k+1} \rangle$  n'apparaît pas dans  $\partial((\partial^-)^k(I_n))$  et donc non plus dans  $(\partial^-)^{k+1}(I_n)$ . Il est clair que, en examinant ces différents cas, on établit la formule demandée.  $\square$

Revenons à la construction d'un prolongement de  $\mathcal{O}'$  à  $\Delta$ . A toute application croissante (non nécessairement stricte)  $f : [n] \rightarrow [m]$  et à tout entier  $p \in \mathbb{N}$  on associe une application linéaire  $f_p : K_p^n \rightarrow K_p^m$  en posant pour tout  $s = (s_0, s_1, \dots, s_p) \in \Delta_p^n$ :

$$f_p(s) = [f(s_0), f(s_1), \dots, f(s_p)]$$

où le crochet du second membre est défini pour tout  $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p \leq m$  par:

$$[t_0, t_1, \dots, t_p] = \begin{cases} (t_0, t_1, \dots, t_p) & \text{si } t_0 < t_1 < \dots < t_p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate sans difficulté que ceci définit d'abord un homomorphisme de complexes  $K^f : K^n \rightarrow K^m$  et ensuite un foncteur en posant:  $K([n]) = K^n$ ,  $K(f) = K^f$ . Nous obtenons ainsi un foncteur composé:

$$\Delta \xrightarrow{K} \text{Compl} \xrightarrow{B} \infty\text{-Cat}$$

dont nous allons extraire  $\mathcal{O}'$  comme sous-foncteur.

Pour cela nous allons montrer que pour tout  $f : [n] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$ , le foncteur  $B(K^f) : B(K^n) \rightarrow B(K^m)$  transforme les cellules génératrices de  $\tilde{\Delta}^n$  en cellules génératrices de  $\tilde{\Delta}^m$ . Cette propriété a déjà été démontrée dans le cas où  $f$  est strictement croissante, montrons la maintenant pour les surjections qui sont de la forme  $f : [n+1] \rightarrow [n]$  et définies par:

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{si } 0 \leq i \leq j \\ i-1 & \text{si } j < i \leq n+1 \end{cases}$$

et où l'entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq n+1$  est fixé.

**proposition 4** *f étant la surjection définie ci-dessus (et donc pour j fixé), on a:*

$$f(\text{cell}(I_{n+1})) = \text{id}_n^{n+1}(\text{cell}(I_n))$$

où on a noté simplement  $f$  au lieu de  $B(K^f)$  au premier membre.

**preuve:** il suffit de vérifier que:  $f_{n+1}(I_{n+1}) = 0$  et  $f_{n+1-k}((\partial^-)^k(I_{n+1})) = (\partial^-)^{k-1}(I_n)$  pour tout  $1 \leq k \leq n+1$ . En tenant compte de la caractérisation de  $(\partial^-)^k(I_{n+1})$  donnée dans la proposition 3, il reste à montrer que  $f_{n+1-k} : K_{n+1-k}^{n+1} \rightarrow K_{n+1-k}^n$  vérifie  $f_{n+1-k}(\sum J) = \sum J'$  où:

$$\begin{aligned} J &= \{ \langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle \mid i_1 \equiv 1, \dots, i_k \equiv k \pmod{2} \\ &\quad \text{et } 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1 \} \\ J' &= \{ \langle i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1} \rangle \mid i'_1 \equiv 1, \dots, i'_{k-1} \equiv k-1 \pmod{2} \\ &\quad \text{et } 0 \leq i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{k-1} \leq n \} \end{aligned}$$

Précisément on va montrer que  $f$  transforme tout  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  en 0 ou en un  $\langle i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1} \rangle$  et inversement que tout  $\langle i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1} \rangle$  est obtenu d'une façon et d'une seule de cette manière. Considérons donc un  $\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle$  selon la position de  $j$  et  $j+1$  par rapport aux  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . On a différents cas:

- Si  $j, j+1 \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ , on a:

$$f(\langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle) = 0 \quad \text{car} \quad f(j) = f(j+1)$$

- Si  $j = i_l$  et  $j + 1 \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  ou si  $j + 1 = i_l$  et  $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ , on a:

$$f(< i_1, i_2, \dots, i_k >) = < i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1} - 1, \dots, i_k - 1 >$$

et si on pose  $< i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1} > = < i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1} - 1, \dots, i_{k-1} >$  on a bien  $i'_h \equiv h$  pour tout  $1 \leq h \leq k - 1$  puisque  $i_{h+1} - 1 \equiv i_h \equiv h$ .

- Si  $j = i_l$  et  $j + 1 = i_{l+1}$ , on a:

$$f(< i_1, i_2, \dots, i_k >) = < i_1, \dots, i_l, i_{l+2} - 1, \dots, i_k - 1 >$$

et si on pose  $< i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1} > = < i_1, \dots, i_l, i_{l+2} - 1, \dots, i_k - 1 >$  on a bien  $i'_h \equiv h$  comme ci-dessus.

Considérons maintenant un  $< i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1} >$  selon la parité de la position de  $j$  par rapport aux  $i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1}$ . On a les différents cas:

- Si  $j \notin \{i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1}\}$ :

$$f(< i_1, i_2, \dots, i_k >) = < i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1} >$$

a pour solution selon les cas:

– Si  $i'_l < j < i'_{l+1}$  et  $j \equiv l + 1$ ,

$$< i_1, i_2, \dots, i_k > = < i'_1, \dots, i'_l, j, i'_{l+1} + 1, \dots, i'_{k-1} + 1 >$$

– Si  $i'_l < j < i'_{l+1}$  et  $j \equiv l$ ,

$$< i_1, i_2, \dots, i_k > = < i'_1, \dots, i'_l, j + 1, i'_{l+1} + 1, \dots, i'_{k-1} + 1 >$$

(Raisonnement analogue dans les cas limites  $j < i'_1$  et  $i'_{k-1} < j$ )

- Si  $j = i'_l$ :

$$f(< i_1, i_2, \dots, i_k >) = < i'_1, i'_2, \dots, i'_k >$$

a pour solution:

$$< i_1, i_2, \dots, i_k > = < i'_1, \dots, i'_{l-1}, j, j + 1, i'_{l+1} + 1, \dots, i'_{k-1} + 1 > .$$

Et ces solutions sont évidemment uniques. Ce qui termine la preuve.  $\square$

Le résultat précédent se généralise ainsi:

**proposition 5** *f vérifiant les même hypothèses que dans la proposition 4, on a, pour tout  $s \in \Delta_p^n$ , selon les cas:*

1. si  $f(s(i)) < f(s(i+1))$  pour tout  $0 \leq i \leq p - 1$ ,

$$f(\text{cell}(s)) = \text{cell}(f_p(s)).$$

2. si  $f(s(i_0)) < f(s(i_0) + 1)$  pour un  $0 \leq i_0 \leq p - 1$ ,

$$f(\text{cell}(s)) = \text{id}(\text{cell}(s'))$$

où  $s' : [p - 1] \rightarrow [n]$  est définie par:

$$s'(i) = \begin{cases} f(s(i)) & \text{si } i \leq i_0 \\ f(s(i)) - 1 & \text{si } i_0 + 1 \leq i. \end{cases}$$

(ou encore  $s' = (f(s(0)), \dots, \widehat{f(s(i_0))}, \dots, f(s(p)))$ ).

**preuve:**  $s$  étant strictement croissante, notons d'abord que:

$$f_p(s) = f_p(s_p(I_p)) = (f \circ s)_p(I_p),$$

$$\text{cell}(s) = \text{cell}(s_p(I_p)) = s(\text{cell}(I_p)).$$

1. Sous la première hypothèse l'application  $s' = f \circ s$  est strictement croissante, donc:

$$f(\text{cell}(s)) = f(s(\text{cell}(I_p))) = s'(\text{cell}(I_p)) = \text{cell}(s'(I_p)) = \text{cell}(f_p(s))$$

2. Sous la seconde hypothèse notons  $f' : [p] \rightarrow [p-1]$  l'application définie par:

$$f'(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq i_0 \\ i-1 & \text{si } i > i_0. \end{cases}$$

(Remarquons que l'entier  $i_0$  s'il existe est unique.) Alor le carré suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} [p] & \xrightarrow{s} & [n+1] \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ [p-1] & \xrightarrow{s'} & [n] \end{array}$$

où  $s, s'$  sont strictement croissantes et  $f, f'$  surjectives. Alors:

$$f(\text{cell}(s)) = (f \circ s)(\text{cell}(I_p)) = (s' \circ f')(\text{cell}(I_p)) = s'(f'(\text{cell}(I_p))).$$

D'après la proposition 4 on a  $f'(\text{cell}(I_p)) = \text{id}(\text{cell}(I_{p-1}))$  donc:

$$\begin{aligned} s'(f'(\text{cell}(I_p))) &= s'(\text{id}(\text{cell}(I_{p-1}))) = \\ &\text{id}(s'(\text{cell}(I_{p-1}))) = \text{id}(\text{cell}(s'_{p-1}(I_{p-1}))) = \text{id}(\text{cell}(s')). \end{aligned} \quad \square$$

Nous avons ainsi démontré que pour toute application  $f : [n+1] \rightarrow [n]$  croissante et surjective, l' $\infty$ -foncteur  $f : B(K^{n+1}) \rightarrow B(K^n)$  transforme les cellules génératrices de  $\tilde{\Delta}^{n+1}$  en cellules génératrices de  $\tilde{\Delta}^n$ . D'où la factorisation.

Finalement, étant donné que toute application  $f : [n] \rightarrow [m]$  est un composé d'injections et de surjections croissantes du type de celles décrites ci-dessus on en déduit que l' $\infty$ -foncteur  $f : B(K^n) \rightarrow B(K^m)$  se factorise en un sous-foncteur noté  $\mathcal{O}'(f) : \tilde{\Delta}^n \rightarrow \tilde{\Delta}^m$ . De plus la fonctorialité du composé:

$$\Delta \xrightarrow{K} \mathbf{Compl} \xrightarrow{B} \infty\text{-Cat}$$

entraîne celle de  $\mathcal{O}' : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ . Ce foncteur est évidemment un prolongement de celui déjà défini  $\mathcal{O}' : \Delta' \rightarrow \infty\text{-Cat}$ .

## Conclusion.

A partir de cet objet cosimplicial  $\mathcal{O}' : \Delta \rightarrow \infty\text{-Cat}$  le foncteur nerf  $N : \infty\text{-Cat} \rightarrow \mathbf{Simpl}$  est obtenu simplement en posant:

$$N(C)([n]) = \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(\mathcal{O}'([n]), C)$$

pour toute  $\infty$ -catégorie  $C$ , pour tout objet  $[n]$  de  $\Delta$  et en étendant de manière évidente cette formule aux morphismes. On peut ainsi calculer la cohomologie, ou plutôt *une* cohomologie, d'une  $\infty$ -catégorie  $C$  en la ramenant à celle de l'objet simplicial  $N(C)$ .

## Références

- [Bou] D.Bourn, *Another denormalisation theorem for the abelian chain complexes.* Journal of Pure and Applied Algebra 66 (1990) 229-249.
- [Bu] A.Burroni, *Higher-dimensional word problem with applications to equational logic.* Theoretical Computer science 115 (1993) 43-62.
- [Str] R.Street, *The Algebra of oriented simplexes,* J.P.A.A. 49 (1987) 283-335.



## Le foncteur nerf pour les n-groupoïdes

Dominique BOURN  
Université du Littoral  
Quai Freycinet 1  
BP 5526 - 59379 DUNKERQUE Cedex

La question du nerf des n-catégories a été abordée par différents auteurs : R. Street [4], M. Johnson [3], F.A. Agl et R. Steiner [1] par exemple, et plus récemment par A. Burroni et J. Penon (ce volume), mais toujours sous un angle géométrico-combinatoire, extrêmement complexe. Outre sa difficulté propre, ce traitement n'est valable que dans le cadre ensembliste et ne permet pas d'aborder le cas des n-catégories internes.

Dans un récent travail [2], j'ai montré que les n-groupoïdes internes étaient monadiques sur les  $(n-1)$ -groupoïdes internes normalisés, c'est-à-dire les  $(n-1)$ -groupoïdes munis du choix d'un objet dans chaque composante connexe, d'une flèche entre cet objet et tout autre objet de la composante, d'une 2-cellule dans tout triangle dont deux des côtés sont formés des flèches précédentes, et ainsi de suite, sans autre cohérence que ce choix soit nécessairement une cellule identité si les deux bords de niveau inférieur sont égaux par composition.

Ce théorème de monadicité donne dans sa démonstration même une présentation polyédrale naturelle des n-groupoïdes qui induit une description récurrente, totalement algébrique et interne, du nerf d'un n-groupoïde, c'est-à-dire de son n-objet simplicial associé.

### Rappel sur les n-groupoïdes - Le cas $n=1$ et $n=2$

Si  $E$  est une catégorie exacte à gauche, on note  $PtE$  la catégorie dont les objets sont les épimorphismes scindés avec scindage donné et les morphismes les carrés commutatifs entre ces données. On note  $p: PtE \rightarrow E$  le foncteur qui associe à tout épimorphisme scindé son but. C'est une fibration dont les fibres sont pointées (i.e. admettent un objet final qui est aussi initial) ce qui signifie, entre autres, que  $p$  admet un adjoint à droite et inverse à droite  $r$ . Si  $f: E \rightarrow B$  est une fibration exacte à gauche, on note  $Ptf E$  la sous catégorie pleine de  $PtE$  dont les objets sont les épimorphismes scindés dont l'image par  $f$  est inversible et par  $pf$  la restriction fibrée de  $p$ .

Il y a une monade  $(T, \lambda, \mu)$  sur  $PtE$  définie par l'endofoncteur  $T: PtE \rightarrow PtE$  qui associe à tout épimorphisme scindé  $(g, s)$ ,  $g: X \rightarrow Y$ , l'épimorphisme scindé  $(\Pi_0, \sigma_0)$ ,  $\Pi_0: X \times_Y X \rightarrow X$  où  $\Pi_0$  est la première projection du produit fibré de  $g$  par lui-même et  $\sigma_0$  la diagonale. La monade  $(T, \lambda, \mu)$  est stable sur les sous-catégories du type  $Ptf E$ . Cette monade est notre outil principal.

**Théorème 1** - La catégorie Grd E des groupoïdes internes à E est la catégorie des algèbres de la monade  $(T, \lambda, \mu)$  sur PtE.

On note  $U_0 : \text{Grd E} \rightarrow E$ , le foncteur d'oubli,  $F_1$  son adjoint à gauche ainsi que  $(\ )_0 : \text{Grd E} \rightarrow E$  le fibration  $p_0 U_0$ .

La catégorie des groupoïdes normalisés est défini par le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pt}_0(\text{Grd E}) & \xleftarrow{\tilde{F}_1} & N\text{-Grd E} \\ p_0 \downarrow & & \downarrow k_0 \\ \text{Grd E} & \xleftarrow{F_1} & \text{PtE} \end{array}$$

où  $\text{Pt}_0(\text{Grd E})$  désigne  $\text{Pt}_{0_0}(\text{Grd E})$  et  $p_0$  désigne  $p_{0_0}$ . L'adjoint à droite inverse à droite  $r_1$  de  $p_0$  détermine un adjoint à droite inverse à droite  $\rho_1$  de  $k_0$ .

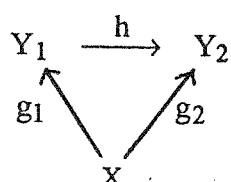
Un groupoïde normalisé est juste un groupoïde  $X_1$  dont le graphe sous-jacent :

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{d_0} & \\ X_0 & \xrightarrow{s_0} & mX_1 \\ & \xleftarrow{d_1} & \end{array}$$

est scindé par une flèche  $s_1 : X_0 \rightarrow mX_1$  telle que  $d_1 \circ s_1 = 1$ ,  $d_0 \circ s_1 \circ d_0 = d_0 \circ s_1 \circ d_1$  et  $s_0 \circ d_0 \circ s_1 = s_1 \circ d_0 \circ s_1$ .

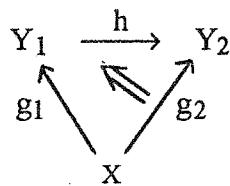
Un théorème très général permet d'affirmer que dès qu'on a une fibration exacte à gauche  $p_0$  et un foncteur quelconque exact à gauche  $F_1$  qui admet un adjoint à droite (noté ici  $U_0$ ), le produit fibré précédent vérifie une propriété universelle [2] qui permet de relever l'adjonction  $(F_1, U_0)$  au niveau de  $\tilde{F}_1$  au moyen d'un foncteur  $\tilde{U}_0$  ainsi que d'étendre la monade  $(T, \lambda, \mu)$  qui existe sur  $\text{Pt}_0(\text{Grd E})$  en une monade  $(\bar{T}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  sur  $N\text{-Grd E}$  de telle sorte que  $\tilde{U}_0 \circ T \cong \bar{T} \circ \tilde{U}_0$ ,  $\tilde{U}_0 \circ \lambda \cong \bar{\lambda} \circ \tilde{U}_0$ ,  $\tilde{U}_0 \circ \mu \cong \bar{\mu} \circ \tilde{U}_0$ . Ces conditions déterminent une loi distributive entre la monade  $(\bar{T}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  et la monade engendrée par l'adjonction  $(\tilde{U}_0, \tilde{F}_1)$  d'où une monade  $(T_1, \lambda_1, \mu_1)$  sur  $N\text{-Grd E}$  avec  $T_1 = \bar{T} \circ \tilde{U}_0 \circ \tilde{F}_0 = \tilde{U}_0 \circ T \circ \tilde{F}_0$ . De plus,  $k_0$  et  $\rho_1$  déterminent des lax morphismes de monades.

L'endofoncteur  $T_1$  de la monade sur  $N\text{-Grd E}$  associe à tout groupoïde normalisé  $(X_1, s_1)$  le groupoïde normalisé des triangles non commutatifs de  $X_1$ , dont les objets sont les morphismes de  $X_1$  et les morphismes de  $g_1$  vers  $g_2$  sont les triangles non commutatifs de la forme suivante :



Théorème 2 - La catégorie 2-Grd E des 2-groupoïdes internes à E est la catégorie des algèbres de la monade  $(T_1, \lambda_1, \mu_1)$  sur N-Grd E

Notons  $U_1 : 2\text{-Grd } E \rightarrow N\text{-Grd } E$  le foncteur d'oubli. Ce foncteur associe à tout 2-groupoïde  $X_2$  le groupoïde normalisé  $U_1 X_2$  des triangles orientés de  $X_2$ , dont les objets sont 1-morphismes et les morphismes de  $g_1$  vers  $g_2$  les triangles orientés de la forme suivante :



La composition étant donné par le "pasting" usuel.

Cette description du foncteur  $U_1$  précise en quoi ce théorème de monadicité est polyédral. De plus, la fibration réflexive  $(k_0, \rho_1)$  s'étend en tant que paire de morphismes de monades en une fibration réflexive  $((\ )_1, r_2), (\ )_1 : 2\text{-Grd } E \rightarrow \text{Grd } E$

### Le cas général

Supposons maintenant définis par récurrence jusqu'à l'ordre  $n$ , les foncteurs  $U_{k-1} : k\text{-Grd } E \rightarrow N-(k-1)\text{-Grd } E$ , de la catégorie des  $k$ -groupoïdes internes vers la catégorie des  $(k-1)$ -groupoïdes normalisés, avec leur adjoint à gauche  $F_k$ , de telle sorte que soient déterminées les commutations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} k\text{-Grd } E & \xrightarrow{U_{k-1}} & N-(k-1)\text{-Grd } E \\ (\ )_{k-1} \downarrow & & \downarrow k_{k-2} \\ (k-1)\text{-Grd } E & \xrightarrow{U_{k-2}} & N-(k-2)\text{-Grd } E \end{array}$$

On définit alors la catégorie  $N-n\text{-Grd } E$  des  $n$ -groupoïdes normalisés par le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} Pt_{n-1}(n\text{-Grd } E) & \xleftarrow{\tilde{F}_n} & N-n\text{-Grd } E \\ p_{n-1} \downarrow & & \downarrow k_{n-1} \\ n\text{-Grd } E & \xleftarrow{F_n} & N-(n-1)\text{-Grd } E \end{array}$$

où  $Pt_{n-1}$  ( $n$ -Grd E) désigne  $Pt_{0..n}$  ( $n$ -Grd E) et  $p_{n-1}$  désigne  $p_{0..n}$ . De nouveau la monade canonique  $(T, \lambda, \mu)$  sur  $Pt_{n-1}$  ( $n$ -Grd E) s'étend en une monade  $(\bar{T}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  sur  $N-n$ -Grd E et le théorème général produit une loi distributive entre  $(\bar{T}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  et la monade engendrée par l'extension  $(\tilde{U}_{n-1}, \tilde{F}_n)$  de l'adjonction  $(U_{n-1}, F_n)$ . D'où, de nouveau, une monade  $(T_n, \lambda_n, \mu_n)$  sur  $N-n$ -Grd E dont l'endofoncteur est  $T_n = \bar{T} \circ \tilde{U}_{n-1} \circ \tilde{F}_n = \tilde{U}_{n-1} \circ T \circ \tilde{F}_n$ .

**Théorème 3** - La catégorie  $(n+1)$ -Grd E des  $(n+1)$ -groupoïdes internes est la catégorie des algèbres de la monade  $(T_n, \lambda_n, \mu_n)$  sur  $N-n$ -Grd E.

### Le nerf des n-groupoïdes

Notons  $Simpl E$  et  $S-Simpl E$  respectivement la catégorie des objets simpliciaux dans E et celle des objets simpliciaux scindés. Il y a un foncteur  $U : Simpl E \rightarrow S-Simpl E$  (oubli de la dernière face) qui admet un adjoint  $F$  (oubli des scindages). Le foncteur U est monadique et le foncteur F comonadique.

Notons  $Simpl_n E$  et  $S-Simpl_n E$  respectivement la catégorie des objets simpliciaux tronqués à l'ordre  $n$  et celle des objets simpliciaux scindés tronqués à l'ordre  $n$ . Le foncteur F "se restreint" clairement en un foncteur  $F_n : S-Simpl_n E \rightarrow Simpl_n E$ . En revanche, la "restriction" du foncteur U demande l'intervention des noyaux simpliciaux pour compléter la dimension manquante,  $U_n : Simpl_n E \rightarrow S-Simpl_n E$ .

De nouveau,  $F_n$  est un adjoint à gauche de  $U_n$ , mais si  $F_n$  reste comonadique, en revanche  $U_n$  n'est plus monadique. On notera  $(\vartheta_n, l_n, m_n)$  la monade engendrée par l'adjonction  $(U_n, F_n)$  sur  $S-Simpl_n E$ .

D'où l'introduction de la notion suivante :

**Définition 1** - Une opération de Kan sur un  $n$ -objet simplicial  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) est la donnée d'une opération  $(n+1)$ -aire  $[ ] : X_n[d_0, \dots, d_{n-1}] \rightarrow X_n$  où  $X_n[d_0, \dots, d_{n-1}]$  désigne le noyau simplicial de la famille  $d_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  et représente les  $(n+1)$ -simplexes ouverts dont la dernière face manque. Cette opération satisfait les axiomes suivants :

- 1) incidences :  $d_i.[ ] = d_n.p_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ ,  $[ ].s_i = s_i.d_n$  pour  $0 \leq i \leq n-1$
- 2) unitarité :  $[ ].s_n = 1_{X_n}$
- 3) associativité :  $[ ].X_n([ ]/d_n) = [ ].p_{n+1}$  où  $X_n([ ]/d_n)$  désigne la factorisation entre les noyaux simpliciaux, déterminée par la flèche  $[ ]$ .

Autrement dit, une opération de Kan ferme, de façon cohérente, par un couvercle, les  $(n+1)$ -simplexes ouverts dont la dernière face manque.

Les morphismes entre opérations de Kan sont les morphismes simpliciaux qui respectent l'opération. On note  $\text{Kan}_n E$  la catégorie ainsi déterminée et  $w_n : \text{Kan}_n E \rightarrow \text{Simpl}_n E$  le facteur qui oublie l'opération.

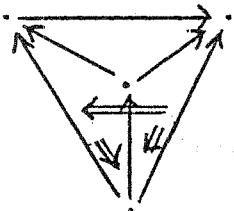
Exemple 1 - La catégorie  $\text{Kan}_1 E$  est la catégorie  $\text{Grd } E$

Théorème 4 - La catégorie  $\text{Kan}_n E$  est la catégorie des algèbres de la monade  $(\vartheta_{n-1}, l_{n-1}, m_{n-1})$  sur  $S\text{-Simpl}_{n-1} E$ .

On note  $(\Phi_{n-1}, \Psi_n)$  l'adjonction associée.

D'où un foncteur de comparaison  $t_n : \text{Simpl}_{n-1} E \rightarrow \text{Kan}_n E$

Exemple 2 : soit  $X_2$  un 2-groupoïde. Notons  $N_2 X_2$  le 2-objet simplicial dont les 0-simplexes sont les objets de  $X_2$ , les 1-simplexes les flèches de  $X_2$ , les 2-simplexes les triangles orientés précédemment définis. Ce 2-objet simplicial est canoniquement muni d'une opération de Kan. En effet, dans tout 2-groupoïde, tout triangle non commutatif de triangles orientés produit canoniquement un couvercle :



qui est très précisément déterminé par l'algèbre :  $T_1(U_1 X_2) \rightarrow U_1 X_2$ .

La construction récurrente suivante va montrer comment associer à tout  $n$ -groupoïde une opération de Kan sur un  $n$ -objet simplicial (son nerf). Il est pour cela nécessaire d'introduire la définition suivante :

Définition 2 - Une opération de Kan sur un  $n$ -objet simplicial est dite scindée lorsque le  $n$ -objet simplicial sous-jacent est scindé. Les morphismes respectent les scindages et l'opération de Kan. On note  $\text{SK}_n E$  la catégorie associée et  $\text{Sw}_n : \text{SK}_n E \rightarrow S\text{-Simpl}_n E$  le foncteur d'oubli de l'opération

Théorème 5 - La catégorie  $\text{SK}_n E$  est le sommet du produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pt}_{n-1}(\text{Kan}_n E) & \xleftarrow{\Psi_n} & \text{SK}_n E \\ \downarrow p_{n-1} & & \downarrow \\ \text{Kan}_n E & \xleftarrow{\Psi_n} & S\text{-Simpl}_{n-1} E \end{array}$$

où  $p_{n-1}$  désigne  $p_{h_{n-1}}$  avec  $h_{n-1} : \text{Kan}_n E \rightarrow S\text{-Simpl}_{n-1} E$  est le tronqué à l'ordre  $n-1$  du  $w_n$

Supposons donc défini jusqu'à l'ordre  $n-1$  un foncteur exact à gauche  $N_k : k\text{-Grd } E \rightarrow \text{Kan}_k E$  tel que :

1) les diagrammes ascendants et descendants commutent :

$$\begin{array}{ccccc}
 k\text{-Grd } E & \xrightarrow{N_k} & \text{Kan}_k E & & \\
 \downarrow \text{---} & \nearrow r_k & \downarrow h_{k-1} & \nearrow t_k & \\
 (k-1)\text{-Grd } E & \xrightarrow{N_{k-1}} & \text{Kan}_{k-1} E & \xrightarrow{w_{k-1}} & \text{Simpl}_{k-1} E
 \end{array}$$

où les pointillés représentent les adjoints à droite inverses à droite.

2) le foncteur  $N_k$  est un morphisme strict entre les comonades déterminées par les adjonctions  $(U_{k-1}, F_k)$  et  $(\Phi_{k-1}, \Psi_k)$ .

La condition 1) étend commutativement  $N_{n-1}$  en :

$$Pt_{n-1}(N_{n-1}) : Pt_{n-1}((n-1)\text{-Grd } E) \rightarrow Pt_{n-1}(\text{Kan}_{n-1} E)$$

La condition 2) détermine un  $\bar{N}_{n-2} : N\text{-(n-2)-Grd } E \rightarrow S\text{-Simpl}_{n-2} E$ . D'où par passage au produit fibré  $\bar{N}_{n-1} : N\text{-(n-1)-Grd } E \rightarrow SK_{n-1} E$ .

On montre alors que  $S w_{n-1} \cdot \bar{N}_{n-1} : N\text{-(n-1)-Grd } E \rightarrow S\text{-Simpl}_{n-1} E$  est un morphisme strict de monade, d'où par passage aux catégories d'algèbres un foncteur  $N_n : n\text{-Grd } E \rightarrow \text{Kan}_n E$ .

### Bibliographie :

- [1] F.A. Agl. and R. Steiner, Nerves of multiples categories, Proc. London Math. Soc. (3) 66 (1993) 92-128
- [2] D. Bourn, Polyhedral monadicity theorem for  $n$ -groupoids and standardized adjunctions, à paraître au J. Pure Appl. Algebra
- [3] M. Johnson, The combinatorics of  $n$ -categorical pasting, J. Pure Appl. Algebra 62 (1989) 211-225
- [4] R. Street, The algebra oriented simplexes, J. Pure Appl. Algebra 49 (1987) 283-335

# GABRIEL-ULMER DUALITY FOR CATEGORIES ENRICHED IN BICATEGORIES

R. GORDON AND A.J. POWER \*

Department of Mathematics, Temple University  
Philadelphia, PA 19122 USA

Department of Computer Science, University of Edinburgh  
Edinburgh EH9 3JZ Scotland

## §1. INTRODUCTION

In [1] we defined what it means for a biclosed bicategory  $W$  to be locally finitely presentable, and we gave a version of Gabriel-Ulmer duality for  $W$ -categories. The definitions and constructions were not made directly in terms of  $W$ -categories. Rather, with each finitely tensored  $W$ -category was associated a pseudo-functor from  $W_f$  to  $\text{Cat}$ , where  $W_f$  is the locally full subbicategory of  $W$  determined by the finitely presentable objects of each  $W(u, v)$ . Then the definitions of  $W$ -category with finite colimits and locally finitely presentable  $W$ -category were made in terms of the corresponding pseudo-functors, and the constructions of the theorem were made in terms of the pseudo-functors too.

Here, we make definitions and constructions, and prove a Gabriel-Ulmer duality result, more directly in terms of  $W$ -categories. In order to do so, we need to define cocompleteness, finite cocompleteness and filtered colimits. So we give a general account of limits and colimits in a  $W$ -category. Specifically, we define a notion of an enriched limit in a  $W$ -category, giving a simple direct generalization of the definition for one object symmetric  $W$  in Kelly's monograph [2]. We then prove that a  $W$ -category has enriched limits if and only if it has cotensors and conical limits, both defined as natural generalizations of the definitions for symmetric one object  $W$  in [2]. It is clear from Street's paper [4] that his notion of completeness for a  $W$ -category agrees with ours. A treatment of limits and colimits appears in Section 3, with the previous sections providing the supporting definitions and results.

We proceed in Section 4 to discuss finitely presentable objects in a  $W$ -category, strong generators, and density. That allows us to state and prove our main theorem, characterizing a locally finitely presentable  $W$ -category as the category of models of a finite limit theory. Finally, we deduce the full statement of Gabriel-Ulmer duality as a biequivalence of 2-categories.

---

\*Supported by ESPRIT Basic Research Action 6453: Types for Proofs and Programs

We adopt the notation of [1], which in turn largely follows that of Street's [4] with the exception that our  $W$ -Cat is his  $W^{op}$ -Cat. An expanded version of this article has been submitted to JPAA.

## §2. $W$ -CATEGORIES AND LOCALLY FINITELY PRESENTABLE BICATEGORIES

We assume throughout that  $W$  is a bicategory with the horizontal composite of  $x : u \rightarrow v$  and  $y : v \rightarrow w$  denoted by  $y \otimes x$ . We say  $W$  is *closed* if for all  $x : u \rightarrow v$  and  $y : u \rightarrow w$ , there is a universal diagram

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ x \swarrow & \Downarrow & \searrow y \\ v & \xleftarrow{y!x} & w. \end{array}$$

We call  $W$  *coclosed* if  $W^{op}$  is closed, with coclosed structure, given  $x : v \rightarrow u$  and  $y : w \rightarrow u$ , written as in

$$\begin{array}{ccc} & y \pitchfork x & \\ w \xleftarrow{y} & \Downarrow & v \\ y \searrow & \Downarrow & \swarrow x \\ & u & ; \end{array}$$

and we call  $W$  *biclosed* when  $W$  is both closed and coclosed.

**Definition 2.1.** A biclosed bicategory  $W$  is *locally finitely presentable* if for each  $u, v \in \text{Ob } W$  the category  $W(u, v)$  is locally finitely presentable, each identity arrow  $I_u$  is finitely presentable, and  $y \otimes x$  is finitely presentable whenever  $x$  and  $y$  are finitely presentable.

We denote the locally full subbicategory of  $W$  determined by the finitely presentable arrows by  $W_f$ , and we use the abbreviation lfp for the term locally finitely presentable. It is routine to verify that if  $W$  is lfp, then for all finitely presentable  $x$ ,  $x \pitchfork -$  and  $x!-$  preserve filtered colimits.

A  $W$ -category  $A$  consists of a set  $\text{Ob } A$ , a function  $e : \text{Ob } A \rightarrow \text{Ob } W$ , for each  $a, b \in A$  an arrow  $A(a, b) : ea \rightarrow eb$ , and 2-cells  $j_a : I_{ea} \rightarrow A(a, a)$  and  $\mu_{abc} : A(b, c) \otimes A(a, b) \Rightarrow A(a, c)$  subject to the evident three coherence axioms.  $W$ -functors and  $W$ -natural transformations are defined in the evident way, giving a 2-category  $W\text{-Cat}$ .

For an object  $u$  of  $W$ , we denote by  $A_u$  the category determined by those  $a$  such that  $ea = u$ , and we say that  $a$  lies over  $u$ . If  $W$  is closed, we denote by  $W^u$  the  $W$ -category for which an object over  $v$  is an arrow from  $u$  to  $v$ , and with  $W^u(x, y)$  determined by closedness of  $W$ . Then  $W^u$  is Street's  $P^u$ . When  $W$  is coclosed,  ${}^uW$  denotes the  $W^{op}$ -category  $(W^{op})^u$ . For any closed  $W$ -category  $A$  and  $a \in A_u$ , there is an evident  $W$ -functor  $A(a, -) : A \rightarrow W^u$ . A  $W$ -functor is *representable* if it is  $W$ -naturally isomorphic to such  $A(a, -)$ .

**Definition 2.2.** A  $W$ -category  $A$  has *tensors* if for any arrow  $x : u \rightarrow v$  in  $W$  and for any  $a \in A_u$ , the  $W$ -functor  $W^u(x, A(a, -)) : A \rightarrow W^u$  is representable. If  $W$  is lfp, we say  $A$  has *finite tensors* if it has tensors for all arrows  $x : u \rightarrow v$  in  $W_f$ .

§3. THE CONSTRUCTIONS  $P A$  AND  $P^\dagger A$ ,  
COMPLETENESS, AND COCOMPLETENESS

At present there seems to be no reasonable definition of a functor  $W$ -category for arbitrary  $W$ -categories  $A$  and  $B$ . However, there is a  $W$ -category  $P A$  that plays the role of  $[A^{op}, Set]$  for ordinary categories. There are a Yoneda embedding  $y : A \rightarrow P A$  and a Yoneda lemma in Street's [4]. These form a Yoneda structure in the sense of Street and Walters [5]. Here, we give mildly different but equivalent formulations of Street's  $P A$  and  $P^\dagger A$ , and we obtain a different but equivalent formulation of his definition of cocompleteness of a  $W$ -category. These equivalences are modulo changes in direction induced by the difference in our definition of  $W$ -category.

Let  $W$  be biclosed such that for all  $u, v$  in  $\text{Ob } W$ ,  $W(u, v)$  has all small limits. We say a  $W$ -category  $A$  is *small* if, up to equivalence of  $W$ -categories,  $\text{Ob } A$  is a small set. Given a small  $W$ -category  $A$ , define a  $W$ -category  $P_W A$  as follows: an object of  $P_W A$  over  $u$  is a  $W^{op}$ -functor from  $A^{op}$  to  ${}^u W$ . Given  $h : A^{op} \rightarrow {}^u W$  and  $k : A^{op} \rightarrow {}^v W$ , define  $(P_W A)(h, k)$  to be the limit in  $W(u, v)$  as  $a$  and  $a'$  range over all objects of  $A$  of the diagram

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & ha'!ka' \\ & & & & \downarrow \\ ha!ka & \longrightarrow & (A(a, a')!ha)! (A(a, a')!ka) & \longrightarrow & ha'! (A(a, a')!ka), \end{array}$$

where the left arrow is defined by the property of  $!$  and the other two are defined by functoriality of  $h$  and  $k$ . Composition in  $P_W A$  is evident.

It is routine to verify that  $P_W v$  is  $W^v$ .

Given biclosed locally complete  $W$ ,  $W^{op}$  is also biclosed and locally complete. So we can define  $P_{W^{op}}$ , taking a small  $W^{op}$ -category  $A$  to a  $W^{op}$ -category  $P_{W^{op}} A$ . Now, given a small  $W$ -category  $A$ , we define the  $W^{op}$ -category  $P^\dagger A$  to be  $P_{W^{op}}(A^{op})$ .

Henceforth, we will drop the subscript when we speak of  $P A$ , as we will only study a single  $W$  and will simply consider the  $W$ -category  $P A$  and the  $W^{op}$ -category  $P^\dagger A$ .

Dually to the above,  $P^\dagger v$  is  ${}^v W$ ; and in general,  $P^\dagger A$  and  $(P A)^{op}$  are different as they have different objects.

Call a  $W$ -functor  $f : D \rightarrow W^u$  a *weight* if  $D$  is small. Given a weight  $f : D \rightarrow W^u$  and a  $W$ -functor  $g : D \rightarrow A$ , we say  $A$  has an  $f$ -weighted limit of  $g$  if the  $W^{op}$ -functor  $(P^\dagger D)(f, A(-, g)) : A^{op} \rightarrow {}^u W$  is representable; i.e., if there exists an object  $\lim(f, g)$  of  $A$  over  $u$  and a  $W$ -natural  $\lambda : f \rightarrow A(\lim(f, g), g)$  which induces an isomorphism (necessarily  $W^{op}$ -natural in  $a$ )

$$A(a, \lim(f, g)) \cong (P^\dagger D)(f, A(a, g)).$$

A  $W$ -category is *complete* if it has all  $f$ -weighted limits of  $g$  for all  $W$ -functors  $g$  and all weights  $f$ .

Dually, a  $W$ -category  $A$  is *cocomplete* if the  $W^{op}$ -category  $A^{op}$  is complete. One must exercise a little care, as to give a weight  $f : D \rightarrow W^u$  is not the same as to give a weight  $f : D^{op} \rightarrow {}^u W$  for a weighted colimit, as  ${}^u W$  is not  $(W^u)^{op}$  in general.

It is shown in Street [4] that  $P A$  and  $(P^\dagger A)^{op}$  are cocomplete  $W$ -categories. Moreover, a reflective sub- $W$ -category of a complete  $W$ -category is complete, and of a cocomplete  $W$ -category is cocomplete.

We now define a conical limit for a  $W$ -category. For this, let  $D_0$  be an ordinary small category and let  $u$  be an object of  $W$ . Assume  $W(u, u)$  has copowers. Then one has a  $W$ -category  $D$  whose objects are the objects of  $D_0$ , and all lie over  $u$ .  $D(d, d') = D_0(d, d') \bullet I_u$ , the copower of  $D_0(d, d')$  copies of  $I_u$ . So,  $D$  is the free  $W(u, u)$ -category on  $D_0$ , and

$$[D_0, W(u, u)] \cong W\text{-Cat}(D, W^u).$$

A *conical weight* is a weight determined by such a  $D_0$  together with the constant functor at  $I_u$ .

Observe that if  $W$  is one-object symmetric, this agrees with the definition in [2]. Observe also that if  $A$  has conical limits, then each ordinary category  $A_u$  does too, and cotensoring preserves them, i.e.,  $x \pitchfork -$  preserves conical limits.

**Theorem 3.1.** *If  $W$  is biclosed and locally complete, a  $W$ -category is complete precisely when it has conical limits and cotensors. A  $W$ -functor between complete  $W$ -categories preserves limits precisely when it preserves conical limits and cotensors.*

Define a  $W$ -category  $A$  to have *filtered colimits* if it admits conical colimits for all filtered  $D_0$ . It is routine to check that if  $A$  has filtered colimits then each  $A_u$  has filtered colimits, and if  $A$  admits a tensor  $x \otimes -$ , then  $x \otimes - : A_u \rightarrow A_v$  preserves them. The converse is also true: filtered colimits in each  $A_u$  specify filtered colimits in  $A$ , and the tensor condition together with Yoneda imply the enriched universal property.

**Definition 3.2.** Call a weight  $f : D \rightarrow W^u$  *finite* if

- (1)  $\text{Ob } D$  is finite;
- (2)  $D(d, d')$  is finitely presentable for all  $d$  and  $d'$ ;
- (3)  $fd$  is finitely presentable for all  $d$ .

This definition in the symmetric one object case agrees with that of [3]. Moreover, this definition makes colimits given by finite weights with  $D = u$  exactly finite tensors as in Definition 2.1.

We say that a  $W$ -category  $A$  is *finitely complete* if  $A$  has all limits with finite weights. It is routinely verified that the proof of Theorem 3.1 may be adapted to incorporate finiteness giving

**Theorem 3.3.** *If  $W$  is lfp, a  $W$ -category has finite limits if and only if it has finite cotensors and finite conical limits. A  $W$ -functor between  $W$ -categories with finite limits preserves finite limits if and only if it preserves finite cotensors and finite conical limits.*

**Theorem 3.4.** *A  $W$ -category  $A$  with finite cotensors has (finite) conical limits exactly when each  $A_u$  has, and each  $x \pitchfork - : A_u \rightarrow A_v$  preserves, (finite) conical limits.*

**Corollary 3.5.** *A  $W$ -category is cocomplete if and only if it has finite tensors and all conical colimits.*

For pointwise small  $A$  (meaning each  $A_u$  is small), the limit in the definition of  $\text{P } A$  need not be defined. However, supposing  $A$  has finite tensors, we can define a  $W$ -category  $\text{FC}(\text{P } A)$  whose objects over  $u$  are the finite cotensor preserving  $W^{op}$ -functors from  $A^{op}$  to  ${}^u W$ , and which for many purposes can play the role of  $\text{P } A$ . Given finite cotensor preserving  $h : A^{op} \rightarrow {}^u W$  and  $k : A^{op} \rightarrow {}^v W$ , we define  $\text{FC}(\text{P } A)(h, k)$  by the limit in  $W(u, v)$  over all  $a$  and  $a'$  in  $A_u$  of (1). If  $A$  is small,  $\text{FC}(\text{P } A)$  is a full sub- $W$ -category of  $\text{P } A$ .

#### §4. LOCALLY FINITELY PRESENTABLE $W$ -CATEGORIES

Our goal in this section is to give an intrinsic definition of a locally finitely presentable  $W$ -category and to show that the Gabriel-Ulmer biequivalence of [1, Theorem 4.3] may be re-expressed directly in terms of  $W$ -categories in the usual form of  $A \mapsto A_f$ , the full sub- $W$ -category of finitely presentable objects, with inverse  $T \mapsto \text{Lex}(\text{P } T)$ , the full sub- $W$ -category of  $\text{P } T$  consisting of those  $W^{op}$ -functors that preserve finite limits. All of our results extend from “finite” to “ $\alpha$ -ary”, but we restrict to the finite case for convenience.

**Definition 4.1.** An object  $a$  of  $A$  is *finitely presentable* if  $A(a, -) : A \rightarrow W^u$  preserves filtered colimits.

Observe that  $a$  is finitely presentable precisely when  $A(a, -) : A_u \rightarrow W(u, u)$  preserves filtered colimits.

We denote the full sub- $W$ -category of  $A$  determined by the finitely presentable objects of  $A$  by  $A_f$ . Observe that  $A_f$  is closed in  $A$  under finite tensors.

**Definition 4.2.** A pointwise small full sub- $W$ -category  $G$  of a  $W$ -category  $A$  with inclusion  $j : G \rightarrow A$  is called *strongly generating* if  $G$  is closed under finite tensors in  $A$  and for any  $f : a \rightarrow b$  in  $A_u$ , if  $A(g, f) : A(g, a) \Rightarrow A(g, b)$  is an isomorphism for every  $g$  in  $G_u$ , then  $f$  is an isomorphism.

Observe that this does not exactly generalize the usual definition for symmetric one object  $W$ . The reason is size: if  $\text{Ob } W$  is large, then closing a pointwise small  $W$ -category under finite tensors may give a  $W$ -category that is not pointwise small; but we will need that fact, so we assert closure under finite tensors.

**Definition 4.3.** We shall call a  $W$ -category  $A$  *locally finitely presentable* (or lfp) when it is cocomplete and has a strong generator  $G \subset A_f$ .

**Corollary 4.4.** *If  $B$  is a full reflective sub- $W$ -category of  $\text{lfp } A$  with finitary inclusion, then  $B$  is lfp.*

**Definition 4.5.** A pointwise small full sub- $W$ -category  $G$  of  $A$ , with inclusion  $j : G \rightarrow A$ , that is closed under finite tensors in  $A$  is called *dense* if  $\tilde{j} : A \rightarrow \text{FC}(\text{P } G)$  is fully faithful.

Observe that if  $A$  is lfp and finitely complete, then a pointwise filtered colimit of finite limit preserving functors into  $A$  preserves finite limits.

**Proposition 4.6.** *For any cocomplete  $A$ ,  $A_f$  is closed under finite colimits.*

**Proposition 4.7.** *The closure under finite colimits of a pointwise small full sub- $W$ -category  $G$  that is already closed under finite tensors in a finitely cocomplete  $W$ -category  $A$  is pointwise small.*

**Theorem 4.8.** *Let  $A$  be lfp,  $G \subset A_f$  a strong generator of  $A$ , with  $z : A_f \rightarrow A$  the inclusion. Then*

- (1)  *$A_f$  is the closure of  $G$  in  $A$  under finite colimits, and  $A_f$  is pointwise small and finitely cocomplete;*
- (2) *for all  $a$  in  $A$ , the maps  $\bar{g} : g \rightarrow a$  with  $g$  in  $A_f$  express  $a$  as a filtered colimit in  $A$  of*

$$z_u d : z_u/a \rightarrow A_u \quad (ea = u),$$

*where  $d : z_u/a \rightarrow A_{fu}$  is the projection from the comma category;*

- (3) *the colimits in (2) are preserved by  $\tilde{z}$  and present  $A_f$  as a dense sub- $W$ -category of  $A$ ;*
- (4)  *$\tilde{z} : A \rightarrow \text{FC}(P A_f)$  is finitary with left adjoint  $\text{colim}(-, z)$ ;*
- (5)  *$A$  is complete;*
- (6) *the replete image of  $\tilde{z}$  is  $\text{Lex}(P A_f)$ , so  $\tilde{z}$  induces an equivalence  $A \simeq \text{Lex}(P A_f)$ .*

**Corollary 4.9.** *The following are equivalent properties of a cocomplete  $W$ -category  $A$ :*

- (1)  $A$  lfp;
- (2)  $A_f$  dense;
- (3)  $A_f$  strongly generating;
- (4)  $A$  a full reflective sub- $W$ -category of some  $\text{FC}(P T)$  with  $T$  pointwise small with finite tensors and with the inclusion  $A \rightarrow \text{FC}(P T)$  finitary. (Here, cocompleteness of  $A$  is automatic.)

**Proposition 4.10.** *If  $A$  is lfp so is  $A_u$ ; and  $A_{uf} = A_{fu}$ . Conversely, a cocomplete  $A$  is lfp if  $A_u$  is lfp for all  $u$  and  $x \vdash -$  exists and preserves filtered colimits for all finitely presentable  $x$ .*

It follows from Proposition 4.10 that our definition of locally finitely presentable  $W$ -category agrees with [1, Definition 4.2(2)], and our construction  $A \mapsto A_f$  agrees with that of [1, Theorem 4.3]. So, together with the construction  $T \mapsto \text{Lex}(P T)$  we have the biequivalence  $W\text{-Rex} \sim W\text{-Lfp}$  of [1, Theorem 4.3], between pointwise small finitely complete  $W$ -categories and locally finitely presentable categories.

#### REFERENCES

- [1]. R. Gordon and A.J. Power, *Enrichment Through Variation*, J. Pure and Applied Algebra (to appear).
- [2]. G.M. Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, J. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 64, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [3]. G.M. Kelly, *Structures Defined by Finite Limits in the Enriched Context*, 1, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle XXIII (1982), 3-42.
- [4]. R. Street, *Enriched Categories and Cohomology*, Quaestiones Math. 6 (1983), 265-283.
- [5]. R. Street and R.F.C. Walters, *Yoneda Structures on 2-categories*, J. Algebra 50 (1978), 350-379.

## Extensions de Théories de Lawvere

MONIQUE MATHIEU

Université Denis Diderot-Paris 7, U.F.R. de Mathématiques, Equipe Catégories et Structures  
Tour 45-55, 5<sup>ème</sup> étage, 2 place Jussieu, 75 251 Paris Cedex 05, FRANCE  
email : momathie@mathp7.jussieu.fr

### I Introduction

On sait depuis Lawvere que certains concepts propres aux structures algébriques ont leurs analogues en termes de « théories de Lawvere » : citons par exemple les travaux de Linton sur les théories de Lawvere commutatives, de Freyd sur le produit tensoriel de deux théories de Lawvere ou encore de Lawvere sur les théories de Lawvere affines.

Je reprends ici l'essentiel de ma thèse publiée dans Diagrammes, volume 26, qui s'inspirait de la thèse de Lawvere publiée dans les Lecture notes in Math. n° 61.

Pour aider à comprendre ce qui suit, je me propose d'en indiquer la traduction dans un cas particulier familier.

Soient  $K$  et  $K'$  deux corps commutatifs tels que  $K'$  est une extension de  $K$  de degré  $r$ .

Notons  $K\text{-Vect}$  (resp.  $K'\text{-Vect}$ ) la catégorie des  $K$ -espaces vectoriels (resp. des  $K'$ -espaces vectoriels) et  $T_K$  (resp.  $T_{K'}$ ) la théorie de Lawvere des  $K$ -espaces vectoriels (resp. des  $K'$ -espaces vectoriels).

Si  $h : K \rightarrow K'$  est l'homomorphisme de corps présentant  $K'$  comme une extension de  $K$ , nous notons :

- $H : T_K \rightarrow T_{K'}$  son prolongement aux théories de Lawvere,
- $\text{Mod}(H) : K'\text{-Vect} \rightarrow K\text{-Vect}$  le foncteur « oubli »,
- $L_H$  l'adjoint à gauche de  $\text{Mod}(H)$ .

On sait alors que pour tout  $K$ -espace vectoriel  $E$ , on peut présenter  $\text{Mod}(H)(L_H(E))$  soit comme un produit de  $r$  copies de  $E$ , soit comme une somme de  $r$  copies de  $E$ , et ceci naturellement en  $E$  ; ce que nous noterons  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong (-)^r$  et  $\text{Mod}(H) \circ L_H \cong r(-)$ .

On sait également que  $\text{Mod}(H)$  a un adjoint à droite.

On sait enfin qu'il y a deux façons d'exprimer que  $K'$  est une extension de degré  $r$  de  $K$  :

1. on considère  $K'$  comme l'ensemble des  $r$ -uplets de  $K$  sur lequel on définit une loi de composition qui lui confère une structure de corps.
2. il existe  $\alpha$  n'appartenant pas à  $K$  et vérifiant une équation polynomiale  $P$  à coefficients dans  $K$ , de degré  $r$ , tel que  $K' = K(\alpha) =$  le corps de rupture de  $P$ .

Appliqués à ce cas particulier, les résultats qui suivent démontrent que le premier point de vue est une conséquence de l'équivalence  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong (-)^r$ , alors que le second est une conséquence de l'équivalence  $\text{Mod}(H) \circ L_H \cong r(-)$ .

## II But du travail

Dans toute la suite,  $r$  est un entier naturel non nul fixé,  $T$  et  $T'$  sont deux théories de Lawvere et  $H : T \rightarrow T'$  est un homomorphisme de théories ; enfin  $\text{Mod}(T)$  et  $\text{Mod}(T')$  sont les catégories de modèles (ou algèbres) de  $T$  et de  $T'$ . Nous noterons  $T^n$  (resp.  $T'^n$ ) les objets de  $T$  (resp. de  $T'$ ) et  $(\pi_n(i) : T^n \rightarrow T)_{1 \leq i \leq n}$  (resp.  $(\pi_n(i) : T'^n \rightarrow T')_{1 \leq i \leq n}$ ) les projections canoniques dans  $T$  (resp. dans  $T'$ ).

Diagrammatiquement, en notant  $Y$  (resp.  $Y'$ ) le plongement de Yoneda de  $T^{\text{op}}$  dans  $\text{Mod}(T)$  (resp. de  $T'^{\text{op}}$  dans  $\text{Mod}(T')$ ) et  $L_H$  l'adjoint à gauche de  $\text{Mod}(H)$ , nous sommes donc dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
 & T' & & \xrightarrow{Y'} & \text{Mod}(T') \\
 \uparrow H & & \uparrow T^{\text{op}} & & \uparrow L_H \\
 & T'^{\text{op}} & & & \text{Mod}(H) \\
 & \uparrow H^{\text{op}} & & & \downarrow \\
 & T^{\text{op}} & & & \text{Mod}(T) \\
 & \xrightarrow{Y} & & &
 \end{array}$$

Nous voulons caractériser syntaxiquement les deux propriétés sémantiques :  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong (-)^r$  et  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong r(-)$ .

## III Caractérisation de la propriété $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong (-)^r$

### 1. Caractérisation sémantique.

Nous établissons le résultat suivant :

#### Proposition 1.

*Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong (-)^r$ ,
2.  $L_H$  a un adjoint à gauche  $L'$  tel que  $L' \bullet L_H \cong r(-)$ .

Sans entrer dans les détails de la démonstration, il est facile de voir que  $r Y(T^n)$  est un objet librement engendré par  $Y(T'^n)$  relativement à  $L_H$ . Comme  $Y^{\text{op}}$  est dense dans  $\text{Mod}(T)$  et  $\text{Mod}(T)$  est complète, on en déduit que tout modèle de  $T'$  engendre un modèle libre de  $T$  relativement à  $L_H$  : d'où l'existence d'un adjoint à gauche  $L'$  de  $L_H$  qui, par construction, se restreint aux théories le long des plongements de Yoneda.

### 2. Caractérisation syntaxique.

D'après ce qui précède, si  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong (-)^r$ , l'adjoint à gauche de  $L_H$  se restreint aux théories. Cette restriction est un adjoint à gauche de  $H^{\text{op}}$  et, par dualité, on obtient un adjoint à droite de  $H$ . Précisément :

#### Proposition 2.

*Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong (-)^r$ ,
2.  $H$  a un adjoint à droite  $D$  qui commute donc aux produits et qui vérifie  $D \bullet H \cong (-)^r$ ,  
( $D$  n'est donc pas un homomorphisme de théories de Lawvere si  $r > 1$ ).

Diagrammatiquement, nous avons donc :

$$\begin{array}{ccccc}
 & T' & & Mod(T') & \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ H \\ \downarrow D \end{array} & \begin{array}{c} T'^{\text{op}} \\ \uparrow \\ D^{\text{op}} \\ \downarrow \\ \vee \\ T^{\text{op}} \end{array} & \xrightarrow{Y} & \begin{array}{c} L' \\ \uparrow \\ L_H \\ \downarrow \\ \vee \\ Mod(H) \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ Mod(T') \\ \downarrow \\ Mod(T) \end{array} \\
 & & \xrightarrow{Y} & &
 \end{array}$$

### 3. Description de la catégorie de Kleisli associée à l'adjonction $(H, D)$ .

L'adjonction  $(H, D)$  entre les catégories  $T$  et  $T'$  définit une monade  $M = (M, \omega, \nu)$  sur  $T$  dont l'endofoncteur est  $M = D \bullet H \cong (-)^r$ . Soit  $KL(M)$  la catégorie de Kleisli de cette monade.

Nous noterons  $(H_M : T \rightarrow KL(M), D_M : KL(M) \rightarrow T)$  l'adjonction canonique,  $\rightarrow_{KL}$  les flèches de la catégorie de Kleisli et  $\bullet_{KL}$  sa loi de composition. Nous démontrons alors les résultats suivants :

#### Proposition 3.

*La catégorie de Kleisli  $KL(M)$  est canoniquement munie d'une structure de théorie de Lawvere, le foncteur  $D_M$  commute évidemment aux produits et on a  $D_M \bullet H_M \cong (-)^r$ . De plus, le foncteur de comparaison  $K : KL(M) \rightarrow T'$  est un isomorphisme de théories de Lawvere (tel que  $D \bullet K = D_M$  et  $K \bullet H_M = H$ ).*

Considérons  $T_r$  le graphe des  $r$ -uplets de  $T$  de flèches ayant même domaine et même codomaine. On remarque qu'une flèche  $f : T^n \rightarrow_{KL} T^m$  de  $KL(M)$  est une flèche  $f : T^n \rightarrow T^{mr}$  de  $T$ , i.e. s'identifie à un  $r$ -uplet  $(f_i : T^n \rightarrow T^m)_{1 \leq i \leq r}$ . On établit alors que :

#### Proposition 4.

*A toute monade  $M$  sur  $T$  d'endofoncteur  $(-)^r$  sont associés :*

- une structure de théorie de Lawvere sur  $T_r$ ,
- un homomorphisme de théories  $H_r : T \rightarrow T_r$ ,
- un isomorphisme  $\Delta : KL(M) \rightarrow T_r$  tel que  $\Delta \bullet H_M \cong H_r$ .

*Réciproquement, si le graphe  $T_r$  des  $r$ -uplets de  $T$  est convenablement muni d'une structure de théorie de Lawvere, alors on peut lui associer une monade  $M$  sur  $T$  telle que  $KL(M)$  est isomorphe à  $T_r$ .*

Nous avons donc établi que, si  $H : T \rightarrow T'$  est un homomorphisme de théories de Lawvere admettant pour adjoint à droite un foncteur  $D$  qui commute aux produits et qui vérifie  $D \bullet H \cong (-)^r$ , la théorie  $T'$  est isomorphe à une théorie de  $r$ -uplets de  $T$  : c'est le premier point de vue rappelé dans la section. Nous disons, dans ce cas, que le couple  $(H, T')$ , ou simplement  $T'$ , est une extension gauche de  $T$ .

Par exemple, on montre que les extensions gauches de degré  $r$  de la théorie de Lawvere  $T_{\text{ens}}$  de Ens sont exactement les théories de Lawvere des systèmes associatifs de  $r-1$  semi-groupes étudiés par L. Coppey dans [1].

## IV Caractérisation de la propriété $Mod(H) \bullet L_H \cong r(-)$

### 1. Caractérisation sémantique.

Nous établissons le résultat suivant :

**Proposition 5.**

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong r(-)$ ,
2.  $\text{Mod}(H)$  a un adjoint à droite  $R$  tel que  $H \bullet R \cong (-)^r$ ,

Ici, l'existence d'un adjoint à droite de  $\text{Mod}(H)$  est une conséquence d'un résultat plus général dû à Diers (voir [2] (1976)) et Lair (voir [3] (1979)).

**2. Caractérisation syntaxique.**

Il est facile de voir que, dans ce cas, c'est le foncteur  $\text{Mod}(H)$  qui se restreint aux théories le long des plongements de Yoneda. Cette restriction est un adjoint à droite de  $H^{\text{op}}$  qui, par dualité, fournit un adjoint à gauche de  $H$ . Précisément :

**Proposition 6.**

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\text{Mod}(H) \bullet L_H \cong r(-)$ ,
2.  $H$  a un adjoint à gauche  $G$  qui commute aux produits et qui vérifie  $G \bullet H \cong (-)^r$ ,  
( $G$  n'est donc pas un homomorphisme de théories de Lawvere si  $r > 1$ ).

Diagrammatiquement, nous avons donc :

$$\begin{array}{ccccc}
 & T' & & \xrightarrow{Y'} & \text{Mod}(T') \\
 G \downarrow & \uparrow H & & & \uparrow L_H \\
 T & & & & \uparrow \text{Mod}(H) \\
 & \text{Mod}(T) & & & \uparrow R \\
 & \xrightarrow{Y} & & & \\
 & T'^{\text{op}} & \xleftarrow{\Delta} & \text{Mod}(T') & \\
 & \uparrow H^{\text{op}} & & \uparrow \text{Mod}(H) & \\
 & G^{\text{op}} & & \uparrow L_H & \\
 & \downarrow \psi & & \uparrow \text{Mod}(H) & \\
 & T^{\text{op}} & & \uparrow \text{Mod}(T) &
 \end{array}$$

**3. Description de la catégorie de Kleisli associée à l'adjonction  $(G, H)$ .**

L'adjonction  $(G, H)$  entre les catégories  $T$  et  $T'$  définit cette fois une co-monade  $M' = (M', \omega', \nu')$  sur  $T$  dont l'endofoncteur est  $M' = G \bullet H \cong (-)^r$ . Soit  $KL(M')$  la catégorie de Kleisli de cette co-monade. Nous utiliserons des notations analogues à celles de la section III.

**Proposition 7.**

La catégorie de Kleisli  $KL(M')$  est canoniquement munie d'une structure de théorie de Lawvere, le foncteur  $G_{M'}$  commute aux produits et on a  $G_{M'} \bullet H_{M'} \cong (-)^r$ . De plus, le foncteur de comparaison  $K : KL(M') \rightarrow T'$  est un isomorphisme de théories de Lawvere (tel que  $D \bullet K = D_{M'}$  et  $K \bullet H_{M'} = H$ ).

On observe ici que les projections canoniques  $(\pi_r(i) : T^r \rightarrow T)_{1 \leq i \leq r}$  constituent une famille de flèches « unaires »  $(\alpha_i : T \rightarrow_{KL} T)_{1 \leq i \leq r}$  dans  $KL(M')$ . On note  $[\alpha] = [\alpha_j]_{1 \leq j \leq r} = \text{Id}(T^r) : T^r \rightarrow_{KL} T^r$ , et on démontre :

### **Proposition 8.**

*La théorie de Lawvere  $KL(M')$  est la plus petite théorie de Lawvere engendrée par  $T$  et la famille  $\alpha$  de flèches unaires vérifiant les équations suivantes :*

$$(e_1) \quad H_{M'}(v_T) \circ_{KL} [\alpha] = ([\alpha])^r \circ_{KL} [\alpha],$$

$$(e_2) \quad H_{M'}(\omega'_T) \circ_{KL} [\alpha] = H_{M'}(\text{Id}_T).$$

Nous avons donc établi que, si  $H : T \rightarrow T'$  est un homomorphisme de théories de Lawvere admettant pour adjoint à gauche un foncteur  $G$  qui commute aux produits et qui vérifie  $G \circ H \cong (-)^r$ , la théorie  $T'$  est isomorphe à une théorie que l'on peut considérer comme étant une théorie de rupture des équations  $(e_1)$  et  $(e_2)$  : c'est le second point de vue rappelé dans la section I. Nous disons, dans ce cas, que le couple  $(H, T')$ , ou simplement  $T'$ , est *une extension droite de  $T$* .

Par exemple, on montre que les seules extensions droites de degré 2 de  $T_{\text{Ens}}$  sont les théories des  $M_i$ -ensembles où  $M_i$ ,  $i = 1, 2$ , est le monoïde à deux éléments  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que :

$$\alpha_1 \alpha_j = \alpha_j \alpha_1 = \alpha_j, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq 2,$$

$$\alpha_2 \alpha_2 = \alpha_1, \text{ si } i = 1,$$

$$\alpha_2 \alpha_2 = \alpha_2, \text{ si } i = 2.$$

## **V Monadicité des extensions de théories de Lawvere**

Signalons tout d'abord une propriété des monades et co-monades que nous considérons.

### **Proposition 9.**

*Soit  $T$  une théorie de Lawvere. Une monade  $M = (M = (-)^r, \omega, v)$  (resp. une co-monade  $M' = (M = (-)^r, \omega', v')$ ) est complètement déterminée par les seules données de  $\omega_T$  et de  $v_T$  (resp. de  $\omega'_T$  et de  $v'_T$ ).*

Ainsi on peut dire que ces monades (resp. co-monades) sont « esquissables » : soit  $E$  (resp.  $E'$ ) leur « esquisse » (ce n'est donc rien d'autre que le premier cran de la monade (resp. de la co-monade)).

Considérons alors ThéoL la catégorie de toutes les théories de Lawvere, ThéoExt la catégorie dont les objets sont les couples  $(T, T')$  où  $T$  est une théorie de Lawvere et  $T'$  en est une extension gauche (par exemple). et appelons  $\mathcal{U}$  le foncteur oubli de ThéoExt dans ThéoL :  $\mathcal{U}$  a un adjoint à gauche.

En effet, si  $T \in \text{ThéoL}$  on peut faire le produit tensoriel d'esquisses de  $T$  avec  $E$ . On obtient une esquisse  $T \otimes E$  qui engendre une théorie de Lawvere : soit  $T_E$  cette théorie. Par construction,  $T_E$  est munie d'une monade d'endofoncteur  $(-)^r$ , c'est donc un élément de ThéoExt et il est facile de voir que c'est la théorie librement engendrée par  $T$  relativement à  $\mathcal{U}$ , d'où l'existence d'un adjoint à gauche de  $\mathcal{U}$ . Cette adjonction définit une monade sur ThéoL que nous noterons  $\mathcal{M}$ .

### **Proposition 10.**

*Le foncteur  $\mathcal{U}$  est monadique, i.e. la catégorie ThéoExt des couples de théories de Lawvere  $(T, T')$  où  $T'$  est une extension gauche de  $T$  est équivalente à la catégorie des algèbres de  $\mathcal{M}$ .*

On montre de la même façon que la catégorie dont les objets sont les couples  $(T, T')$  où  $T$  est une théorie de Lawvere et  $T'$  en est une extension droite est équivalente à la catégorie des algèbres d'une certaine monade de ThéoL.

## Bibliographie

- [1] L. Coppey                      Décomposition dans les catégories,  
    Multigraphié, Paris [1977].
- [2] Y. Diers                        Type de densité d'une sous-catégorie pleine,  
    Ann. Soc. Sci. Bruxelles 90 [1976].
- [3] C. Lair                        Conditions syntaxiques d'existence de co-adjoints aux foncteurs  
    algébriques,  
    Diagrammes, Volume 1, Paris [1979]
- [4] F.W. Lawvere                 Some algebraic problems in the context of functorial semantic of  
    algebraic theories,  
    Lecture Notes in Math. 61, Springer [1966].
- [5] M. Mathieu                    Extensions de Théories de Lawvere,  
    Diagrammes, Volume 26, Paris [1991].

# Finitary Sketches and $\sigma$ -Coherent Theories

P.T. Johnstone

Department of Pure Mathematics, University of Cambridge

In his lecture at the European Colloquium of Category Theory in July 1994 (cf. [7]), Jiří Rosický investigated the question of which categories can occur as the category of (set-valued) models of a finitary sketch (that is, a sketch in which all distinguished cones and cocones are finite). He observed that this class is strictly larger than the class of model categories of (finitary) coherent theories, although it is contained in the class of model categories of all geometric theories (the latter correspond exactly to ‘geometric sketches’, that is sketches in which all distinguished cones are finite, though the cocones may be arbitrary).

There is a known characterization of a class of ‘coherent’ sketches having exactly the same expressive power as the class of coherent theories: they are the sketches in which all cones are finite, and all cocones are either finite and discrete or ‘regular epi specifications’ (see [5], page 42). However, finding a class of theories which have the same expressive power as finitary sketches has appeared to be a harder problem. In [7], Rosický and Adámek provide one possible answer, which they call the class of *basic transitive-hull theories*; however, the description of this class is somewhat cumbersome. The main purpose of this note is to show that there is a much simpler answer; moreover, it is not at all hard to prove, and it has in principle been known for over twenty years (specifically, since the publication of [2]). Before this, however, we shall give a rather simpler example than Rosický’s of a finitarily sketchable category which cannot be the category of models of any (finitary) first-order theory.

It is well known that the class of models of any finitary theory is closed under ultraproducts (Łoś’s Theorem, see [1], Proposition 5.18); but this does not yield an abstract categorical property of the category of models of such a theory, since ultraproducts cannot be characterized by a universal property. (Thus the knowledge that a category of structures for a particular first-order language is not closed under ultraproducts shows that it cannot be axiomatized by finitary formulae in that language, but leaves open the possibility that it might be so axiomatizable in a different language.) However, the following simple observation enables us to obtain an abstract categorical criterion.

**Lemma 1** *Let  $(A_i \mid i \in I)$  be a family of first-order structures of a given type, and  $\mathcal{U}$  an ultrafilter on the set  $I$ . Then the ultraproduct  $\prod_{\mathcal{U}} \text{Aut}(A_i)$  of the automorphism groups of the  $A_i$  embeds as a subgroup of the automorphism group of the ultraproduct  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ .*

**Proof** Clearly, a family  $(\alpha_i \mid i \in I)$  of automorphisms of the  $A_i$  induces an automorphism of the product  $\prod_{i \in I} A_i$ ; and any such automorphism will respect the equivalence relation by which this product has to be factored to obtain the ultraproduct  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ , and so induce an automorphism of this ultraproduct. Moreover, two families  $(\alpha_i \mid i \in I)$  and  $(\beta_i \mid i \in I)$  will induce the same automorphism of the ultraproduct iff the set  $\{i \in I \mid \alpha_i = \beta_i\}$  belongs to the ultrafilter  $\mathcal{U}$ .  $\square$

Thus, given a category  $\mathcal{C}$ , if we can find a property  $P$  of groups which is satisfied by the automorphism groups of all objects of  $\mathcal{C}$  and inherited by subgroups, together with a family  $(A_i \mid i \in I)$  of objects of  $\mathcal{C}$  and an ultrafilter  $\mathcal{U}$  on  $I$  such that  $\prod_{\mathcal{U}} \text{Aut}(A_i)$  does not have property  $P$ , then  $\mathcal{C}$  cannot be the category of models of any first-order theory. For example, we have

**Corollary 2** *Let  $\mathcal{C}$  be the category of connected  $\mathbb{Z}$ -sets: that is, pairs  $(A, s)$  where  $A$  is a set and  $s$  is a permutation of  $A$  such that the coequalizer of  $s$  and the identity is a singleton. Then  $\mathcal{C}$  is finitarily sketchable, but is not the category of models of any finitary first-order theory.*

**Proof** It is trivial to construct a finitary (indeed, finite) sketch for  $\mathcal{C}$ . However, the objects of  $\mathcal{C}$  are (up to isomorphism) just the integers  $\mathbb{Z}$  (with  $s(n) = n+1$ ) and the finite cyclic  $\mathbb{Z}$ -sets  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ; so it is easy to see that every automorphism group in  $\mathcal{C}$  is either finite or torsion-free. However, if we take any nontrivial ultraproduct of (the automorphism groups of) the finite cyclic  $\mathbb{Z}$ -sets of even length, we shall obtain an infinite group containing an element of order 2.  $\square$

The method of Lemma 1 can also be applied to endomorphism monoids, instead of automorphism groups; one reason for preferring groups is that it bypasses any argument about whether the morphisms in a category of models should be taken to be homomorphisms or elementary embeddings. However, it does not work in all cases where one might wish to use it. For example, the category of connected graphs seems unlikely to be axiomatizable by any finitary theory; but the full permutation group on any set can occur as the automorphism group of a connected graph (for example, a complete graph), so any group can occur as a subgroup of such a group.

Another interesting example of a category where the method does work is the category of finite sets and surjections. It has been known since 1976 that this is the category of models of a geometric theory ([3]; see also [4], Theorem 4.11). In fact it can be axiomatized as follows: take a signature with one sort and one  $n$ -ary relation symbol  $R_n$  for each  $n \geq 0$ , together with the following axioms:

$$(R_n(x_1, \dots, x_n) \vdash_{x_1, \dots, x_n, y} \bigvee_{i=1}^n (y = x_i))$$

for all  $n \geq 0$  (including the sequent  $(R_0 \vdash_y \perp)$ , which says that if  $R_0$  holds then the underlying set of the structure must be empty),

$$(R_n(x_1, \dots, x_n) \vdash_{x_1, \dots, x_n} R_m(x_{f1}, \dots, x_{fm}))$$

whenever  $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  is a surjection,

$$(R_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_n) \vdash_{x_1, \dots, x_n} R_n(x_1, \dots, x_n))$$

for each  $n \geq 1$ , and finally

$$(\top \vdash \bigvee_{n \geq 0} (\exists x_1, \dots, x_n) R_n(x_1, \dots, x_n)).$$

In this case we may simply take the group-theoretic property  $P$  to be that of finiteness. The theory presented above is not a basic transitive-hull theory in the sense of [7], and it is not at all clear at first sight whether it is sketchable by a finitary sketch. Nevertheless, it will follow from our main result, on whose proof we now embark, that it is so sketchable.

We shall call a geometric theory  $\sigma$ -coherent if (like the theory presented above) its axioms involve only (finite or) countable disjunctions. We shall also use the

term  $\sigma$ -pretopos for a pretopos with countable coproducts which are disjoint and pullback-stable; clearly,  $\sigma$ -pretoposes are the appropriate class of categories in which to study models of  $\sigma$ -coherent theories. The basic transitive-hull theories introduced in [7] are  $\sigma$ -coherent; so from that paper one may extract a proof of

**Proposition 3** *For any finitary sketch  $S$ , there exists a  $\sigma$ -coherent theory  $T$  such that, for any  $\sigma$ -pretopos  $C$ , we have an equivalence between the categories of  $S$ -models and of  $T$ -models in  $C$ .*  $\square$

Our aim is to show that the converse of Proposition 3 is true; but we shall have to restrict our attention to models not in arbitrary  $\sigma$ -pretoposes but in those toposes which have countable coproducts (and are therefore  $\sigma$ -pretoposes). However, since this class of categories includes all Grothendieck toposes, it seems large enough for practical purposes.

Given a  $\sigma$ -coherent theory  $T$ , we first construct its syntactic category  $C_T$ , and then enlarge this to a  $\sigma$ -pretopos  $P_T$  by freely adjoining first countable disjoint unions and then quotients by equivalence relations. This is the case  $\kappa = \omega_1$  of the construction described in section 8.4 of [6], from which we deduce

**Proposition 4** *For any  $\sigma$ -coherent theory  $T$  and any  $\sigma$ -pretopos  $C$ , there is an equivalence of categories*

$$T\text{-Mod}(C) \simeq \sigma\text{-PreTop}(P_T, C)$$

where the right-hand side denotes the category of  $\sigma$ -pretopos morphisms  $P_T \rightarrow C$  (that is, functors preserving finite limits, images and countable disjoint unions) and natural transformations between them.  $\square$

So we are reduced to proving

**Proposition 5** *For any small  $\sigma$ -pretopos  $P$ , there is a finitary sketch whose models in countably cocomplete toposes correspond to  $\sigma$ -pretopos morphisms defined on  $P$ .*

**Proof** Consider the countable copower  $N = \coprod_{n \in \mathbb{N}} 1$  of the terminal object of  $P$ . As in any category with countable coproducts,  $N$  comes equipped with morphisms  $o: 1 \rightarrow N$  and  $s: N \rightarrow N$  making it into a natural number object in the sense of Lawvere; hence it is also a natural number object in the sense of Freyd [2], i.e. the diagram

$$1 \xrightarrow{o} N \leftarrow s N$$

is a coproduct and

$$\begin{array}{ccccc} & & s & & \\ & N & \rightrightarrows & N & \longrightarrow 1 \\ & & 1 & & \end{array}$$

is a coequalizer. Thus if  $T: P \rightarrow \mathcal{E}$  is a functor from  $P$  to a topos which preserves the terminal object and these two colimit diagrams, then  $T(N)$  is a natural number object in the sense of Freyd, and hence also in the sense of Lawvere, in  $\mathcal{E}$ . Even in a topos, a natural number object need not be a countable copower of 1; but if the latter exists, then it must coincide with the natural number object. Hence any such functor to a countably cocomplete topos must preserve the countable copower of 1.

Now let  $(A_n \mid n \in \mathbb{N})$  be an arbitrary countable family of objects of  $P$ . Then the coproduct  $A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n$  is characterized up to isomorphism by the existence

of morphisms  $\nu_n: A_n \rightarrow A$  and  $\rho: A \rightarrow N$  making

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{\nu_n} & A \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ 1 & \xrightarrow{\nu_n} & N \end{array}$$

a pullback square for each  $n$ ; so if our functor  $T$  also preserves pullbacks, it will preserve all the above squares, and hence preserve arbitrary countable coproducts. Thus we obtain our desired finitary sketch  $\mathbb{S}$  by taking its underlying category to be  $\mathcal{P}$  itself, with all finite limit diagrams as distinguished cones, and the distinguished cocones consisting of all coequalizers of equivalence relations in  $\mathcal{P}$  (these, in conjunction with the finite limits, will ensure that models of  $\mathbb{S}$  preserve images), plus the two particular colimit diagrams displayed above. (Alternatively, we could simply take the distinguished cocones to be all finite colimit diagrams in  $\mathcal{P}$ ; it is not hard to verify that a  $\sigma$ -pretopos morphism preserves the construction of transitive hulls of relations, and hence preserves all finite colimits.)  $\square$

We conclude by remarking that if  $\mathbb{S}$  is any sketch involving finite distinguished cones and countable cocones, then the standard construction of a geometric theory having ‘the same models’ as  $\mathbb{S}$  yields one which is  $\sigma$ -coherent; so Proposition 5 implies that such sketches have no more expressive power, at least where models in countably cocomplete toposes are concerned, than finitary sketches.

## References

- [1] J. Adámek and J. Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories*, L.M.S. Lecture Note Series no. 189, Cambridge University Press (1994).
- [2] P. Freyd, Aspects of topoi, *Bull. Austral. Math. Soc.* 7 (1972), 1–76.
- [3] P.T. Johnstone, Kuratowski-finiteness as a geometric theory, Talk at Isle of Thorns category meeting (1976).
- [4] P.T. Johnstone and G.C. Wraith, Algebraic theories in toposes, in *Indexed Categories and their Applications* (ed. P.T. Johnstone and R. Paré), Lecture Notes in Math. vol. 661, Springer-Verlag (1978), 141–242.
- [5] M. Makkai and R. Paré, *Accessible Categories: the Foundations of Categorical Model Theory*, Contemp. Math. vol. 104, American Math. Soc. (1989).
- [6] M. Makkai and G.E. Reyes, *First Order Categorical Logic*, Lecture Notes in Math. vol. 611, Springer-Verlag (1977).
- [7] J. Rosický and J. Adámek, Finitary sketches, preprint (1994).

# Les esquisses en topologie algébrique?

Tim Porter  
School of Mathematics,  
University of Wales Bangor,  
Dean Street, Bangor, Gwynedd, LL57 1UT  
Pays de Galles.

Enumérons quelques problèmes de base en topologie algébrique :

**PROBLÈME 1 :** Construire des "modèles algébriques" des espaces topologiques ( ou habituellement des CW-complexes) qui codent une partie de la structure 'géométrique à une homotopie près' de ces espaces de manière plus ou moins exacte.

[ On peut dire : construire une catégorie de 'modèles algébriques' *ModAlg* et un foncteur

$$F : Espaces \rightarrow ModAlg$$

tels que si  $f \simeq g$ ,  $F(f) = F(g)$ .]

**PROBLÈME 2 :** Étudier ces modèles algébriques et le foncteur  $F$  :

- a) Le foncteur  $F$  a-t-il un adjoint à droite - un foncteur "espace classifiant",  $B$ ?
- b) Existe-t-il un produit tensoriel  $\otimes$  dans *ModAlg* tel que

$$F(X \times Y) \cong F(X) \otimes F(Y)?$$

c) Comment peut-on faire des "calculs" dans *ModAlg*?

Par exemple: peut-on décrire  $F(S^1)$ , où  $S^1$  est le cercle, ou  $F(X)$ ,  $X$  étant construit par recollage de parties plus simples?

**PROBLÈME 3 :** Si un tel foncteur  $B$  existe, il y a:

- a) le problème d'identification des espaces  $X$  tels qu'il existe  $C \in ModAlg$  et  $X \simeq BC$ .
- b) l'étude de la "géométrie" des espaces  $BC$ . Souvent l'espace classifiant  $BC$  classifie quelque chose !
- c) le problème de l'interprétation des morphismes

$$f : X \rightarrow BC.$$

Souvent une structure sur  $BC$  induit une structure sur  $X$ , et donc les morphismes de  $X$  en  $BC$  classifient les " $C$ -structures" sur  $X$ .

(On espère toujours que si on comprend :

- (i) la structure algébrique des "algèbres"  $C$ ;
- (ii) la structure "géométrique" des espaces  $BC$ ;
- (iii) les unités et co-unités

$$X \rightarrow BFX \quad FBC \rightarrow C,$$

on va “deviner” la structure géométrique de  $X$ .)

### Étude d'un exemple “bête et simple”.

Si  $X$  est un espace pointé (par  $x_0 \in X$ ), on pose :  $F(X) = \pi_1(X)$  = groupe fondamental de  $X$ .

On a donc ici :  $ModAlg = Groupes$

Il y a trois aspects “géométriques” :

- (i) la correspondance de Galois - Poincaré entre les sous-groupes de  $\pi_1(X)$  et les revêtements de  $X$ ;
- (ii)  $BG$  existe et classifie les  $G$ -torseurs;
- (iii)  $\pi_1(X)$  est l'ensemble des composantes connexes de l'espace  $\Omega X$  de lacets de  $X$ . (Un lacet est une application continue

$$\omega : [0, 1] \rightarrow X$$

telle que  $\omega(0) = \omega(1) = x_0$ .)

Nous allons voir que cet espace  $\Omega X$  n'est pas un groupe, mais un ‘groupe à une homotopie près’.

Si  $G$  est un groupe, la multiplication

$$G \times G \rightarrow G$$

est associative. En particulier, soit

$$\lambda_n : G^n \rightarrow G$$

l'application

$$\lambda_n(g_1, \dots, g_n) = g_1 \dots g_n.$$

Il y a un diagramme *commutatif* indexé par les entiers  $n \geq 0$  et tel que  $G^n$  correspond à  $n$ , et si  $m = r_1 + \dots + r_n$ , il y a une application

$$\lambda_{r_1} \times \dots \times \lambda_{r_n} : G^m \rightarrow G^n.$$

L'espace de lacets  $\Omega X$  est muni d'une multiplication naturelle

$$\lambda_2 : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$$

définie par

$$\lambda_2(\omega_1, \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Soit

$$\lambda_n : (\Omega X)^n \rightarrow \Omega X$$

$$\lambda_n(\omega_1, \dots, \omega_n)(t) = \omega_1(nt - i + 1), \text{ si } t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \subset [0, 1], i = 1, \dots, n.$$

Si  $m = r_1 + \dots + r_n$ , l'application

$$\lambda_{r_1} \times \dots \times \lambda_{r_n} : (\Omega X)^m \rightarrow (\Omega X)^n$$

est continue, mais le diagramme qui en résulte est *homotopiquement cohérent*, et non pas commutatif.

En général, les modèles algébriques ne sont pas strictement "algébriques". Leurs théories sont à plusieurs sortes, d'où l'intérêt possible d'utiliser les esquisses.

**PROBLÈME 4 :** Étudier les structures "algébriques à une homotopie cohérente près", par exemple, cette structure sur  $\Omega X$ .

(Problème très difficile: voir des articles de

MAY, [9], STASHEFF [12], SEGAL [11] pour les structures de groupe et de monoïde, BOARDMAN et VOGT [2] pour les structures à plusieurs sortes.)

### n-types

$\pi_1(X)$  code le *1-type* de  $X$ . (Si  $X$  est un CW-complexe et  $X^2$  est son 2-squelette,

$$\pi_1(X^2) \cong \pi_1(X).$$

ainsi  $\pi_1(x)$  ne dépend pas des dimensions supérieures.)

**PROBLÈME 5 :** (J.H.C.Whitehead, 1950, [13])

a) Trouver des "algèbres" qui codent les n-types,  $n \geq 2$ , de manière exacte:

$$F_n : CW \rightarrow ModAlg$$

$$f \simeq g \Rightarrow F_n(f) = F_n(g),$$

$$F_n(X^{n+1}) \cong F_n(X);$$

et de plus

$$F_n(X) \cong F_n(Y) \Rightarrow X^{n+1} \cong Y^{n+1}.$$

b) Analyser comment on peut lier  $F_n$  et  $F_{n+1}$ .

### Les modules croisés

Dans le cas  $n = 2$ , MacLane et Whitehead (1950) , [8], ont trouvé un modèle exact, les modules croisés, cf. Brown and Spencer, [3] ).

Un module croisé (à gauche) est un triplet  $(C, P, \mu)$ , où  $C$  et  $P$  sont des groupes avec une action (à gauche) de  $P$  sur  $C$ , notée  $(p, c) \mapsto {}^p c$ , et  $\mu$  est un homomorphisme de groupes, tels que

$$MC1) \quad \mu({}^p c) = p\mu(c)p^{-1} \quad c \in C, p \in P;$$

$$MC2) \quad {}^{\mu c} c' = cc'c^{-1} \quad c, c' \in C.$$

**Exemples :**

1. Si  $N \triangleleft G$ ,  $i : N \hookrightarrow G$  est un module croisé.
2. Si  $M$  est un  $G$ -module (à gauche) et  $0 : M \rightarrow G$  envoie chaque élément sur  $e_G$ ,  $(M, G, 0)$  est un module croisé.
3. Si  $G$  est un groupe et  $Aut(G)$  son groupe d'automorphismes, il y a une action évidente de  $Aut(G)$  sur  $G$ . Soit

$$i : G \rightarrow Aut(G)$$

l'homomorphisme de conjugaison intérieure, qui envoie  $g$  vers  $i_g$  où

$$i_g(g_1) = gg_1g^{-1}.$$

Alors  $(G, Aut(G), i)$  est un module croisé.

4. Soit  $p : E \rightarrow B$  un espace fibré pointé et  $i : F \rightarrow E$  l'inclusion de la fibre  $F = p^{-1}(b_0)$ .

$$\pi_1(i) : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E)$$

est un module croisé.

Il y a deux autres structures équivalentes à celle de module croisé.

Soit  $(G, s, b)$  un système où  $G$  est un groupe et  $s, b : G \rightarrow G$  sont des homomorphismes, tels que

$$s^2 = s \quad sb = b \quad bs = b \quad b^2 = b$$

et  $[Kers, Kerb] = 1$ ; on dit que  $(G, s, b)$  est un cat<sup>1</sup>-groupe, cf. Loday, [7].

Un tel système équivaut à une catégorie interne à *Groupes*. Soit  $O = Ims = Imb$ ,

$$G \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\[-1ex] \xleftarrow[b]{incl} \end{array} O$$

est le graphe sous-jacent à une catégorie interne, [3].

Les 2-types sont classifiés par les modules croisés, mais ...

**PROBLÈME 6 :** (i) Comment classifier les modules croisés?

(ii) Développer la théorie des modules croisés ( peut-être en parallèle à la théorie des groupes

- automorphismes;
- permutations;
- représentations.)

Pour classifier les modules croisés, il faut les "calculer", mais comment faire? A Bangor on espère utiliser les systèmes comme AXIOM, GAP, MAGMA, mais il faut comprendre les types de données correspondant à ces structures "algébriques". Ici encore, faut-il utiliser les esquisses pour la spécification de ces objets?

**PROBLÈME 7 :** On a vu que  $\Omega X$  est un modèle h.c. de l'esquisse des groupes. Est-ce que

$$\Omega F \rightarrow \Omega E$$

est un modèle h.c. de l'esquisse des modules croisés? [Un résultat de Friedlander, [6], indique peut-être l'analogue h.c. de MC1)] Mais bien sûr, il faut donner un sens plus précis à l'expression "modèle homotopiquement cohérent". Pour les esquisses projectives, l'idée serait:

- le graphe de  $S$  est envoyé sur un diagramme homotopiquement cohérent (cf. Cordier, [4]);
- les cônes sont envoyés sur les cônes h.c. des limites homotopiques (cf. Bourn-Cordier, [1]).

Pour modeler les n-types pour  $n > 2$ , on a besoin de structures plus compliquées. Les structures suivantes sont équivalentes:

- cat<sup>n-1</sup>-groupes (Loday, [7]);

- ( $n - 1$ )-uple catégories internes à *Groupes*;
- ( $n - 1$ )-cubes croisés (Ellis - Steiner, [5]).

Soit  $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$ .

Un *n-cube croisé en groupes* est la donnée:

- pour chaque  $A \subseteq \langle n \rangle$  d'un groupe  $M_A$ ;
- pour chaque  $A \subseteq \langle n \rangle$  et  $i \in \langle n \rangle$ , d'un morphisme

$$\mu_i : M_A \rightarrow M_{A-\{i\}};$$

et

- pour chaque  $A, B \subseteq \langle n \rangle$ , d'une application

$$h : M_A \times M_B \rightarrow M_{A \cup B},$$

(si  $A \subseteq B$ , on écrit  ${}^a b = h(a, b)b$ ,  $a \in M_A$ ,  $b \in M_B$ )

qui satisfont aux axiomes suivants : ( où  $a, a' \in M_A$ ,  $b, b' \in M_B$ ,  $c \in M_C$ )

1.  $\mu_i a = a$  si  $i \notin A$ ;
2.  $\mu_i \mu_j a = \mu_j \mu_i a$ ;
3.  $\mu_i h(a, b) = h(\mu_i a, \mu_i b)$ ;
4.  $h(a, b) = h(\mu_i a, b) = h(a, \mu_i b)$  si  $i \in A \cap B$ ;
5.  $h(a, a') = [a, a']$ ;
6.  $h(a, b) = h(b, a)^{-1}$ ;
7.  $h(a, b) = 1$  si  $a = 1$  ou  $b = 1$ ;
8.  $h(aa', b) = {}^a h(a', b)h(a, b)$ ;
9.  $h(a, bb') = h(a, b){}^b h(a, b')$ ;
10.  ${}^a h(h(a^{-1}, b), c) {}^c h(h(c^{-1}, a), b) {}^b h(h(b^{-1}, c), a) = 1$ ;
11.  ${}^a h(b, c) = h({}^a b, {}^a c)$  si  $A \subseteq B \cap C$ .

Ces axiomes sont une version abstraite des règles de calcul des commutateurs dans les groupes

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1},$$

(cf. Porter, [10]).

Comment faire des calculs avec de tels objets? Quels types d'algorithmes peut-on utiliser? Est-ce qu'il y a des versions "globales" de Todd-Coxeter ou est-ce qu'il faut toujours utiliser des calculs dans les différents groupes  $M_A$ , utilisant la structure globale pour "l'intégration" de cette information "locale"? Peut-être faut-il utiliser les esquisses pour "contrôler" le passage de l'aspect "local" à l'aspect "global"?

## Références

- [1] D. Bourn et J.-M. Cordier, A general formulation of homotopy limits, *J. Pure Appl. Algebra*, 29 (1983), 129 - 141.
- [2] J. M. Boardman et R. M. Vogt, Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, LNM 347, Springer 1973.
- [3] R. Brown et C. B. Spencer, G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet.* 79 (1976), 296 - 302.
- [4] J.- M. Cordier, Sur la notion de diagramme homotopiquement cohérent, *Proc. 3ème Colloque sur les Catégories*, Amiens (1980), *Cahiers Top. Géom. Diff.*, 23 (1982), 93 - 112.
- [5] G. J. Ellis et R. Steiner, Higher dimensional crossed modules and the homotopy groups of  $(n+1)$ -ads, *J. Pure Appl. Algebra*, 46 (1987), 117 - 136.
- [6] E. M. Friedlander, The Étale homotopy theory of a Geometric Fibration, *manuscripta math.*, 10 (1973), 209 - 244.
- [7] J.-L. Loday, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *J. Pure Appl. Algebra*, 24 (1982), 179 - 202.
- [8] S. Mac Lane et J. H. C. Whitehead, On the 3-type of a complex, *Proc. Nat. Acad. Sciences, U.S.A.*, 36 (1950), 41 - 48.
- [9] J. P. May, The geometry of Iterated Loop Spaces, LNM 271, Springer 1972.
- [10] T. Porter, n-types of simplicial groups and crossed n-cubes, *Topology*, 32 (1993), 5 - 24.
- [11] G. Segal, Categories and cohomology theories, *Topology*, 13 (1974), 293 - 312.
- [12] J. Stasheff, H-spaces from a homotopy point of view, LNM 161, Springer 1970.
- [13] J. H. C. Whitehead, Algebraic homotopy theory, *Proc. Int. Cong. Math. Harvard*, 2 (1950), 354 - 357.

## Representation and computation for crossed modules

Ronald Brown  
School of Mathematics  
University of Wales, Bangor  
Gwynedd LL57 1UT, U.K.

### Introduction

A *crossed module* consists of a morphism of groups  $\mu : M \rightarrow P$  together with an action of the group  $P$  on the group  $M$ , written  $(m, p) \mapsto m^p$ , satisfying the two axioms

- CM1)  $\mu(m^p) = p^{-1}(\mu m)p$ ,
- CM2)  $m^{-1}nm = n^{\mu m}$ ,

for all  $m, n \in M$ ,  $p \in P$ . Such a crossed module is thought of as a “2-dimensional group”, in which  $P$  is the 1-dimensional part, and  $M$  is the 2-dimensional part. Thus the use of crossed modules is the first stage in a programme of

Higher dimensional group theory.

This idea of generalising methods of group theory to higher dimensions can be seen as one of the intuitions behind a considerable part of J.H.C. Whitehead’s work on homotopy theory [19, 20, 21], in which the notion of crossed module was first defined [20]. Any problem of representation, presentation and computation for groups applies with even more force for crossed modules.

### 1 Representation for crossed modules

This has two parts:

- objects,
- constructions.

One aspect of the problem is that whereas there is essentially one category of groups, there are at least five categories of equationally defined algebraic structures which are equivalent to crossed modules, namely:

1. cat<sup>1</sup>-groups [16],
2. group-groupoids [9],
3. reduced double groupoids with connection [10],

4. simplicial groups with Moore complex of length 1 [16],
5. reduced simplicial  $T$ -complexes of rank 2 [13, 1, 17].

These categories have various geometric models. Thus crossed modules intuitively correspond to the cell structure of a disc  $e^0 \cup e^1 \cup e^2$ , reflecting the way they arose as second relative homotopy groups [20]; cat<sup>1</sup>-groups and group-groupoids correspond to the cell structure of a disc  $e_{\pm}^0 \cup e_{\pm}^1 \cup e^2$ , with two cells in dimensions 0 and 1, and one cell in dimension 2; double groupoids correspond to squares, and simplicial groups of the kind stated to 2-simplices. There is also a polyhedral version, which allows rather general kinds of geometric objects [15].

The question at issue is which category to use to represent a given object, and to compute constructions.

## 2 Computation

Computation is often concerned with changing representations, and in this respect there have been enormous advances over the years. Thus the various elementary change of representations of numbers in for example  $6 = 2 \times 3, 5 = 2 + 3$ , develop over the years into substantial numerical computation.

Other important elements in the development of computing were the necessity of dealing with data, and the use of graphical representation of geometric objects and structures.

The next stage deals with changes of representation of the kind of  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ . This leads to the development of symbolic computation.

The problem now is how to make computers deal adequately with the change of representation of the type indicated by the six or seven equivalent categories hinted at above. Of course, the corresponding categories and the various equivalences of categories become much more complicated in dimensions higher than 2. This itself is one reason for hoping for some help from computational methods.

Another reason for hoping for computational help is that some constructions are much more easily handled in one category rather than in another. For example the notion of *tensor product* is easily defined for double groupoids as follows. If  $A, B, C$  are double groupoids, then one defines a *bimorphism*  $f : A, B \rightarrow C$  to be a function on pairs of elements (i.e. of squares) such that equations of the following form hold:

$$\begin{aligned} f(a \circ_i a', b) &= f(a, b) \circ_i f(a', b), \\ f(a, b \circ_i b') &= f(a, b) \circ_i f(a, b'). \end{aligned}$$

The *tensor product* of double groupoids  $A, B$  is then given in the usual way by the universal bimorphism

$$A, B \rightarrow A \otimes B.$$

This is the method adopted in [5].

The problem is then how to handle this tensor product in the other categories which are equivalent to double groupoids with connection. Since the equivalences are defined canonically and explicitly, it would be nice if the translation could be handled by computer.

The problem of translation of tensor products is solved (without computers!) in [5] for the equivalence between  $\omega$ -groupoids (a generalisation to all dimensions of double groupoids with connection) and crossed complexes (a generalisation to all dimensions of crossed modules).

From this equivalence, the tensor product  $\tau : T \rightarrow G$  of crossed modules  $\mu : M \rightarrow P$  and  $\nu : N \rightarrow Q$  has  $G = P * Q$ , the free product (coproduct) of the groups  $P$  and  $Q$ , while  $T$  is generated as a crossed module by the elements  $m, n, p \otimes q$  with  $\tau m = \mu m, \tau n = \nu n, \tau(p \otimes q) = q^{-1}p^{-1}qp$ , and the relations

$$\begin{aligned}\mu m \otimes q &= (m^q)^{-1}m \\ p \otimes \nu n &= n^{-1}n^p,\end{aligned}$$

for all  $m \in M, n \in N, p \in P, q \in Q$ , and where  $m^q, n^p$  denote new elements determined by the operation of  $G = P * Q$  on  $T$ .

This is written down simply to show the complications of the result. It can be proved only by a detailed analysis of the equivalence of categories, and by translating one definition into another in this context. It so happens that the corresponding translation has not been done for the other equivalent categories, except for group-groupoids in [12].

It would be really helpful if the theory of sketches and other apparatus of category theory in computer science could show methods of computation in these and other analogous situations.

Conversely, this field does offer a test bed for methods of computer algebra and symbolic computation. I would like to suggest a new term,

*structural computation,*

parallelling the development of mathematics through numbers, symbols, structures.

### 3 Computing colimits of crossed modules

The specific reason for interest in computing colimits of crossed modules is the Generalised Van Kampen Theorem due to Brown and Higgins [2]. The theorem is proved using double groupoids with connection, since these yield an appropriate algebraic context in which to handle both “algebraic inverses to subdivision”, and the “homotopy addition lemma”, which gives a formula for the boundary of a 3-cube. For the applications, the theorem states that Whitehead’s *fundamental crossed module* functor

$$\Pi_2 : (\text{pairs of pointed spaces}) \rightarrow (\text{crossed modules})$$

preserves certain colimits. So for the calculation of certain homotopy invariants, we need to know how to calculate colimits of crossed modules. This starts by using some elementary category theory.

The forgetful functor  $(\text{crossed modules}) \rightarrow (\text{groups})$ ,  $(M \rightarrow P) \mapsto P$ , has a right adjoint  $P \mapsto (1 : P \rightarrow P)$ , and so preserves colimits. This shows how to compute part of the colimit of a crossed module, in terms of colimits of groups.

The aim now is to transfer the problem to computing colimits of crossed modules over a fixed group  $P$ . To do this, suppose given a morphism of groups  $\iota : P \rightarrow Q$ . Then there is a pullback functor  $\iota^* : (\text{crossed modules over } Q) \rightarrow (\text{crossed modules over } P)$ . This functor has a left adjoint  $\iota_*$ , which gives the so called *induced crossed module*. To compute a colimit  $\text{colim}_i(M_i \rightarrow P_i)$ , one forms the group  $P = \text{colim}_i P_i$ , and uses the canonical morphisms  $\phi_i : P_i \rightarrow P$  to form the family of induced crossed  $P$ -modules  $((\phi_i)_* M_i \rightarrow P)$ . The colimit of these in the category of crossed  $P$ -modules is isomorphic to the original colimit. Now if  $M'$  is the colimit in the category of groups of the  $(\phi_i)_* M_i$ , then there is a canonical morphism

$M' \rightarrow P$  and an action of  $P$  on  $M'$ . However, this makes  $M' \rightarrow P$  not a crossed module but a precrossed module, i.e. the first axiom for a crossed module is satisfied, but not necessarily the second. A canonical quotienting of  $M'$  by its so called ‘Peiffer subgroup’, [7, 14], ensures the second axiom is satisfied.

Presentations for induced crossed modules were given in [2]. Recently, families of explicit examples are computed in joint work with C.D.Wensley at Bangor, [11], partly by hand and partly using the computer algebra system GAP [18]. That is, computation of induced crossed modules is here reduced to problems of computation in combinatorial group theory. A key fact which makes one expect many computations is that induced crossed modules of a finite crossed modules by morphisms of finite index are still finite. However, it is still possible that some of these computations are more easily carried out in one of the other equivalent categories, such as that of  $\text{cat}^1$ -groups, as we now explain.

A  $\text{cat}^1$ -group  $(G; s, t)$  consists of a group  $G$  with two endomorphisms  $s, t : G \rightarrow G$  of  $G$  such that

- CAT1)  $st = t, ts = s$ ,
- CAT2)  $[\text{Ker } s, \text{Ker } t] = 1$ .

Such a  $\text{cat}^1$ -group determines a crossed module  $\nu : N \rightarrow Q$  where

$$Q = \text{Im } s, N = \text{Ker } s, \nu = t|N.$$

Conversely, a crossed module  $\mu : M \rightarrow P$  determines a  $\text{cat}^1$ -group  $(H; s, t)$  where  $H$  is the semidirect product group  $P \ltimes M$  and  $s : (p, m) \mapsto (p, 1), t : (p, m) \mapsto (p(\mu m), 1)$ . The fact that  $t$  is a morphism is equivalent to axiom CM1) for a crossed module, while axiom CAT2) for this  $(H; s, t)$  is equivalent to axiom CM2). Note also that  $H$  admits a groupoid structure with  $s, t$  as source and target, and  $(p, m) \circ (p(\mu m), n) = (p, mn)$ , making  $H$  a group-groupoid, i.e. a group internal to the category of groupoids. This notion has a long history; the result that crossed modules are equivalent to group-groupoids goes back to Verdier, and seems first to have been published in [9]. It is used in [8]. Note that the holomorph of a group  $M$  is simply the  $\text{cat}^1$ -group associated to the crossed module  $\chi_M : M \rightarrow \text{Aut}(M)$ , which sends an element to its corresponding inner automorphism.

Now a colimit  $\text{colim}_i (G_i; s_i, t_i)$  of  $\text{cat}^1$ -groups is easy to describe. One takes the colimit  $G'$  of the underlying groups  $G_i$ , and find that the endomorphisms  $s_i, t_i$  induce endomorphisms  $s', t' : G' \rightarrow G'$  satisfying axiom CAT1). An associated  $\text{cat}^1$ -group  $(G; s, t)$  can be formed where  $G = G'/[\text{Ker } s', \text{Ker } t']$ , and  $s, t$  are induced by  $s', t'$ . This  $\text{cat}^1$ -group, with the induced morphisms to it, is the required colimit.

Work is in progress on further examples to see if the use of  $\text{cat}^1$ -groups can be shown to be more efficient for the computation of some colimits of crossed modules, for example of induced crossed modules, than the direct method. Such examples are to be expected from counts of the numbers of generators which arise at various stages of the two constructions.

## 4 Conclusion

It thus seems that the area of ‘higher dimensional group theory’ presents some interesting theoretical problems which perhaps could exemplify the theory of sketches, and one would hope that the theoretical understanding so obtained would also illuminate and make easier

computations with these objects. This is a desirable aim because of the topological applications [6], some of which cannot be obtained by other methods, and the many way they arise algebraically (see for example [4]). Further, these objects and equivalences present interesting tests of the capabilities of any theory of algebraic systems and, for computational purposes, of any computer algebra system. Finally, because of the algebraic relations with higher dimensional category theory, this study suggests ways in which that algebraic theory might or should develop. For example, the notion of ‘connection’ in cubical theory arose directly from this study, as did the notion of tensor product for  $\omega$ -groupoids, and indeed the first published definition of  $\infty$ -category seems to be in [3].

## References

- [1] ASHLEY, N.K., *Simplicial T-complexes*, University of Wales PhD thesis, 1978, published as *Simplicial T-complexes: a non abelian version of a theorem of Dod-Kan*, Diss. Math. 165 (1988).
- [2] BROWN, R. AND HIGGINS, P.J., On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3), 36 (1978) 193-212.
- [3] BROWN, R. AND HIGGINS, P.J., The equivalence of  $\infty$ -groupoids and crossed complexes, *Cah. Top. Géom. Diff.* 22 (1981) 371-386.
- [4] BROWN, R. AND HIGGINS, P.J., Crossed complexes and non-abelian extensions, in *Category Theory Proceedings, Gummersbach, 1981*, Lecture Notes in Math. 962, edited K.H.Kamps *et al*, Springer, Berlin, (1982) 39-50.
- [5] BROWN, R. AND HIGGINS, P.J., Homotopies and tensor products for  $\omega$ -groupoids and crossed complexes, *J. Pure Appl. Algebra*, 47 (1987) 1-33. 1987.
- [6] BROWN, R. AND HIGGINS, P.J., The classifying space of a crossed complex, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 110 (1992) 95-120.
- [7] BROWN, R. AND HUEBSCHMANN, J., Identities among relations, in *Low-Dimensional Topology*, edited R. Brown and T. L. Thickstun, London Math. Soc. Lecture Notes 48, Cambridge University Press, (1982) 153-202.
- [8] BROWN, R. AND MUCUK, O., Covering groups of non connected topological groups revisited, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 15 (1993) 97-110.
- [9] BROWN, R. AND SPENCER, C.B.,  $\mathcal{G}$ -groupoids, crossed modules, and the fundamental groupoid of a topological group, *Proc. Kon. Akad. v. Wet.* 79, (1976) 296-302.
- [10] BROWN, R. AND SPENCER, C.B., Double groupoids and crossed modules, *Cah. Top. Géom. Diff.* 17 (1976) 343-362.
- [11] BROWN, R. AND WENSLEY, C.D., Finite induced crossed modules and the homotopy 2-type of mapping cones, *Bangor Math. Preprint* (1994).
- [12] CRANS, S.J., Tensor products of infinity categories, *Utrecht Preprint* (1994).

- [13] DAKIN, K., *Multiple compositions for higher dimensional groupoids*, PhD Thesis, University of Wales, (1977).
- [14] HOG-ANGELONI, C., METZLER, W. AND SIERADSKI, A.J. (EDITORS), *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series 197, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [15] JONES, D.W., *Polyhedral T-complexes*, University of Wales PhD, 1984, published as *A general theory of polyhedral sets and their corresponding T-complexes*, Diss. Math. 166, 1988.
- [16] TODAY, J.-L., Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *J. Pure Appl. Algebra* 24 (1982) 179-202.
- [17] NAN TIE, G, A Dold-Kan theorem for crossed complexes, *J. Pure Appl. Algebra*, 56 (1989) 177-194.
- [18] SCHÖNERT, M. ET AL, GAP: Groups, Algorithms, and Programming, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, third edition, 1993.
- [19] WHITEHEAD, J.H.C., On adding relations to homotopy groups, *Ann. Math.* 42 (1941) 409-428.
- [20] WHITEHEAD, J.H.C., Note on a previous paper entitled “On adding relations to homotopy groups”, *Ann. Math.* 47 (1946) 806-810.
- [21] WHITEHEAD, J.H.C., Combinatorial homotopy II, *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949) 453-496.

# A Sketch for Polynomial Functors

Winfried A. Dreckmann

School of Mathematics

University College of North Wales

Bangor, Gwynedd LL57 1UT, U.K.

**Introduction:** Polynomial functors play an important role in various parts of mathematics. Well-known examples are the tensor power, the exterior power and the symmetric power

$$\otimes^n, \Lambda^n, SP^n : Vect_k^f \longrightarrow Vect_k$$

on the category of finite dimensional vector spaces over a field  $k$ , say, into the category of all vector spaces. These functors are particularly well understood if  $k$  has characteristic 0. In fact, the theory of these functors amounts to nothing else than the representation theory of the finite symmetric groups  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , [7], where the functor corresponding to an indecomposable representation  $M$  of  $S_n$  is the functor

$$\otimes^n(-) \otimes_{S_n} M : Vect_k^f \longrightarrow Vect_k,$$

given by the tensor product of the right module  $V^{\otimes n}$  ( $S_n$  acting canonically on the tensors) and the left module  $M$  over  $S_n$ . The theory is more complicated in characteristic  $p \neq 0$ . A lot is however known due to recent work of Lannes, Schwartz, Kuhn and others on the intriguing relationship between the representation theory of the symmetric and general linear groups and the theory of modules over the Steenrod algebra [5, 6].

Motivated by various examples in homotopy theory [1, 2] the author is very much interested in the integral case, namely functors

$$M_{\mathbb{Z}} \longrightarrow Ab$$

from the category of finitely generated free abelian groups (here replaced by its skeleton, the category  $M_{\mathbb{Z}}$  of matrices over the integers  $\mathbb{Z}$ ) into the category  $Ab$  of abelian groups. A new approach to the study of these functors will be described here. Polynomial functors (up to a given degree) can be described in terms of a certain finite diagram and some relations, that is: polynomial functors up to degree  $n$  are the models of a sketch. The category of these functors is in fact a module category and the sketch can be considered as the finite presentation of a ring or ringoid (cf. [8]), such that the category of functors of degree  $\leq n$  is equivalent to the category of modules over that ring. The author likes however to see the diagram as a sketch, because it encodes the minimal information needed for a polynomial functor.

**Definition:** A functor  $T : Vect_k^f \rightarrow Vect_k$  is said to be *polynomial*, if the map  $T : Hom(V, W) \rightarrow Hom(TV, TW)$ ,  $f \mapsto T(f)$  is a polynomial map on each  $Hom$ -set, that is, if  $T(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r)$  is always a polynomial function of  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$  with coefficients in

$\text{Hom}(TV, TW)$  depending on  $f_1, \dots, f_r \in \text{Hom}(V, W)$ . The functor is of degree  $\leq n$ , if all polynomials involved are of degree  $\leq n$ .

A similar definition works for functors  $T: \mathbf{M}_\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Ab}$  and, more generally, for functors  $T: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  between any additive categories, provided the notion of a *polynomial map* is generalized in the right way (for details see [4]). There is also the equivalent definition in terms of *cross-effects* due to Eilenberg and MacLane [4]. The cross-effects of  $T: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  are the functors  $T_r$  in the canonical natural decomposition

$$T(A_1 \oplus \dots \oplus A_m) \cong \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} T_r(A_{i_1} | \dots | A_{i_r})$$

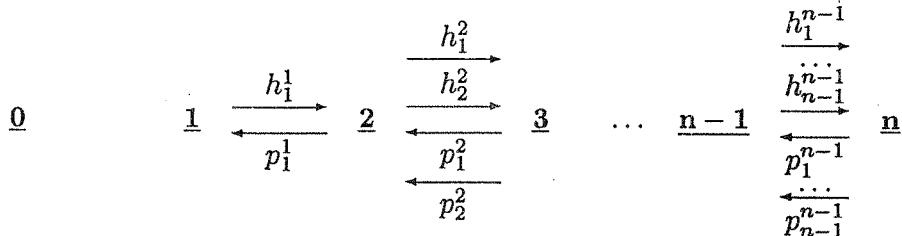
of  $T$  applied to a direct sum of objects in  $\mathbf{A}$ .  $T$  is said to be polynomial of degree  $\leq n$ , if all cross-effects  $T_r$  with  $r > n$  are trivial.

Now let  $\mathbf{P}(R)$  be the category of finitely generated projective (left) modules over any ring  $R$  and  $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{P}(R), \mathbf{Ab})$  the full subcategory of the category of all functors  $\mathbf{P}(R) \rightarrow \mathbf{Ab}$  whose objects are the functors of degree  $\leq n$ . Pirashvili has described a set of projective generators of the abelian category  $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{P}(R), \mathbf{Ab})$  which give rise to a ring  $\theta_n(R)$  and an equivalence of categories

$$\mathbf{Pol}_n(\mathbf{P}(R), \mathbf{Ab}) \simeq \theta_n(R)^{\text{op}}\text{-Mod}$$

between  $\mathbf{Pol}_n(\mathbf{P}(R), \mathbf{Ab})$  and the category of (right) modules over  $\theta_n(R)$ , cf. [9]. A careful analysis of the case  $R = \mathbf{Z}$  leads to the following result:

**Theorem:**  $\theta_n(\mathbf{Z})$  has the following presentation as a ringoid (i. e. a “ring with several objects” in the sense of [8]):



and

$$(6) \quad t_i^k = h_i p_i - 1_{\underline{k}} - p_i h_{i+1} - p_{i+1} h_i - p_i t_{i+1} h_i - p_{i+1} t_i h_{i+1} - p_i p_{i+2} t_{i+1} h_{i+2} h_i,$$

where upper indices are omitted and a symbol for a generator is understood to be 0 if it is not in the given range (i. e. if the upper index is larger than  $n$ ).

Note that the generators  $t_i^k$  are not included in the picture. It is actually possible to present  $\theta_n(\mathbb{Z})$  in terms of the generators  $h_i^k$  and  $p_i^k$  only, since the last relation can be "solved" to get an infinite expression for  $t_i^k$  in which all but a finite number of terms is 0. One gets more complicated relations, however. The author has written a computer program to handle these relations.

There are various other descriptions of  $\theta_n(\mathbb{Z})$  to be described in subsequent papers. It should however be mentioned here that each morphism set  $\theta_n(\mathbb{Z})(\underline{k}, \underline{l})$  of  $\theta_n(\mathbb{Z})$  (considered as a ringoid) is a free abelian group of rank

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^l (-1)^{k-j+l-i} \binom{k}{j} \binom{l}{i} \binom{r+ij-1}{ij-1},$$

and that the multiplicative structure of  $\theta_n(\mathbb{Z})$  can be expressed in terms of a set of additive generators. The above number is the same as the number of double cosets of the symmetric groups  $S_1, S_2, \dots, S_n$  with respect to all pairs of Young subgroups of the form  $S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}$  and  $S_{n_1} \times \dots \times S_{n_l}$ , respectively. There is of course a deep relationship between the representation theory of  $\theta_n(\mathbb{Z})$  and of  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , which reduces to the above mentioned equivalence in the characteristic 0 case. Some of the combinatorics involved in the representation theory of the symmetric groups have nice interpretations within the structure of the rings  $\theta_n(\mathbb{Z})$ .

**Models of the sketch:** Considered as a sketch, a model

$$M = \{M_0, M_1, \dots, M_n, h_i^k, p_i^k | 1 \leq k < n, 1 \leq i \leq k\}$$

of  $\theta_n(\mathbb{Z})$  in **Ab** just consists of  $n+1$  abelian groups  $M_0, M_1, \dots, M_n$  together with homomorphisms  $h_i^k: M_k \rightarrow M_{k+1}$  and  $p_i^k: M_{k+1} \rightarrow M_k$  corresponding to the generators  $h_i^k$  and  $p_i^k$ , such that the relations (1)–(5) in the above theorem are satisfied (with (6) serving as a recursive definition of  $t_i^k$ ). These are the data needed to describe a polynomial functor  $T: \mathbf{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbf{Ab}$  of degree  $\leq n$  up to isomorphism of functors, while on the other hand, given such a functor  $T$ , the corresponding model  $M^T$  is obtained as follows:

$$M_k^T = T_k(\mathbb{Z} | \dots | \mathbb{Z}),$$

where  $T_k$  is the  $k$ -fold cross-effect of  $T$  and  $h_i^k$  and  $p_i^k$  are the restrictions of

$$T(\Delta_i) = T(j_i) = T(j_{i+1}): T(\mathbb{Z}^k) \rightarrow T(\mathbb{Z}^{k+1}) \quad \text{and} \quad T(\nabla_i) = T(j_{i+1}): T(\mathbb{Z}^{k+1}) \rightarrow T(\mathbb{Z}^k).$$

Here  $\Delta_i: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^{k+1}$  is the diagonal  $\Delta_i(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_k)$ ,  $\nabla_i: \mathbb{Z}^{k+1} \rightarrow \mathbb{Z}^k$  is the codiagonal  $\nabla_i(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_i + x_{i+1}, \dots, x_k)$  and  $j_i: \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^{k+1}$  is the inclusion  $j_i(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_k)$ .

The result readily reduces to the description of quadratic functors in terms of two abelian groups  $M_1$  and  $M_2$  and two homomorphisms  $h = h_1^1: M_1 \rightarrow M_2$  and  $p = p_1^1: M_2 \rightarrow M_1$

satisfying  $hph = 2h$  and  $php = 2p$ , which was given in [1]. Many examples are included in [1]. As a non-quadratic example consider the model

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \xrightarrow{(20)} & \\
 & & \xleftarrow{(3)} & & \\
 0 & Z & \xrightarrow{(11)} & Z^2 & \xleftarrow{(02)} \\
 & & & & \xleftarrow{(1)} \\
 & & & & \xleftarrow{(0)} \\
 & & & & \xleftarrow{(1)}
 \end{array}$$

of the symmetric power functor  $SP^3: M_Z \rightarrow \text{Ab}$ . The model is easily obtained by considering the elements of  $SP^3(\mathbb{Z})$ ,  $SP^3(\mathbb{Z}^2)$  and  $SP^3(\mathbb{Z}^3)$  as homogeneous polynomials of degree 3 in  $\mathbb{Z}[x]$ ,  $\mathbb{Z}[x, y]$  and  $\mathbb{Z}[x, y, z]$ , respectively, and choosing  $\{x^3\}$ ,  $\{x^2y, xy^2\}$  and  $\{xyz\}$  as a basis for  $M_1^{SP^3}$ ,  $M_2^{SP^3}$  and  $M_3^{SP^3}$ , respectively.

**Applications:** The homotopy groups of one-point unions of spheres as well as (co)homology groups of Eilenberg-MacLane spaces form an important tool in homotopy theory. It would be important to describe and classify the functors which occur in this way. Moreover, sketching polynomial functors as above, yields a small data structure. As a consequence, it will be possible to have computer programs which handle problems on the level of functors.

Pirashvili [10, 11] has shown that various important invariants including the topological Hochschild homology of certain rings can be approximated by *Ext*- and *Tor*-groups in categories of polynomial functors. It would be interesting to see, if an algebraic proof of Bökstedt's results on  $THH(\mathbb{Z})$  [3] can be given using the explicit description provided by the above theorem.

## References

- [1] H. J. BAUES, Quadratic functors and metastable homotopy, *J. Pure Appl. Algebra*, **91** (1994), 49–107.
- [2] H. J. BAUES, W. DRECKMANN, The cohomology of homotopy categories and the general linear group, *K-Theory* **3** (1989), 307–338.
- [3] M. BÖKSTEDT, On the topological Hochschild homology of  $\mathbb{Z}$  and  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , Preprint 1985.
- [4] S. EILENBERG, S. MACLANE, On the groups  $H(\Pi, n)$  II., *Ann. Math.* **60** (1954), 161–178.
- [5] H.-W. HENN, J. LANNES, L. SCHWARTZ, The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects, *Amer. J. Math.* **115** (1993), 1053–1106.
- [6] N.J. KUHN, Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra, I. *Amer. J. Math.* **116** (1993), 327–360; II. *K-Theory* **8** (1994), 395–428; III. (to appear).
- [7] I.G. MACDONALD, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Clarendon Press, Oxford 1979.

- [8] B. MITCHELL, Rings with several objects, *Adv. Math.* **8** (1972), 1–161.
- [9] T. PIRASHVILI, Polynomial functors, *Proc. Math. Inst. Tbilisi* **91** (1988), 55–66.
- [10] T. PIRASHVILI Polynomial approximation of *Ext* and *Tor* groups in functor categories, *Commun. in Algebra* **21** (1993), 1705–1719.
- [11] T. PIRASHVILI, F. WALDHAUSEN, MacLane homology and topological Hochschild homology, *J. Pure Appl. Algebra* **82** (1992), 81–98.



# Une nouvelle condition de finitude pour les monoïdes présentés par des systèmes de réécriture complets (d'après Craig C. Squier)

Yves Lafont

CNRS, Laboratoire de Mathématiques Discrètes  
163 avenue de Luminy, case 930  
13288 Marseille Cedex 9, France  
lafont@lmd.univ-mrs.fr

Nous résumons ici les principaux points développés dans [La].

Une *présentation* d'un monoïde  $M$  est la donnée d'un alphabet  $\Sigma$  et d'une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur le monoïde libre  $\Sigma^*$ , de telle sorte que  $M$  soit isomorphe à  $\Sigma^*$  quotienté par la congruence engendrée par  $\mathcal{R}$ . A partir d'une telle présentation, on peut définir des conditions de finitude :

- Si  $\Sigma$  est fini, on dit que  $M$  est *finiment engendré*. C'est une condition de finitude en *dimension 1*. Elle implique que le groupe d'homologie  $H_1(M)$  est de type fini.
- Si de plus,  $\mathcal{R}$  est fini, on dit que  $M$  est *finiment présenté*. C'est une condition de finitude en *dimension 2*. Elle implique que le groupe d'homologie  $H_2(M)$  est de type fini.

Notons que cette deuxième condition ne dépend pas du choix des générateurs, pourvu qu'ils soient en nombre fini :

**Proposition 1** Soient  $M$  un monoïde,  $\Sigma, \Sigma'$  des alphabets finis et  $\varphi : \Sigma^* \rightarrow M$ ,  $\varphi' : \Sigma'^* \rightarrow M$  des morphismes surjectifs. Alors la congruence induite par  $\varphi$  sur  $\Sigma^*$  est engendrée par une relation finie si et seulement si la congruence induite par  $\varphi'$  sur  $\Sigma'^*$  l'est.

Nous invitons le lecteur à faire lui-même cette démonstration facile. Nous utiliserons un résultat analogue par la suite.

Craig C. Squier a introduit une condition de finitude en *dimension 3* dont la définition est moins évidente. Cette condition ne dépend pas de la présentation, pourvu qu'elle soit finie. De plus, si un monoïde est présentable au moyen d'un système de réécriture complet fini (c'est-à-dire noethérien et confluent), il vérifie cette condition. Cet invariant permet ainsi de montrer que certains monoïdes n'admettent pas de présentation au moyen d'un système de réécriture complet fini.

Par ailleurs, notons que les théorèmes de cohérence pour les catégories monoïdales (voir [Ma]) peuvent être considérés comme des conditions de finitude en dimension 4, à condition d'adopter le point de vue d'Albert Burroni (voir [Bu]).

# 1 La condition de finitude

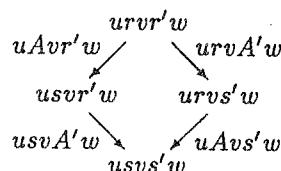
Soit  $C$  une catégorie monoïdale stricte. On notera  $x, y \mapsto xy$  le bifoncteur multiplication et  $1$  l'objet unité. Si  $x$  est un objet et  $y \xrightarrow{f} y'$  une flèche, on écrira  $xf$  pour  $\text{id}_x f$  et  $fx$  pour  $f\text{id}_x$ . Si toutes les flèches de  $C$  sont inversibles, on dira que  $C$  est un *groupoïde monoïdal* strict. Désormais, le qualificatif *strict* sera toujours sous-entendu.

Une *2-congruence* sur une catégorie monoïdale  $C$  est une relation d'équivalence  $f \sim g$  sur les couples de flèches parallèles  $x \xrightarrow{f,g} x'$  dans  $C$ , qui est compatible avec la composition et la multiplication. Par exemple, la *2-congruence pleine* est définie par  $f \sim g$  pour tout  $x \xrightarrow{f,g} x'$ . Si  $\mathcal{P}$  est un ensemble de couples de flèches parallèles dans  $C$ , la plus petite 2-congruence  $\equiv_{\mathcal{P}}$  contenant  $\mathcal{P}$  est appelée la *2-congruence engendrée* par  $\mathcal{P}$ . Dans le cas où  $\mathcal{P}$  est fini, on dit que la 2-congruence  $\equiv_{\mathcal{P}}$  est *finiment engendrée*.

Soient maintenant  $\Sigma, \mathcal{R}$  une présentation du monoïde  $M$ . Dans un premier temps, on construit la *catégorie des dérivations* pour cette présentation :

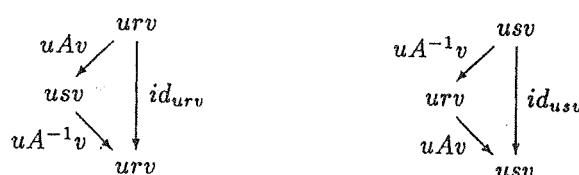
- un objet est un mot  $x \in \Sigma^*$  ;
- une *dérivation atomique*  $r \xrightarrow{A} s$  est donnée par un couple  $(r, s) \in \mathcal{R}$  ;
- une *dérivation élémentaire*  $x \xrightarrow{E} y$  est donnée par deux mots  $u, v \in \Sigma^*$  et une dérivation atomique  $r \xrightarrow{A} s$  tels que  $x = urv$  et  $y = usv$ . Si  $u = v = 1$ , on identifie  $E$  avec la dérivation atomique  $A$  ;
- une *dérivation*  $x \xrightarrow{F} y$  est donnée par une suite  $x = x_0 \xrightarrow{E_1} x_1 \xrightarrow{E_2} \dots \xrightarrow{E_n} x_n = y$  de dérivations élémentaires. Si  $n = 0$ , on obtient la *dérivation identité*  $\text{id}_x$ . Si  $n = 1$ , on identifie  $F$  avec la dérivation élémentaire  $E_1$ .

Pour obtenir une catégorie monoïdale, il faut considérer l'ensemble des dérivations modulo la congruence engendrée par la *permutation des dérivations disjointes*. Cela signifie que, si  $u, v, w$  sont des mots et  $r \xrightarrow{A} s$  et  $r' \xrightarrow{A'} s'$  sont des dérivations atomiques, on identifie les dérivations  $usvA'w \circ uAvr'w$  et  $uAvs'w \circ urvA'w$  :



On obtient ainsi la *catégorie monoïdale libre*  $M(\Sigma, \mathcal{R})$  engendrée par la présentation  $\Sigma, \mathcal{R}$ . Elle est caractérisée par une propriété universelle dont la formulation précise est laissée au lecteur.

Le *groupoïde monoïdal libre*  $G(\Sigma, \mathcal{R})$  est construit de la même façon, en introduisant une *dérivation atomique positive*  $A : r \rightarrow s$  et une *dérivation atomique négative*  $A^{-1} : s \rightarrow r$  pour chaque  $(r, s) \in \mathcal{R}$ . Bien sûr, il faut considérer l'ensemble des dérivations modulo la congruence engendrée par la permutation des dérivations disjointes et la simplification :



Il est commode de travailler avec des dérivations plutôt qu'avec des classes d'équivalence de dérivations. Ainsi, une 2-congruence sur  $M(\Sigma, \mathcal{R})$  peut être considérée comme une relation d'équivalence  $\sim$  sur les dérivations, vérifiant les propriétés suivantes :

- $K \circ F \circ H \sim K \circ G \circ H$  pour tout  $x \xrightarrow{H} y \xrightarrow{F,G} y' \xrightarrow{K} z$  tel que  $F \sim G$ ;
- $x F y \sim x G y$  pour tout  $x, y$  et  $z \xrightarrow{F,G} z'$  tels que  $F \sim G$ ;
- $s u A' \circ A u r' \sim A u s' \circ r u A'$  pour tout  $u$  et pour tout couple de dérivations atomiques  $r \xrightarrow{A} s$  et  $r' \xrightarrow{A'} s'$ .

Dans le cas de  $G(\Sigma, \mathcal{R})$ , il y a une condition supplémentaire :

- $A^{-1} \circ A \sim id_r$  et  $A \circ A^{-1} \sim id_s$  pour toute dérivation atomique positive  $r \xrightarrow{A} s$ .

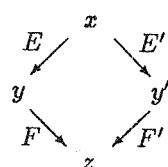
**Théorème 1** [Sq2] *Si  $\Sigma, \mathcal{R}$  et  $\Sigma', \mathcal{R}'$  sont des présentations finies d'un même monoïde, alors la 2-congruence pleine sur  $G(\Sigma, \mathcal{R})$  est finiment engendrée si et seulement si la 2-congruence pleine sur  $\Sigma', \mathcal{R}'$  l'est.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1. Elle utilise les inverses de  $G(\Sigma, \mathcal{R})$ . On dira que le monoïde  $M$  a un type de dérivation fini s'il y a une présentation finie  $\Sigma, \mathcal{R}$  telle que la 2-congruence pleine sur  $G(\Sigma, \mathcal{R})$  est finiment engendrée. Le théorème assure que cela ne dépend pas du choix de  $\Sigma, \mathcal{R}$ .

## 2 Dérivations dans une présentation complète

Soit  $\Sigma, \mathcal{R}$  une présentation d'un monoïde  $M$ . Supposons que cette présentation soit noetherienne, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de suite infinie  $x_0 \xrightarrow{E_1} x_1 \xrightarrow{E_2} \dots \xrightarrow{E_n} x_n \xrightarrow{E_{n+1}} \dots$  de dérivations élémentaires. Pour tout  $x \in \Sigma^*$ , on a donc une dérivation  $x \xrightarrow{F} y$  avec  $y$  réduit, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune dérivation élémentaire partant de  $y$ . Cet  $y$  est appelé une forme normale de  $x$ .

Un *pic* est une paire de dérivations élémentaires  $x \xrightarrow{E} y$  et  $x \xrightarrow{E'} y'$  partant du même mot  $x$ . Un tel pic est dit *confluent* s'il existe un mot  $z$  et deux dérivations  $y \xrightarrow{F} z$  et  $y' \xrightarrow{F'} z$ .



Fixons une 2-congruence  $\sim$  sur  $M(\Sigma, \mathcal{R})$ . Ce pic est dit  $\sim$ -*confluent* s'il est confluent et  $F, F'$  peuvent être choisis de sorte que  $F \circ E \sim F' \circ E'$ . Enfin, il est dit *critique* si  $E \neq E'$  et s'il est de la forme

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} Av \\ \searrow sv \\ rv = u'r' \\ \swarrow u'A' \\ u's' \end{array} & \text{ou} & \begin{array}{c} uAv \\ \searrow usv \\ urv = r' \\ \swarrow A' \\ s' \end{array} \end{array}$$

où, dans le premier cas,  $u'$  est un préfixe strict de  $r$ . Si  $\mathcal{R}$  est fini, il n'y a qu'un nombre fini de pics critiques.

**Lemme 1** *Si tous les pics critiques sont  $\sim$ -confluents, alors tous les pics sont  $\sim$ -confluents.*

**Lemme 2** Si tous les pics sont  $\sim$ -conflents et si  $x \xrightarrow{F} y$  et  $x \xrightarrow{F'} y'$  sont des dérivations telles que  $y$  et  $y'$  sont réduits, alors  $y = y'$  et  $F \sim F'$ .

Il s'agit de résultats classiques de réécriture enrichis avec de la 2-congruence. Une présentation noethérienne est dite *complète* (ou *canonique*) si tous les pics critiques sont conflents. Cela implique la confluence de tous les pics et l'unicité des formes normales. En particulier, si cette présentation est finie, le problème des mots est décidable. Pour plus de détails sur ces questions de réécriture, nous renvoyons à [LaPr].

**Théorème 2** [Sq2] Si  $M$  a une présentation complète finie, alors  $M$  a un type de dérivation fini.

**Preuve :** Soit  $\sim$  la 2-congruence sur  $G(\Sigma, \mathcal{R})$  engendrée par les diagrammes de confluence des pics critiques. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels pics,  $\sim$  est finiment engendrée. De plus, la restriction de  $\sim$  à  $M(\Sigma, \mathcal{R})$  est aussi une 2-congruence, et on peut appliquer le lemme précédent.

Pour chaque mot  $x$ , on choisit une dérivation  $x \xrightarrow{K_x} \hat{x}$  dans  $M(\Sigma, \mathcal{R})$  où  $\hat{x}$  est la forme normale unique de  $x$ . Par le lemme 2, on a  $K_y \circ F \sim K_x$  pour toute dérivation  $x \xrightarrow{F} y$  dans  $M(\Sigma, \mathcal{R})$ .

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ x & \xrightarrow{\quad} & y \\ & K_x \searrow & \swarrow K_y \\ & \hat{x} & \end{array}$$

Par récurrence, cette propriété s'étend à toutes les dérivation dans  $G(\Sigma, \mathcal{R})$ , et si  $x \xrightarrow{F,G} y$  est un couple de dérivation parallèles dans  $G(\Sigma, \mathcal{R})$ , on a  $F \sim K_y^{-1} \circ K_x \sim G$ . Autrement dit,  $\sim$  est la 2-congruence pleine sur  $G(\Sigma, \mathcal{R})$ . C.q.f.d.

Ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'un monoïde n'a pas de présentation complète finie, parce qu'il n'a pas un type de dérivation fini. Considérons par exemple le monoïde  $M$  présenté à l'aide de  $\Sigma = \{a, b, c, d, d'\}$  et  $\mathcal{R}_0 = \{(ab, a), (da, ac), (d'a, ac)\}$ . Il y a aussi une présentation complète infinie de  $M$  à l'aide de  $\Sigma$  et  $\mathcal{R} = \{(ac^n b, ac^n); n \in \mathbb{N}\} \cup \{(da, ac), (d'a, ac)\}$ . En particulier, le problème des mots pour  $M$  est clairement décidable. De plus, en utilisant cette présentation, on peut montrer que  $M$  n'a pas un type de dérivation fini. Pour cela, on se ramène à vérifier qu'un certain  $\mathbb{Z}M$ -module n'est pas de type fini. Toutefois, on peut également montrer que ce monoïde n'a pas de présentation complète finie en utilisant le critère homologique de [Sq1] (voir [LaPr]).

Squier considère un exemple un peu plus compliqué. Il s'agit du monoïde  $M$  présenté à l'aide de  $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$  et  $\mathcal{R}_0 = \{(ab, 1), (da, acd), (db, bd), (dc, cd), (de, 1)\}$ . Ici encore, on peut montrer que  $M$  n'a pas un type de dérivation fini, alors que tous les groupes d'homologie de  $M$  sont de type fini. D'où l'intérêt de la nouvelle condition.

### 3 Condition de finitude et homologie

**Théorème 3** Si un monoïde finiment présentable  $M$  a un type de dérivation fini, alors il y a une résolution partielle  $C_3 \xrightarrow{\theta_3} C_2 \xrightarrow{\theta_2} C_1 \xrightarrow{\theta_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$  où les  $C_i$  sont des  $\mathbb{Z}M$ -modules libres de dimensions finies. En particulier, le groupe d'homologie  $H_3(M)$  est de type fini.

Ce résultat avait été conjecturé par Squier. On peut le démontrer en utilisant la méthode de l'homotopie contractante. L'idée est la suivante: A partir d'une présentation finie de  $M$ , on définit un complexe cellulaire

de dimension 3 avec une seule 0-cellule, une 1-cellule pour chaque générateur, une 2-cellule pour chaque relation et une 3-cellule pour chaque couple de dérivations parallèles appartenant à un ensemble fini qui engendre la congruence pleine sur  $G(\Sigma, \mathcal{R})$ . En faisant agir librement  $M$  sur toutes ces cellules, on construit le 3-squelette d'un espace contractile dont le complexe de chaînes est une résolution libre de  $\mathbf{Z}$ . En particulier, on obtient une preuve alternative du résultat suivant :

**Théorème 4 [Sq1]** *Si  $M$  a une présentation complète finie, alors  $H_3(M)$  est de type fini.*

Le deuxième exemple ci-dessus montre qu'un monoïde finiment présentable  $M$  tel que  $H_3(M)$  est de type fini n'a pas nécessairement un type de dérivation fini. En particulier, la réciproque du théorème 4 est fausse, même si  $M$  est un monoïde finiment présentable avec un problème de mots décidable.

## Références

- [Bu] A. Burroni. *Higher Dimensional Word Problem*. Theoretical Computer Science 115, 43–62, 1993.
- [CrOt1] R. Cremanns & F. Otto. *Finite Derivation Type Implies The Homological Finiteness Condition FP3*. Mathematische Schriften Kassel, preprint 12/93.
- [CrOt2] R. Cremanns & F. Otto. *For groups the Property of Having Finite Derivation Type is Equivalent to the Homological Finiteness Condition FP3*. Mathematische Schriften Kassel, preprint 8/94.
- [Gr] J. R. J. Groves. *Rewriting systems and homology of groups*, in L. G. Kovács (ed.), *Groups—Canberra 1989*. Lecture Notes in Mathematics 1456, 114–141, 1990.
- [Hu] G. Huet. *Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems*. Journal of the ACM 27, 797–821, 1980.
- [Ko] Y. Kobayashi. *Complete rewriting systems and homology of monoid algebras*. Journal of Pure and Applied Algebra 65, 263–275, 1990.
- [La] Y. Lafont. *A new finiteness condition for monoids presented by complete rewriting systems (after Craig C. Squier)*. À paraître dans Journal of Pure and Applied Algebra.
- [LaPr] Y. Lafont & A. Prouté. *Church-Rosser property and homology of monoids*. Mathematical Structures in Computer Science 1, 297–326, 1991.
- [Le] P. Le Chenadec. *Canonical Forms in Finitely Presented Algebras*. Pitman, London, John Wiley & Sons, New York, Toronto, 1986.
- [Ma] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlag, 1971.
- [Sq1] C. C. Squier. *Word problems and a homological finiteness condition for monoids*. Journal of Pure and Applied Algebra 49, 201–217, 1987.
- [Sq2] C. C. Squier. *A Finiteness Condition for Rewriting Systems*. Révision par F. Otto & Y. Kobayashi, à paraître dans Theoretical Computer Science.
- [SqOt] C. C. Squier & F. Otto. *The word problem for finitely presented monoids and finite canonical rewriting systems*, in J. P. Jouannaud (ed.), *Rewriting Techniques and Applications*. Lecture Notes in Computer Science 256, 74–82, 1987.



# DES INVARIANTS DE VASSILIEV POUR LES NOEUDS

## A LA LOGIQUE DE LIE

Jacques Van de wiele

URA 753 de logique mathématique, Université Paris 7, tour 45–55, 5<sup>ème</sup> étage,  
2, Place Jussieu, 75251 PARIS Cedex 05, France  
jvdw@logique.jussieu.fr.

### I) DE LA LOGIQUE AUX NOEUDS

a) Mentionnons quelques éléments de logique mathématique, plus précisément de *théorie de la démonstration*, en commençant par le *calcul des séquents* de Gentzen pour la *logique classique*. Rappelons que le développement de la *logique intuitionniste* de Heyting s'est accompagné d'un passage de la prouvabilité aux preuves. On a les correspondances suivantes :

| log ique     | $\lambda$ -c a l c u l | informat ique               | c a t é g o r i e s |
|--------------|------------------------|-----------------------------|---------------------|
| form u l e s | t y p e s              | s p é c i f i c a t i o n s | o b j e t s         |
| preuves      | termes                 | programmes                  | morphismes          |

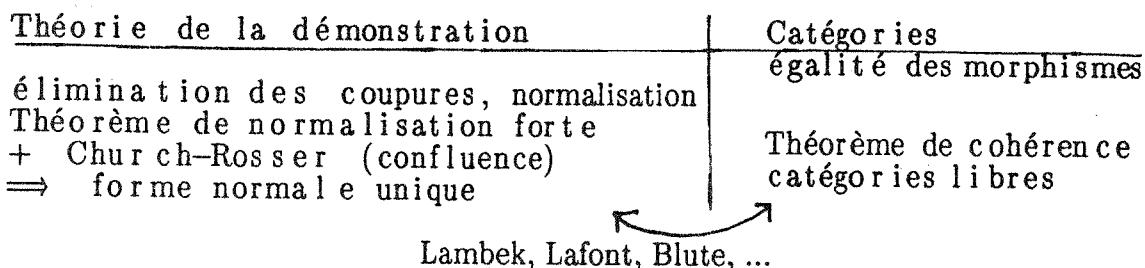
La logique intuitionniste correspond aux catégories cartésiennes fermées (voir par exemple [LS]).

La *logique linéaire* de J.Y. Girard peut être définie comme un compromis entre l'algèbre linéaire et la logique classique :

|                   | connecteur          | connecteur dual         |               |
|-------------------|---------------------|-------------------------|---------------|
| logique linéaire  | $\otimes$ (tenseur) | $\otimes^* = \wp$ (par) | multiplicatif |
| algèbre linéaire  | $\otimes$           | $\otimes^* = \otimes$   |               |
| logique classique | $\wedge$ (et)       | $\vee$ (ou)             |               |

Pour la logique classique, rappelons le théorème de Joyal : pas de sémantique catégorique non dégénérée.

Côté algèbre linéaire, la catégorie Vect<sub>f</sub> des espaces vectoriels de dimension finie est le prototype d'une "compact closed category" au sens de Kelly, c.a.d. d'une catégorie monoïdale symétrique fermée avec une dualité \* telle que le connecteur  $\otimes$  soit autodual. Enfin la logique linéaire correspond en gros aux catégories \*-autonomes de Barr ou aux catégories faiblement distributives de Seely, Blute, ...



b) Rajoutons un élément au dossier avec un vieux thème de Kreisel : on recherche la preuve idéale ou l'essence d'une preuve, au-delà de ses présentations formelles particulières et plus ou moins équivalentes, et l'on recherche le bon concept mathématique correspondant. Cela s'inscrit aussi dans un cadre de "géométrisation des démonstrations".

Les réseaux de preuves ("proofnets") introduits par Girard, avec le passage d'arbres à des graphes quelconques, répondent à cette recherche. Et l'on rejoint ici tout un courant physicomathématique dont on citera deux pièces, les *diagrammes de Penrose* et le standard [JS1] de Joyal–Street.

c) Qu'en est-il de la *commutativité* ou *non-commutativité* des connecteurs ? Rappelons qu'un *séquent bilatère*  $\Gamma \vdash \Delta$  est constitué de deux suites finies de formules  $\Gamma$  et  $\Delta$ . En logique classique (resp. en logique linéaire), le séquent est valide quand  $\wedge \Gamma$  (resp.  $\otimes \Gamma$ ) implique (resp. implique linéairement)  $\wedge \Delta$  (resp.  $\otimes \Delta$ ). La *dualité* (lois de De Morgan), que ce soit en logique classique ou en logique linéaire, permet de mettre tout à droite :  $\vdash \Gamma^*, \Delta$ . On peut donc ne travailler qu'avec des *séquents droits* (de la forme  $\vdash \Gamma$ ). La règle d'échange prend alors la forme  $\frac{\vdash \Gamma}{\vdash s(\Gamma)}$  où  $s$  est une permutation quelconque. Une autre façon de mettre la commutativité est de considérer que  $\Gamma$  est un multi-ensemble ou une famille de formules indexée par un ensemble fini.

d) Du côté de la logique linéaire non-commutative, mentionnons d'abord la "*Pomset Logic*" de Christian Retoré [Re] : les séquents ont la forme  $\vdash^I \Gamma$ , où  $I$  désigne un ordre (partiel) sur le multi-ensemble  $\Gamma$ ; les connecteurs commutatifs  $\otimes, \wp$  coexistent avec un connecteur  $<$  ("précéde") non-commutatif et autodual.

Mais on insistera ici sur l'approche d'Arnaud Fleury : le groupe symétrique qui gérait la règle d'échange est maintenant remplacé par le *groupe des tresses* ; les réseaux de preuves, qui étaient des graphes abstraits, sont maintenant plongés dans  $\mathbb{R}^3$ ; en ce sens, la *logique linéaire tressée* de Fleury est un raffinement de la *logique circulaire* de Girard–Yetter ([Gi2], [Yel]) ou de la logique avec deux dualités d'Abrusci [Ab], qui considéraient des réseaux plongés dans  $\mathbb{R}^2$ .

Signalons que le concept de réseau de preuve se topologise ainsi de plus en plus et que l'on évolue vers des *catégories de cobordisme* ("la variété  $M$  prouve son bord  $\partial M$ ") et la TQFT (voir [At]).

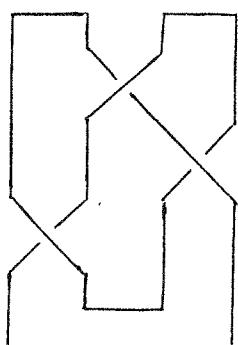
e) Le courant non-commutatif a engendré les *catégories monoïdales tressées* ou "balanced" (ce dernier terme correspondant à des *tresses en rubans*, et à des possibilités de *torsion* du ruban sur lui-même). Si l'on rajoute la dualité, on a les *tortiles*, étudiés dans [Sh]. L'on rejoint ici un courant *quantique* avec le tableau :

| mécanique<br>théorie des champs | classique                 | quantique                  |
|---------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| algèbre                         | commutative               | non-commutative            |
| logique<br>catégorie            | commutative<br>symétrique | non-commutative<br>tressée |

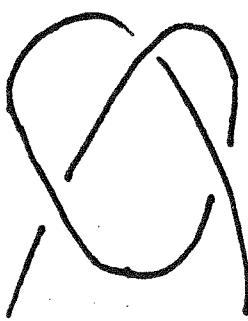
f) Les logiciens distinguent naturellement, parmi les "*structures de preuves*" (auxquelles on ne demande que des conditions locales), les réseaux de preuves, qui satisfont des conditions globales de *correction* et qui seuls correspondent à de vraies preuves (ne prouvant que des formules vraies). Par exemple, modulo *positions d'interrupteurs* ("switchings"), le critère de correction prend l'une des formes suivantes :

- long *voyage* (Girard)  
(avec des conditions *temporelles* en plus : Eric Duquesne [Du])
- connexité sans cycle (Danos, Fleury, Regnier, Retoré)  
(pour des critères *homologiques*, voir [Me])
- connexité sans cycle et sans noeud (Fleury : cas tressé en rubans).

Avec ce dernier critère, une structure de preuve comme



ou



qui est acceptée dans [Sh], est refusée.

(Signalons tout de même que l'on trouve chez les catégoriciens des prémisses de cette notion avec les *graphes de Kelly-Maclane* [KM].)

Il s'agit ici de la pièce essentielle d'un projet "logique linéaire quantique" (Fleury, Van de Wiele, Blute) ; on ne peut donner dans cet article que quelques motivations pour l'étude des travaux très riches de Fleury [Fl].

Joyal et Street dans [JS2] et à propos de [Ca], parlent d'une "nouvelle symbiose entre l'algèbre, la géométrie et la physique". Dans leur esprit, je pense qu'ils comptent faire jouer un rôle important à la théorie des catégories. Et l'on rajoute à la liste la logique mathématique. (Il faut mentionner ici les travaux de Dehornoy sur les tresses, qui lui, est venu à ce sujet par la branche "*théorie des ensembles*" de la logique.)

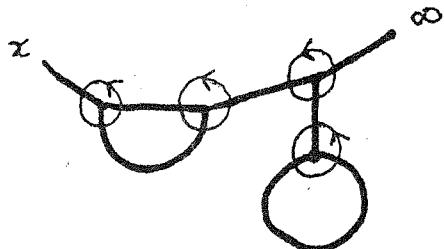
## II) DES NOEUDS A LA LOGIQUE DE LIE

Paradoxalement, vouloir éviter les noeuds demande plus de connaissances sur les noeuds, que de les admettre sans restriction. Il était alors naturel de s'intéresser aux *invariants de noeuds*, sujet en pleine expansion depuis la découverte du polynôme de Jones, et de suivre le groupe de travail "Groupes Quantiques, Théories des Noeuds et invariants en topologie de petite dimension" (Brugières, Maltsiniotis, Vogel, à Paris 7). Les travaux de Bar-Natan [Ba] sur les *invariants de Vassiliev* y ont été diffusés, exposés et développés, notamment par Pierre Vogel [Vo]. Nous renvoyons à ces deux références pour comprendre comment, au moyen des noeuds singuliers, on introduit une filtration sur les noeuds, ensuite comment, pour étudier le gradué associé à cette filtration, on introduit les diagrammes de cordes, puis les diagrammes de Feynman, et finalement comment on en arrive à la définition suivante :

Définition. Un *caractère chinois connexe* (ou CCC ou *diagramme trivalent libre connexe*) est un graphe fini connexe dont tous les sommets sont trivalents ou monovalents, muni en chaque sommet d'un ordre cyclique sur les arêtes qui en sont issues. On impose de plus qu'il existe au moins un sommet monovalent.

Définition. Un  $X^\omega$ CCC est un CCC dont les sommets monovalents sont étiquetés bijectivement par l'ensemble fini  $X \cup \{\infty\}$ .

Exemple.

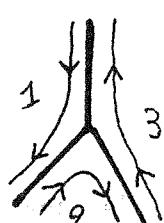
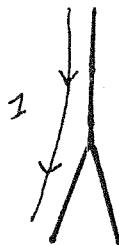
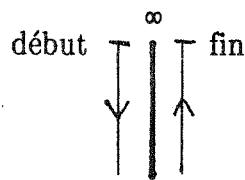


Remarque. Quand on dessine un CCC dans le plan, on convient, sauf mention contraire, de prendre l'ordre cyclique conformément à l'orientation positive du plan (sens contraire des aiguilles d'une montre).

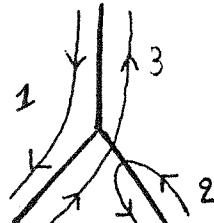
Définition. Deux  $X^\omega$ CCC sont dits *égaux* si il existe un isomorphisme de graphes de l'un sur l'autre, préservant l'ordre cyclique sur chaque sommet trivalent, et préservant l'ensemble  $X \cup \{\infty\}$  point par point.

Proposition. Il y a une façon canonique d'*orienter* les arêtes d'un  $X^\omega$ CCC.

Pour cela, faisons un voyage à la Duquesne (voir [Du]) :



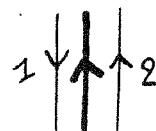
cas  $\otimes$



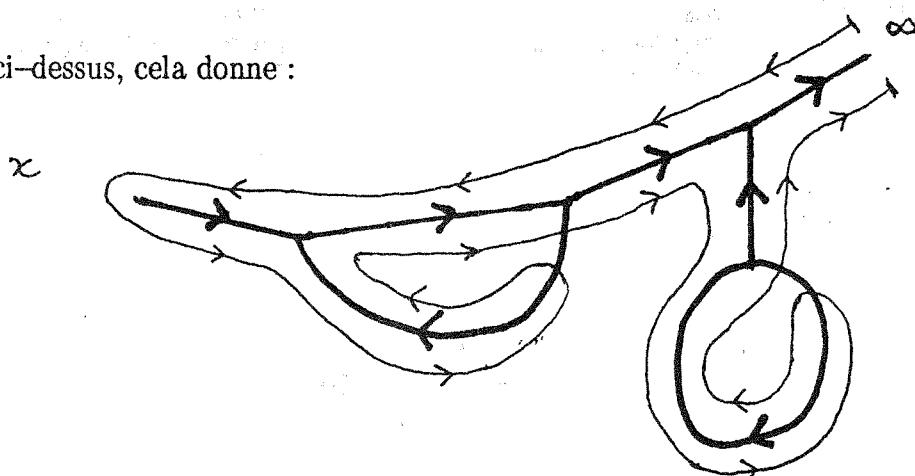
cas  $\wp$

Remarque. Les sommets trivalents se répartissent en sommets  $\otimes$  et sommets  $\wp$ , selon la façon dont on y arrive pour la deuxième fois.

Une arête sera orientée dans le sens du deuxième passage :



Pour l'exemple ci-dessus, cela donne :



Remarque. On notera le rôle particulier que l'on fait jouer au sommet monovalent  $\omega$ , et l'on parle ici de CCC pointé (sur  $\omega$ ). Ce passage d'un graphe non orienté à un graphe orienté avec un nombre fini d'entrées et une sortie s'inscrit dans un cadre général de transformations de preuves classiques en preuves intuitionnistes (voir [BV]). Il n'est donc plus étonnant que les CCC pointés puissent être dénotés par un système de  $\lambda$ -calcul :

Définition ( $\lambda$ -calcul linéaire).

- i) une variable  $x$  est un terme  
et on pose  $FV(x) = \{x\}$
- ii) application : si  $t$  et  $u$  sont deux termes avec  $FV(t) \cap FV(u) = \emptyset$   
alors  $[t,u]$  est un terme  
et on pose  $FV([t,u]) = FV(t) \cup FV(u)$

iii) abstraction : si  $t$  est un terme avec  $FV(t) = X \cup \{z\}$ ,  $z$  n'appartenant pas à  $X$ , alors  $\lambda z t$  est un terme et on pose  $FV(\lambda z t) = X$ .

Le  $X^\infty$ CCC traité en exemple ci-dessus est alors dénoté par  $[\lambda y[x,y], \lambda z z]$ .

### Remarques.

1) Deux  $X^\infty$ CCC sont égaux si et seulement si les termes associés sont égaux (à  $\alpha$ -conversion près).

2) Si l'on gradue les CCC par l'entier  $n$  égal à la moitié du nombre des sommets, alors  $n = b + f$

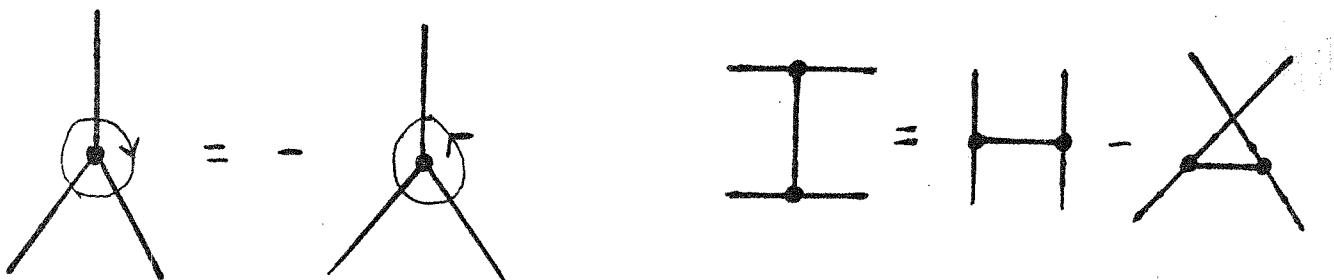
où  $b$  désigne le nombre de cycles indépendants dans le graphe, ou encore le nombre de sommets  $\wp$ , c'est à dire le nombre de " $\lambda$ " ou de variables liées ("bounded variables") dans le terme associé, et où  $f = \text{card}(X)$  est le nombre de variables libres ("free variables"). (Dans l'exemple,  $n = 3$ ,  $b = 2$ ,  $f = 1$ .)

3) On introduit des opérations sur les  $X^\infty$ CCC :

$\tau_{xx'}$  pour  $x, x' \in X$ , transpose  $x$  et  $x'$  dans l'étiquetage,

$\tau_{\infty x}$  pour  $x \in X$  transpose  $x$  et  $\infty$ ; l'échange de la sortie  $\tau_{\infty x}$ , qui est trivial sur les  $X^\infty$ CCC, ne l'est plus sur les termes associés (vérifier pour l'exemple que  $\tau_{\infty x}([\lambda y[x,y], \lambda z z]) = \lambda y[[\lambda z z, x], y]$ ).

En fait, la structure qui nous intéresse, en liaison avec les invariants de Vassiliev (voir [Ba] ou [Vo]), est le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les CCC, quotienté par les relations AS (antisymétrie) et IHX :



Un logicien, convaincu par l'approche "réseaux de preuves" de la logique, verra derrière cette structure, directement une "logique de Lie".

Point de vue  $\lambda$ -calcul, cela revient à quotienter les combinaisons linéaires de termes par les relations :

$$\begin{aligned} \text{AS} & \left\{ \begin{array}{l} [u, t] = -[t, u] \\ \lambda x \tau_{\infty x} t = -\lambda x t \end{array} \right. \\ \text{IHX} & \left\{ \begin{array}{l} [[t, u], v] + [[u, v], t] + [[v, t], u] = 0 \quad \text{Jacobi} \\ [\lambda x t, u] = \lambda x [t, u] - \lambda x [\tau_{\infty x} t, u] \\ \lambda x \lambda x' (u - \tau_{\infty x} u - \tau_{xx'} u) = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Nous renvoyons à [FV] pour plus de détails et de résultats.

Disons en conclusion que le sujet abordé dans cette deuxième partie, où l'on applique avec succès des techniques de logique linéaire, est assez différent du sujet principal discuté dans la première partie (logique linéaire quantique), mais lui est néanmoins relié (par l'intégrale de Kontsevich par exemple).

## RÉFÉRENCES

- [Ab] Abrusci, *Phase Semantics and Sequent Calculus for Noncommutative Classical Linear Logic*, JSL Vol 56 (91).
- [At] Atiyah, *Topological Quantum Field Theories*, Publ. Math. IHES 68 (89).
- [Ba] Bar-Natan, *On the Vassiliev Knot Invariants*, Preprint (92).
- [BCST] Blute, Cockett, Seely, Trimble, *Natural deduction and coherence for weakly distributive categories*, to appear in JPAA (94).
- [Bl] Blute, *Braided Proofnets and Categories*, in preparation.
- [BV] Bellin, Van De Wiele, *Proofnets and Typed Lambda Calculus*, Preprint (93).
- [Ca] Cartier, *Développements récents sur les groupes de tresses*, Sémin. Bourbaki N° 716 (89).
- [Du] Duquesne, *Réseaux de preuves, types principaux et  $\lambda$ -termes*, Thèse, Paris 7 (92).
- [Fl] Fleury, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, en préparation (95).
- [FV] Fleury, Van De Wiele, *Caractères Chinois et  $\lambda$ -calcul linéaire*, Preprint (93).
- [FY] Freyd, Yetter, *Coherence Theorems via Knot Theory*, JPAA 78 (92).
- [Gi1] Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science 50.1 (87).
- [Gi2] Girard, *Towards a Geometry of Interaction*, Contemporary Mathematics 92 (89).
- [JS1] Joyal, Street, *The Geometry of Tensor Calculus I*, Advances in Maths 88 (91).
- [JS2] Joyal, Street, *An Introduction to Tannaka duality and Quantum Groups*, Lect. Notes in Maths, Vol. 1488, Part II (91).
- [JS3] Joyal, Street, *Braided Tensor Categories*, Adv. in Maths 102 (93).
- [KM] Kelly, Mac Lane, *Coherence in Closed Categories*, JPAA 1 (71).
- [Kr] Krivine,  $\lambda$ -calcul, types et modèles, Masson (90).
- [La] Lafont, *Logiques, catégories et machines*, Thèse, Paris 7 (88).
- [LS] Lambek, Scott, *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, Cambridge University Press (86).
- [Me] Métayer, *Une étude homologique des réseaux de preuve*, Thèse, Paris 7 (94).
- [Re] Retoré, *Réseaux et Séquents ordonnés*, Thèse, Paris 7 (93).
- [Sh] Shum, *Tortile Tensor Categories*, JPAA 93 (94).
- [Va] Van de wiele, Rapport CNRS (94).
- [Vo] Vogel, *Invariants de Vassiliev des Noeuds*, Sem. Bourbaki, N° 769 (93).
- [Ye1] Yetter, *Quantales and (noncommutative) linear logic*, JSL Vol. 55 N° 1 (90).
- [Ye2] Yetter, *Framed tangles and a theorem of Deligne on braided deformations of Tannakian categories*, Contemp. Math. 134 (92).

# TYPES DE COLLECTION ET MONADES

Seyed Kazem LELLAHI

e-mail k1@ura1507.univ-paris13.fr

LIPN-CNRS URA 1507

Université Paris Nord, Institut Galilée  
Av. J.B. Clément 93430 Villetaneuse, France

## 1 Introduction

D'une manière intuitive appelons *type de collection* un type de donnée dont chaque valeur est formée d'une collection de valeurs d'autres types. Par exemple, dans les langages de programmation classiques (fonctionnels ou impératifs) les constructeurs 'liste' et 'ensemble' procurent des collections. Les *langages de programmation pour bases de données* possèdent en plus d'autres genres de constructeurs de type de collection tels que: 'relation n-aire' (plate ou imbriquée), multi-ensemble, 'classe', 'fonctions' (définies par extension), etc. D'où l'idée de donner une théorie des types qui fournissent de manière uniforme ce genre de constructions. Ce travail a pour objectif d'y parvenir en utilisant la théorie des monades.

Bien que la théorie des monades soit largement développée en mathématiques (voir par exemple [Man 76]), son utilisation en informatique est récente. A notre connaissance Moggi a été le premier à utiliser les monades pour exprimer les propriétés opérationnelles du calcul dans les langages de programmation classiques ([Mog 88], [Mog 91]). Wadler décrit les monades par une syntaxe appelée compréhension. Il montre aussi comment on peut utiliser les monades pour structurer les programmes fonctionnels [Wad 92a], [Wad 92b]. Mulry exprime la sémantique des types partiels de donnée par des monades [Mul 92]. Dans une série d'articles, Buneman, Breazu-Tannen, Naqvi et autres définissent des langages dans lesquels la notion de *récursion structurelle* est vue comme un constructeur puissant du langage. Plus précisément ce constructeur exprime que pour tout type  $T$  et tout monoïde commutatif et idempotent  $S$ , toute application de  $T$  vers  $S$  peut être prolongé à  $mT$  où  $m$  est le constructeur ensemble. Ils montrent que de tels langages ont la puissance d'expression, des langages de requête pour bases de données [BBN 91], [BS 91], [BBW 92].

Dans ce travail nous donnons une caractérisation catégorielle des monades définissant des collections. Dans de telles monades une notion de *récursion structurelle* peut être définie naturellement comme une propriété universelle d'initialité (voir [Lel 94]). Notre démarche consiste à assimiler un type à un objet d'une catégorie, et un constructeur de type de collection à une monade  $m$ . Les opérations du type  $mT$  construit par le constructeur  $m$  à partir du type  $T$ , s'obtiennent alors par l'instanciation des fonctions polymorphes sur le type  $T$ . De plus ces fonctions polymorphes sont souvent des transformations naturelles satisfaisant des équations. Ceci nous conduit à définir un constructeur de collection comme une *monade enrichie* par des transformations naturelles et des équations.

## 2 Préliminaires sur les Monades

Quand il n'y aura pas risque de confusion, nous noterons  $Fx$  l'image d'un élément (resp. un objet ou une flèche)  $x$  par une fonction (resp. un foncteur)  $F$ . Une transformation naturelle  $\tau$  d'un foncteur  $F$  vers un foncteur  $G$  sera notée  $\tau :: F \Rightarrow G$ .

### 2.1 Définitions et Exemples

Soit  $C$  une catégorie. La donnée d'une *monade* dans  $C$  consiste en la donnée d'un endofoncteur  $m : C \rightarrow C$ , d'une *unité*  $\eta :: id_C \Rightarrow m$ , et d'une *multiplication*  $\mu :: m^2 \Rightarrow m$  satisfaisant les équations  $\mu.m\mu = \mu.\mu m$  et  $\mu.m\eta = \mu.\eta m = id_m$ . Nous notons une telle monade par  $(m, \eta, \mu)$  ou simplement par  $m$ , quand il n'y a pas risque de confusion. Les exemples simples ci-dessous, fréquemment rencontrés en informatique, seront nos exemples de référence tout au long de cet article. Dans toute la suite  $Set$  désignera la catégorie des ensembles et des applications.

**Monade des Parties:** Notons  $\mathcal{S}$  l'endofoncteur de  $Set$  qui à tout ensemble  $X$  associe l'ensemble  $\mathcal{S}X$  des parties finies de  $X$  et qui à toute application  $f : X \rightarrow Y$  associe l'application  $\mathcal{S}f : \mathcal{S}X \rightarrow \mathcal{S}Y$ ,  $(\mathcal{S}f)(A) = f(A)$ . L'endofoncteur  $\mathcal{S}$  devient une monade si on définit l'unité et la multiplication par:

$$\eta_X(a) = \{a\}, \text{ pour tout ensemble } X \text{ et tout } a \text{ dans } X$$

$\mu_X(B) = \bigcup\{K \mid K \in B\}$ , pour tout ensemble  $X$  et tout  $B$  dans  $SX$ .

**Monade des multi-ensembles:** Pour tout ensemble  $X$  notons  $\mathcal{B}X$  l'ensemble des multi-ensembles finis<sup>1</sup> sur  $X$ . Clairement  $\mathcal{B}$  devient un endofoncteur de  $\mathcal{Set}$  si on associe à toute application  $f : X \rightarrow Y$  l'application  $\mathcal{B}f : \mathcal{B}X \rightarrow \mathcal{B}Y$ ,  $(\mathcal{B}f)(b) = b'$  où  $b'(y) = (\text{si } y \notin im(f) \text{ alors } 0 \text{ sinon } \sum_{x \in f^{-1}(y)} b(x))$ . L'endofoncteur  $\mathcal{B}$  devient une monade si on définit l'unité et la multiplication par:

$$\begin{aligned}\eta_X(x) &= b_x \text{ où } b_x : X \rightarrow N, b_x(y) = \delta_{xy} \text{ où } \delta \text{ est le symbole de Kronecker,} \\ \mu_X(B) &= b_B \text{ où } b_B : X \rightarrow N, b_B(x) = \sum_{B(b_i) \neq 0} b_i(x) B(b_i).\end{aligned}$$

**Monade des Listes:** Notons  $\mathcal{L}$  l'endofoncteur de  $\mathcal{Set}$  qui à tout ensemble  $X$  associe l'ensemble  $\mathcal{L}X$  des listes<sup>2</sup> sur  $X$  et à toute application  $f : X \rightarrow Y$  associe l'application  $\mathcal{L}f : \mathcal{L}X \rightarrow \mathcal{L}Y$ ,  $(\mathcal{L}f)([x_1, x_2, \dots, x_n]) = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]$ . L'endofoncteur  $\mathcal{L}$  devient une monade si on définit l'unité et la multiplication par:  
 $\eta_X(a) = [a]$  pour tout ensemble  $X$  et tout  $a$  dans  $X$   
 $\mu_X(L) = [x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn_m}]$ , pour tout ensemble  $X$  et toute liste  $L$  de  $\mathcal{L}X$ , où  $L = [[x_{11}, \dots, x_{1n_1}], \dots, [x_{m1}, \dots, x_{mn_m}]]$ .

## 2.2 Catégorie de Kleisli d'une Monade

Soit  $(m, \eta, \mu)$  une monade dans une catégorie  $\mathcal{C}$ . Nous notons  $\kappa\mathcal{C}$  la *catégorie de Kleisli* de  $\mathcal{C}$ . Les objets de cette catégorie sont ceux de  $\mathcal{C}$  et toute flèche  $u : X \rightarrow mY$  de  $\mathcal{C}$  est vue comme une flèche  $u^b : X \rightarrow_\kappa Y$  de  $\kappa\mathcal{C}$ . La composition dans  $\kappa\mathcal{C}$  est définie par:

$$v^b \circ u^b = (\mu_Z(mv)u)^b, \text{ pour tout } u^b : X \rightarrow_\kappa Y \text{ et tout } v^b : X \rightarrow_\kappa Z$$

L'identité de  $X$  dans  $\kappa\mathcal{C}$  est  $(\eta_X)^b$ . Notons que cette définition entraîne en particulier que pour deux flèches  $x^b$  et  $y^b$  de  $\kappa\mathcal{C}$ ,  $x^b = y^b$  si et seulement si  $x = y$ . Si, pour tout  $u : X \rightarrow mY$  de  $\mathcal{C}$ , on note la flèche  $\mu_Y(mu)$  par  $iter(u)$ , alors  $iter(u) : mX \rightarrow mY$ ; la composition de  $\kappa\mathcal{C}$  peut s'exprimer par:  $v^b \circ u^b = (iter(v)u)^b$ .

**Lemme 1 (Manes 1976)** Si  $(m, \eta, \mu)$  est une monade dans la catégorie  $\mathcal{C}$ , alors  $iter$  satisfait les équations:

- 1)  $iter(\eta_X) = id_{mX}$ , pour tout objet  $X$ ,
- 2)  $(iter(u))\eta_X = u$ , pour toute flèche  $u : X \rightarrow mY$ , et
- 3)  $iter(v)iter(u) = iter(iter(v)u)$ , pour toutes flèches  $u : X \rightarrow mY$ , et  $v : Y \rightarrow mZ$ .

Réciproquement supposons que dans une catégorie  $\mathcal{C}$  on puisse associer (a) à tout objet  $A$  un objet  $mA$ , et une flèche  $\eta_A : A \rightarrow mA$ , et (b) à toute flèche  $u : A \rightarrow mB$  une flèche  $iter(u) : mA \rightarrow mB$ , de sorte que 1, 2 et 3 ci-dessus sont satisfaites. Alors  $(m, \eta, \mu)$  est une monade, où  $\mu_X = iter(id_{TX})$ .  $\diamond$

La réciproque signifie que, sous ces conditions, on peut prouver que  $m$  est un foncteur,  $\eta$  et  $\mu$  sont des transformations naturelles et que les équations de monade sont satisfaites. Une monade définie de cette manière s'appellera un *triple de Kleisli*, noté  $(m, \eta, iter)$ .

Etant donnée une monade dans  $\mathcal{C}$ , on peut définir deux foncteurs:  $inc : \mathcal{C} \rightarrow \kappa\mathcal{C}$  et  $ext : \kappa\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  par:

$$incX = X, \text{ pour tout objet } X, \text{ et } inc(u) = (\eta_Y u)^b, \text{ pour toute flèche } u : X \rightarrow Y.$$

$$extX = mX, \text{ pour tout objet } X, \text{ et } extv^b = \mu_Y mv, \text{ pour toute flèche } v : X \rightarrow mY.$$

De plus,  $inc$  est un adjoint à gauche de  $ext$  (ce que nous noterons  $inc \dashv ext$ ).

## 3 Monades Enrichies

Par monade enrichie, nous entendons une monade munie de transformations naturelle et d'équations supplémentaires. Par la suite, pour une catégorie  $\mathcal{C}$ , les foncteurs projections de  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$  vers  $\mathcal{C}$  seront notés  $fst_{\mathcal{C}^2}$  et  $snd_{\mathcal{C}^2}$ . Quand on choisit dans une catégorie un produit  $X \times Y$  des objets  $X$  et  $Y$ , on notera  $fst_{X,Y}$  et  $snd_{X,Y}$  les projections de  $X \times Y$  vers  $X$  et  $Y$  respectivement. De même, l'unique flèche associée aux flèches  $f : T \rightarrow X$  et  $g : T \rightarrow Y$  sera notée  $\langle f, g \rangle$ .

### 3.1 Monades à Zéro

**Définition 1** On dira que  $(m, \eta, \mu, \epsilon)$  est une *monade à zéro* si  $(m, \eta, \mu)$  est une monade et  $\epsilon :: fst_{\mathcal{C}^2} \Rightarrow msnd_{\mathcal{C}^2}$  est une transformation naturelle vérifiant les équations ci-dessous:

$$i) \quad m(snd_{\mathcal{C}^2}).\epsilon(id_C \times m) = \epsilon, \quad ii) \quad m(snd_{\mathcal{C}^2}).m\epsilon = \epsilon(m \times id_C).$$

La transformation  $\epsilon$  est appelée *le zéro* de la monade.  $\diamond$

Donc  $m$  est à zéro si pour tout couple d'objets  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$  on a une flèche  $\epsilon_{X,Y} : X \rightarrow Y$  satisfaisant:

1.  $\epsilon_{X,Y}u = \epsilon_{Z,Y}$ , pour tous objets  $X, Y, Z$  et pour toute flèche  $u : Z \rightarrow X$ ;
2.  $(mv)\epsilon_{X,Y} = \epsilon_{X,T}$ , pour tous objets  $X, Y, T$  et toute flèche  $v : Y \rightarrow TX$ ;
3.  $\mu_Y \epsilon_{X,mY} = \epsilon_{X,Y}$ , pour tous objets  $X, Y$ ;
4.  $\mu_Y(m\epsilon_{X,Y}) = \epsilon_{mX,Y}$  pour tous objets  $X$  et  $Y$  (i.e.  $iter(\epsilon_{X,Y}) = \epsilon_{mX,Y}$ ).

<sup>1</sup>un multi-ensemble  $b$  sur  $X$  est une application presque partout nulle, de  $X$  vers l'ensemble  $N$  des entiers naturels. Une telle application peut être vue comme une 'partie' de  $X$  dans laquelle  $x$  apparaît  $n$  fois quand  $b(x) = n$ .

<sup>2</sup>une liste  $L$  sur  $X$  est une suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  notée  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . La liste vide est notée  $[]$  et s'appelle *nil*

Par exemple les monades  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{L}$  sont des monades à zéro. Dans  $\mathcal{S}$  la flèche  $\varepsilon_{X,Y}$  est la fonction constante égale à  $\emptyset$ , dans  $\mathcal{L}$  la flèche  $\varepsilon_{X,Y}$  est la fonction constante égale à  $nil$  et dans  $\mathcal{B}$  la flèche  $\varepsilon_{X,Y}$  est la fonction constante égale au multi-ensemble correspondant à la fonction nulle.

**Définition 2** Une catégorie  $\mathcal{C}$  est dite une *catégorie à zéro* si elle est munie d'une transformation naturelle  $0 :: fst_{\mathcal{C}^2} \Rightarrow snd_{\mathcal{C}^2}$

**Théorème 1 (Caractérisation des monades à zéro)** Une monade est à zéro si et seulement si sa catégorie de Kleisli est une catégorie à zéro et le foncteur  $ext : \kappa\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  préserve le zéro (i.e.  $(ext 0)_{X,Y} = 0_{X,Y}$ ). ◇

Dans le cas où la catégorie sous-jacente de la monade a un objet terminal,  $\varepsilon$  peut s'exprimer plus simplement:

**Proposition 1** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant un objet terminal  $1$ . Une monade  $(m, \eta, \mu)$  dans  $\mathcal{C}$  est une monade à zéro si et seulement s'il existe une transformation naturelle  $\zeta :: one \Rightarrow m$  satisfaisant  $\zeta = \mu \cdot \zeta m$ , où  $one$  est l'endofoncteur constant sur  $1$  (nous disons que  $\mu$  préserve  $\zeta$ ). ◇

En effet,  $\zeta$  peut être défini à partir de  $\varepsilon$  par  $\zeta = \varepsilon < one, id >$ . Inversement, en notant ! la transformation naturelle qui à  $X$  associe l'unique flèche de  $X$  vers  $1$ , on peut définir  $\varepsilon$  en fonction de  $\zeta$  par  $\varepsilon = \zeta(snd_{\mathcal{C}^2}).!(fst_{\mathcal{C}^2})$ .

### 3.2 Monade à Abstraction

Maintenant nous supposons que la catégorie  $\mathcal{C}$  est une catégorie à produits finis. On considère l'endofoncteur  $sqr$  et les transformations naturelles  $Id$ ,  $twist$  et  $diag$  comme suit<sup>3</sup>:

- $sqr : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $sqr(x) = x \times x$ , pour tout objet ou toute flèche  $x$  de  $\mathcal{C}$ ,
- $Id : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow id_{\mathcal{C}}$ ,  $Id_X = id_X$ , pour tout objet  $X$ ,
- $twist : sqr \Rightarrow sqr$ ,  $twist_X = < snd_{X^2}, fst_{X^2} >$ , pour tout objet  $X$ , et
- $diag : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow sqr$ ,  $diag_X = < Id_X, Id_X >$ , pour tout objet  $X$ .

**Définition 3** On dira que  $(m, \eta, \mu, \alpha)$  est une *monade à abstraction* si  $(m, \eta, \mu)$  est une monade et  $\alpha$  est une transformation naturelle de  $sqr$  vers  $m$ . La transformation  $\alpha$  est dite *l'abstraction* de la monade. ◇

**Définition 4** Une abstraction  $\alpha$  est dite *associative* si  $\mu \cdot \alpha m \cdot (\eta \times \alpha) = \mu \cdot \alpha m \cdot (\alpha \times \eta)$ , *commutative* si  $\alpha \cdot twist = \alpha$  et *idempotente* si  $\alpha \cdot diag = \eta$ . ◇

Par exemple, les monades  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{L}$  sont des monades à abstraction. Dans  $\mathcal{S}$  l'abstraction est définie par  $\{-, -\}_X(x, y) = \{x, y\}$ . Cette abstraction est associative, commutative et idempotente. Dans  $\mathcal{L}$  l'abstraction est définie par  $\{-, -\}_X(x, y) = [x, y]$ . Cette abstraction est associative, non commutative et non idempotente. De même on peut montrer que la monade  $\mathcal{B}$  est une monade à abstraction, où son abstraction  $\alpha$  est définie par  $\alpha_X(x, y) = b_{x,y}$  où  $b_{x,y}(z) = \delta_{x,z} + \delta_{y,z}$  ( $\delta$  étant le symbole de Kronecker). Cette abstraction est associative, commutative et non idempotente.

Dans une monade à abstraction, définissons  $\nu = \mu \cdot \alpha m$  et  $\iota = \nu \cdot (\eta \times Idm)$ , appelées respectivement *combinaison* et *ajout*. Par conséquent,  $\nu :: sqrm \Rightarrow m$  et  $\iota :: id \times m \Rightarrow m$ . Autrement dit pour tout objet  $X$ , on dispose de  $\nu_X : mX \times mX \rightarrow mX$  et  $\iota_X : X \times mX \rightarrow mX$ . Par exemple, pour  $\mathcal{S}$ , l'opération  $\nu_X$  est l'opération *union binaire* et  $\iota_X$  est l'*insertion* d'un élément de  $X$  dans un sous-ensemble de  $X$ ; pour  $\mathcal{L}$ , l'opération  $\nu_X$  est l'opération *append* et  $\iota_X$  est l'opération *cons* des listes, et pour  $\mathcal{B}$ , l'opération  $\nu_X$  est l'opération *concaténation* et  $\iota_X$  est l'*insertion*. Réciproquement, si on enrichit la monade  $(m, \eta, \mu)$  par une transformation naturelle  $\nu :: sqrm \Rightarrow m$  on peut définir  $\alpha$  par  $\alpha = \nu \cdot sqr \eta$ . De même, si on enrichit la monade par une transformation naturelle  $\iota :: id \times m \Rightarrow m$ , alors on peut définir  $\alpha$  par  $\alpha = \iota \cdot (Id \times \eta)$ . Ceci signifie que:

**Fait 1** Se donner une monade à abstraction  $(m, \eta, \mu, \alpha)$  est équivalent à se donner une monade enrichie par une transformation naturelle  $\nu :: sqrm \Rightarrow m$  ou bien se donner une monade enrichie par une transformation naturelle  $\iota :: id \times m \Rightarrow m$ .

**Proposition 2** i) L'abstraction  $\alpha$  est associative (resp. commutative, resp. idempotente) si et seulement si pour tout objet  $X$  l'opération  $\nu_X$  est associative (resp. commutative, resp. idempotente) au sens usuel.  
ii) Si  $\alpha$  est associative et idempotente alors pour tout objet  $X$ ,

$$\iota_X < pr_1, \iota_X > = \iota_X \quad (*)$$

et si  $\alpha$  est associative et commutative alors pour tout objet  $X$ ,

$$\iota_X < pr_1, \iota_X pr_2 > = \iota_X < pr_2, \iota_X pr_1 > \quad (**)$$

où  $pr_1 = fst_{X, X \times mX}$ ,  $pr_2 = fst_{X, mX} snd_{X, X \times mX}$ ,  $pr_3 = snd_{X, mX} snd_{X, X \times mX}$  et  $pr_{ij} = < pr_i, pr_j >$  pour  $1 \leq i < j \leq 3$ .

Dans nos exemples i) se traduit par les faits évidents qu'union binaire pour les ensembles, concaténation pour les multi-ensembles et append pour les listes sont des opérations associatives. De même ii) et iii) expriment qu'aucune des équations (\*) et (\*\*) ne sont satisfaites pour les listes, car *append* n'est ni commutative ni idempotente. L'équation (\*\*) est satisfait pour les ensembles et les multi-ensembles et s'exprime par:

$$insert_X(t, insert_X(s, A)) = insert_X(s, insert_X(t, A)), \text{ pour tout } t, s \text{ dans } X \text{ et } A \text{ dans } SX \text{ (resp. } BX).$$

Tandis que l'équation (\*) n'est pas satisfait que pour les ensembles et se traduit par:

$$insert_X(t, insert_X(t, A)) = insert_X(t, A), \text{ pour tout } t \text{ dans } X \text{ et tout } A \text{ dans } SX.$$

<sup>3</sup>Ne pas confondre  $Id$  et  $id$ .

### 3.3 Annoïdes

Définition 5 On dira que  $\mathcal{M} = (m, \eta, \mu, \epsilon, \alpha)$  est un *annoïde*<sup>4</sup> dans  $\mathcal{C}$  si  $(m, \eta, \mu, \epsilon)$  est une monade à zéro, et  $\alpha$  est une abstraction sur  $(m, \eta, \mu)$ . L'annoïde  $\mathcal{M}$  est dit *unitaire* si on a:

$$\mu.\alpha.m. < \zeta.!m, Idm > = Idm \text{ et } \mu.\alpha.m. < Idm, \zeta.!m > = Idm.$$

De même, on dira que  $\mathcal{M}$  est *associatif* ( resp. *commutatif*, resp. *idempotent*) si  $\alpha$  est associatif ( resp. commutatif, resp. idempotent).  $\diamond$

D'après cette définition la donnée d'un annoïde consiste à la donnée d'une catégorie  $\mathcal{C}$ , d'un endofoncteur  $m$ , et de quatre transformations naturelles  $\eta :: id \Rightarrow m$ ,  $\mu :: m^2 \Rightarrow m$ ,  $\zeta :: one \Rightarrow m$ ,  $\alpha :: sqr \Rightarrow m$  satisfaisant les équations de la monade et l'équation  $\mu.\zeta m = \zeta$ . Les équations de la définition 5 expriment que  $\zeta$  est un zéro (à droite et à gauche) de  $\nu = \mu.\alpha.m$ .

Par exemple,  $\mathcal{L}$  est un annoïde unitaire associatif,  $\mathcal{B}$  est unitaire, associatif et commutatif et  $\mathcal{S}$  est unitaire, associatif, commutatif et idempotent.

Soient  $m$  et  $m'$  deux endofoncteurs de  $\mathcal{C}$  et soit  $\gamma :: m \Rightarrow m'$  une transformation naturelle. Notons  $\gamma^{(2)}$  la transformation naturelle  $\gamma \circ \gamma$  où  $\circ$  est la composition horizontale des transformations naturelles.

Définition 6 Soient  $\mathcal{M} = (m, \eta, \mu, \zeta, \alpha)$  et  $\mathcal{M}' = (m', \eta', \mu', \zeta', \alpha')$  deux annoïdes. On dira que  $\gamma :: m \Rightarrow m'$  est un *convertisseur* de  $\mathcal{M}$  à  $\mathcal{M}'$  si  $\gamma$  satisfait  $\gamma.\eta = \eta'$ ,  $\gamma.\zeta = \zeta'$ ,  $\gamma.\alpha = \alpha'$ ,  $\gamma.\mu = \mu'.\gamma^2$ .  $\diamond$

Par exemple, les opérations usuelles qui convertissent les valeurs de types 'ensemble', 'liste' ou 'multi-ensemble' entre elles sont des convertisseurs, entre  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{B}$ , et  $\mathcal{L}$  dans le sens ci-dessus.

Il est clair que les annoïdes dans  $\mathcal{C}$  sont les objets d'une catégorie  $\text{Ringad}(\mathcal{C})$  dont les morphismes sont les convertisseurs. On notera par  $\text{Ringad}_p(\mathcal{C})$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Ringad}(\mathcal{C})$  qui a pour objets les annoïdes ayant la propriété  $p$  où  $p$  est une des propriétés  $u$  (pour unitaire),  $a$  (pour associatif),  $c$  (pour commutatif),  $i$  (pour idempotent) ou une conjonction de ces propriétés.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie à produits finis. Notons  $\text{Mag}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Dgr}(\mathcal{C})$ , resp.  $\text{Mon}(\mathcal{C})$ ) la catégorie des *magmas pointés* (resp. *demi-groupes*, resp. *monoïdes*) internes de  $\mathcal{C}$ . La sous-catégorie pleine de  $\text{Mag}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Dgr}(\mathcal{C})$ , resp.  $\text{Mon}(\mathcal{C})$ ) ayant pour objets les magmas satisfaisant la propriété  $p$  sera notée  $\text{Mag}_p(\mathcal{C})$ , où  $p \in \{a, c, i, a \wedge c, a \wedge i, c \wedge i, a \wedge c \wedge i\}$  (resp.  $p \in \{c, i, c \wedge i\}$ ). Nous noterons  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{V}_p(\mathcal{C})$  une de ces catégories et sous-catégories (mutatis mutandis), et nous omettrons  $\mathcal{C}$  quand il s'agit de la catégorie des ensembles<sup>5</sup>.

L'association de  $X$  à  $(X, e, u)$  définit un foncteur d'oubli  $U^{\mathcal{C}} : \mathcal{V}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ . Se donner un annoïde dans  $\mathcal{C}$  permet de définir un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$ . Plus précisément:

Théorème 2 Si  $\mathcal{M} = (m, \eta, \mu, \zeta, \alpha)$  est un annoïde (resp. annoïde unitaire, resp. annoïde unitaire et associatif) dans une catégorie  $\mathcal{C}$ , alors pour tout objet  $X$  le triplet  $(mX, \zeta_X, \nu_X)$  est un magma pointé (resp. demi-groupe, resp. monoïde) interne de  $\mathcal{C}$ . De plus si  $\alpha$  a la propriété  $p$ , alors  $(mX, \zeta_X, \nu_X)$  a aussi la propriété  $p$ .  $\diamond$

La naturalité de  $\zeta$  et de  $\nu$  entraînent que l'association du monoïde interne  $(mX, \zeta_X, \nu_X)$  à l'objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  définit un foncteur  $F_{m, \zeta, \alpha}^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{C})$  satisfaisant  $m = U^{\mathcal{C}} F_{m, \zeta, \alpha}^{\mathcal{C}}$ .

Soit  $\mathcal{V}$  une catégorie et  $U : \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{S}$  un foncteur d'oubli. Nous dirons que  $\mathcal{C}$  est une catégorie faiblement  $\mathcal{V}$ -enrichie s'il existe un foncteur  $H : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}$  vérifiant  $UH = \text{Hom}(-, -)$ .

Théorème 3 (Caractérisation des annoïdes) Pour qu'une monade  $(m, \eta, \mu)$  dans  $\mathcal{S}$  munie de deux transformations naturelles  $\zeta :: one \Rightarrow m$  et  $\alpha :: sqr \Rightarrow m$  soit un annoïde (resp. annoïde unitaire, resp. annoïde associatif) il faut et il suffit que la catégorie de Kleisli de la monade  $(m, \eta, \mu)$  soit une catégorie faiblement  $\mathcal{V}$ -enrichie où  $\mathcal{V}$  est la catégorie  $\text{Mag}$  (resp.  $\text{Dgr}$ , resp.  $\text{Mon}$ ). De plus  $\alpha$  a la propriété  $p$  si et seulement si la catégorie de Kleisli de  $(m, \eta, \mu)$  est une catégorie faiblement  $\mathcal{V}_p$ -enrichie.  $\diamond$

Autrement dit,  $(m, \eta, \mu, \zeta, \alpha)$  est un annoïde si et seulement si pour tout objet  $X, Y$  l'ensemble  $\text{Hom}_{\kappa\mathcal{C}}(X, Y)$  est muni d'une loi  $\otimes_{X, Y}$  et contient une flèche distinguée  $0_{X, Y} : X \rightarrow Y$  de sorte que:

$$(u^b \otimes_{Y, Z} v^b) \circ (x^b \otimes_{X, Y} y^b) = (u^b \circ x^b) \otimes_{X, Z} (v^b \circ y^b), \text{ pour tous } x^b, y^b : X \rightarrow_{\kappa} Y \text{ et tous } u^b, v^b : Y \rightarrow_{\kappa} Z.$$

Cet annoïde est unitaire si et seulement si on a:

$$0_{X, Y} \circ x^b = u^b \circ 0_{X, Y} = 0_{X, Z} \text{ pour tout } x^b : X \rightarrow_{\kappa} Y, u^b : Y \rightarrow_{\kappa} Z.$$

Cet annoïde est associatif (resp. commutatif, resp. idempotent) si et seulement si les lois  $\otimes_{X, Y}$  sont associatives (resp. commutatives, resp. idempotentes).

En fait, dans une monade enrichie par  $\zeta$  et  $\alpha$ , la loi  $\otimes_{X, Y}$  et la flèche  $0_{X, Y}$  sont définies par:

$$x^b \otimes_{X, Y} y^b = (\mu_X(\alpha_{mX}(x \times y)))^b, \quad 0_{X, Y} = (\zeta(!_X))^b.$$

Réciproquement, si la catégorie de Kleisli d'une monade est une catégorie faiblement  $\mathcal{V}$ -enrichie alors la monade peut être enrichie par  $\alpha :: \text{sqr}m \Rightarrow m$  et  $\zeta :: \text{one} \Rightarrow m$  définis par:

$$\alpha_T^b = (\eta_T \text{fst}_{T^2, T})^b \otimes_{T \times T, T} (\eta_T \text{snd}_{T^2, T})^b, \quad \zeta_T = \text{zero}_{\mathbf{1}, T}$$

où  $(\text{zero}_{X, Y})^b = 0_{X, Y}$ .

Dans le cas où la monade est définie par un triple de Kleisli le théorème s'exprime de la manière suivante:

<sup>4</sup>Ne pas confondre avec le terme annoïde utilisé par certains auteurs comme synonyme de catégorie préadditive.

<sup>5</sup>Dans ce cas chacune de ces catégories est la catégorie des modèles de l'esquisse de la structure algébrique correspondante.

**Proposition 3** Un triple de Kleisli  $(m, \eta, iter)$  muni d'un zéro  $\zeta$  est un annoïde si et seulement si pour tous objet  $X$  et  $Y$  de  $C$ ,  $Hom_C(X, mY)$  est muni d'une opération binaire  $\oplus_{X,Y}$  telle que:

1.  $iter(k)(u \oplus_{X,Y} v) = iter(k)u \oplus_{X,T} iter(k)v$
2.  $(iter(u) \oplus_{mX,Y} iter(v))h = iter(u)h \oplus_{Z,Y} iter(v)h$ , où  $u, v : X \rightarrow mY$ ,  $h : Z \rightarrow mX$ ,  $k : Y \rightarrow mT$ .

Cet annoïde est unitaire si et seulement si

$$3. u \oplus_{X,Y} \zeta_{X,Y} = u, \text{ pour tout } u : X \rightarrow mY, \quad 4. \zeta_{X,Y} \oplus_{X,Y} u = u, \text{ pour tout } u : X \rightarrow mY.$$

Cet annoïde est associatif (resp. commutatif, resp. idempotent) si et seulement si la loi  $\oplus_{X,Y}$  est associative (resp. commutative, resp. idempotente) pour tous  $X, Y$ .  $\diamond$

## 4 Type de Collection

Soit  $\mathcal{M} = (m, \eta, \zeta, \alpha)$  un annoïde dans une catégorie  $C$ . Regardons les objets de la catégorie  $C$  comme des types et les opérations de  $\mathcal{M}$  comme des fonctions polymorphes. Pour tout type  $T$ , ces opérations permettent de construire les termes de  $mT$  à partir de ceux de  $T$ . Ce sont donc des constructeurs de termes. La naturalité exprime que ces constructions sont stables par les morphismes de  $C$ . Les équations de  $\mathcal{M}$  sont des équations 'polymorphes'. Ceci suggère de voir  $\mathcal{M}$  comme un 'type de données du second ordre dont la sémantique est exprimée par les équations. Ci-dessous nous présentons brièvement un langage permettant de spécifier et manipuler ce genre de type de données (pour plus de détails voir [Lel 94]).

**Grammaire:** Les types  $\mathcal{T}$  et les constructeurs  $\mathcal{K}$  sont définis par la grammaire ci-dessus:

$$\mathcal{T} ::= \mathbf{1} \mid \mathcal{T}_0 \mid \mathcal{K}\mathcal{T} \quad \mathcal{K} ::= \mathcal{K}_0 \mid id \mid \mathcal{K}\mathcal{K} \mid \tilde{T} \mid id \times \mathcal{T}$$

où  $\mathbf{1}$  est un type particulier avec un seul élément,  $\mathcal{T}_0$  est un ensemble de types de base, et  $\mathcal{K}_0$  est un ensemble de constructeurs de base. En fait,  $\mathcal{K}_0$  contient des constructeurs non spécifiés du genre  $S, L, B$ , etc. Ce système de type permet de construire les types rencontrés dans les langages de programmation pour bases de données.

**Règle de Formation de Fonctions:** Notons qu'à ce stade, ce système de type n'a pas de constructeur de fonctions. Toutefois le langage fournit deux sortes de fonctions: les fonctions polymorphes (i.e. fonctions paramétrées par les types) et les fonctions non polymorphes. Les règles ci-dessous permettent de construire des fonctions polymorphes à partir des types, des constructeurs et des primitives. Les fonctions non polymorphes du langage sont soit des primitives des types de base, soit sont obtenues à partir des constructeurs ou des fonctions polymorphes par les règles d'instanciation ci-dessus, soit sont obtenues à partir de ces dernières par composition. Dans les règles qui suivent nous avons utilisé la notation  $f : T \rightarrow S$  pour une fonction non polymorphe  $f$  de  $T$  vers  $S$  et la notation  $\gamma : a \Rightarrow b$  pour une fonction polymorphe  $\gamma$  de  $a$  vers  $b$ . De plus nous adoptons les notations:  $t : T$  pour  $t$  est une valeur de type  $T$ ,  $T : \mathcal{T}$  pour  $T$  est un type, et  $a : \mathcal{K}$  pour  $a$  est un constructeur.

**Universalité:**

$$\frac{}{Id :: id \Rightarrow id} \quad \frac{}{! :: id \Rightarrow one}$$

**Produit:**

$$\frac{T : \mathcal{T}}{fst^T :: id \times T \Rightarrow id} \quad \frac{T : \mathcal{T}}{snd^T :: id \times T \Rightarrow \tilde{T}} \quad \frac{a :: \mathcal{K} \quad b :: \mathcal{K} \quad T : \mathcal{T} \quad \beta :: a \Rightarrow b \quad \varphi :: a \Rightarrow \tilde{T}}{\langle \beta, \varphi \rangle^{a, \tilde{T}} : a \Rightarrow b \times T}$$

**Composition:**

$$\frac{\beta :: a \Rightarrow b \quad \theta :: b \Rightarrow c}{\theta \beta :: a \Rightarrow c}$$

**Actions à gauche et à droite:**

$$\frac{\beta :: a \Rightarrow b \quad c :: \mathcal{K}}{c\beta :: ca \Rightarrow cb} \quad \frac{\beta :: a \Rightarrow b \quad c :: \mathcal{K}}{\beta c :: ac \Rightarrow bc}$$

**Instanciation:**

$$\frac{\beta :: a \Rightarrow b \quad T : \mathcal{T}}{\beta_T : aT \rightarrow bT} \quad \frac{f : S \rightarrow T \quad a :: \mathcal{K}}{af : aS \rightarrow aT}$$

Par l'application des ces règles aux primitives polymorphes on obtient des *expressions polymorphes*. Une déclaration de la forme  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , sont des expressions polymorphes, est une *équation polymorphe*.

**Définition 7** Un *format de m-collection* est un 5-uplet  $\Sigma_m = (m, \eta, \mu, \zeta, \alpha)$  où  $m$  est un constructeur de base (i.e. un élément de  $\mathcal{K}_0$ ) et  $\eta :: id \Rightarrow m$ ,  $\mu :: m^2 \Rightarrow m$ ,  $\zeta :: one \Rightarrow m$ , et  $\alpha :: sqr \Rightarrow m$  sont des fonctions polymorphes. Les polymorphismes  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\zeta$  et  $\alpha$  seront appelés les *opérations de  $\Sigma_m$* .  $\diamond$

Définition 8 Un *m-constructeur de collection* est un couple  $\mathbf{B}_m = (\Sigma_m, E_m)$  où  $\Sigma_m = (m, \eta, \mu, \zeta, \alpha)$  est un format de collection et  $E_m$  est un ensemble d'équations polymorphes contenant au moins les équations ci-dessus:

- (E1)  $\mu.\mu m = \mu.m\mu$  ( $\mu$  est associatif), (E2)  $\mu.m\eta = (Id)m = \mu.\eta m$  ( $\eta$  est l'unité de  $\mu$ ),
- (E3)  $\mu.\zeta m = \zeta$  ( $\mu$  préserve  $\zeta$ ), (E4)  $\mu.\alpha m < (Id)m, \zeta.!m > = (Id)m$  ( $\zeta$  est un zéro à gauche de  $\alpha$ ),
- (E5)  $\mu.\alpha m < \zeta.!m, (Id)m > = (Id)m$  ( $\zeta$  est un zéro à droite de  $\alpha$ ).

On dira que le constructeur de collection  $\mathbf{B}_m$  est *associatif* (resp. *commutatif*, resp. *idempotent*) si l'équation (E6) (resp. (E7), resp. (E8)) ci-dessous est satisfaite:

$$(E6) \quad \mu.\alpha m.(\eta \times \alpha) = \mu.\alpha m.(\alpha \times \eta) \quad (E7) \quad \alpha.\text{twist} = \alpha \quad (E8) \quad \alpha.\text{diag} = \eta. \quad \diamond$$

Soit  $\mathbf{B}_m = (\Sigma_m, E_m)$  un *m-constructeur de collection*. Par instantiation des opérations et équations de  $\mathbf{B}_m$  pour un type  $T$  on obtient un type de donnée  $\mathbf{B}_m T = (\Sigma_m T, E_m T)$  que nous appelons le *type des m-collections*. Toute valeur de ce type est appelé une *m-collection*.

Comparant avec la théorie classique des spécifications algébriques des types, on peut voir  $\Sigma_m$  comme une signature,  $\Sigma_m T$  comme une algèbre de  $\Sigma_m$ , et quand toutes les équations sont satisfaites  $\mathbf{B}_m T$  comme un modèle de  $\Sigma_m$ .

## 5 Conclusion et Perspectives

Le terme annoïde (i.e. ringad en anglais) a été emprunté à des travaux de Wadler, Trinder et autres [Wad 90], [WT 91]. Pour ces auteurs un annoïde est en quelque sorte un triple de Kleisli ayant un zéro à gauche et satisfaisant les équations 1, 3 et 4 de la Proposition 3. Dans ce travail nous avons introduit la notion de monade enrichie et nous avons donné une caractérisation de telles monades via la notion de catégories faiblement enrichies. Nous avons brièvement montré comment cette caractérisation permet de modéliser les types de collection rencontrés dans les langages de programmation pour bases de données. Notons que la catégorie de base envisagée dans ce travail n'est pas une catégorie cartésienne fermée. De ce fait la théorie des types introduite dans la section 4, ne couvre pas toute la puissance souhaitée. Notre objectif dans des travaux à venir est d'augmenter le degré d'expressivité de ce langage de type et d'étendre notre généralisation aux structures multi-sortes, outil indispensable pour les bases de données orientées-objet.

Par manque de place, le développement détaillé de ce travail ainsi que d'autres résultats intéressants n'ont pas pu être inclus ici. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [Lel 95].

## Références

- [BBN 91] V. Breazu-Tannen, P. Buneman, S. Naqvi. *Structural Recursion as a Query Language*. In Database Programming Languages : Bulk Types and Persistent Data, The Third International Workshop; 9-19 (1991).
- [BBW 92] V. Breazu-Tannen, P. Buneman, L. Wong. *Naturally Embedded Query Languages*. In Database Theory - ICDT 92, 4th International Conference, LNCS No 646, 140-154(1992).
- [BS 91] V. Breazu-Tannen, R. Subrahmanyam. *Logical and Computational Aspects of Programming with Sets/Bags/Lists*. Automata, Languages and Programming; 18th International Colloquium, 60-75 (1991).
- [Lel 94] S.K. Lellahi. *Towards a Characterisation of bulk Types*. Rapport de Recherche no 94-01, LIPN-URA1507 du CNRS, Univ. Paris 13 (juin 1994).
- [Lel 95] S.K. Lellahi. *Types de Collection et Monades*. Rapport de Recherche, LIPN (à paraître).
- [Man 76] E. Manes. *Algebraic Theories*, vol 26 of Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1976.
- [Mog 88] E. Moggi. *Computational lambda-calculus and Monads*. In IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Asilomar, California, June 1989.
- [Mog 91] E. Moggi. *Notion of Computation and monads*. In Information and Computation 93, 55-92 (1991).
- [Mul 92] P.S. Mulry. *Monad and Algebra in the Semantics of Partial Data Types*. Theoretical Computer Science 99 (1992) 141-155. [WT 91]
- [Wad 90] P. Wadler. *Notes on Monads and Ringads*. Glasgow university (1991).
- [Wad 92a] P. Wadler. *Comprehending Monads*. Math. Struct. in Com. Science 1992, vol 2, pp. 461-493.
- [Wad 92b] P. Wadler. *The Essence of Functional Programming*. ACM Press : Nineteenth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Programming Languages (1992) 1-14.
- [WT 91] D. Watt and P. Trinder. *Towards a Theory of Bulk Types*. ESPRIT BRA PROJECT 3070, Technical Report Series FIDE/91/26, Glasgow University (1991).

## Les représentations naturelles de $\mathcal{P}X$ dans $\mathcal{PP}X$

Journées *Catégories, Algèbres, Esquisses et Néo-esquisses*,  
Caen (France), 27-30 Septembre 1994

Pierre Damphousse  
*Faculté des Sciences de Tours*  
*Parc de Grandmont*  
*37200 Tours*  
*France*  
*damphous@univ-tours.fr*

et

René Guitart  
*Université Denis Diderot Paris 7*  
*2 Place Jussieu*  
*75251 Paris Cedex 05*  
*France*

### 1 Origine et but du travail

Ce travail est né de préoccupations de la théorie des langages dans lesquelles on considère un langage formel sur un alphabet  $\Sigma$  comme une suite (le plus souvent finie) de points  $\{x_i \in \mathcal{P}^i X\}_{i \in I}$ , où  $X = \Sigma^*$ . Dans ce contexte, il est nécessaire de comprendre les liens naturels entre  $\mathcal{P}X$  et  $\mathcal{P}^2X$ .

La construction de CANTOR de l'ensemble  $\mathcal{P}X$  de tous les sous-ensembles d'un ensemble  $X$  peut être considérée comme un foncteur  $P_1$  de trois façons, une contravariante et deux covariantes, notées

$$\underline{\mathbf{C}}, \underline{\exists}, \underline{\forall} \quad (a)$$

et définies en posant pour toute application  $f : X \rightarrow Y$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}f &= f^* : \mathcal{P}Y \rightarrow \mathcal{P}X & : B \mapsto f^*B = \{x \in X; fx \in B\}; \\ \underline{\exists}f &: \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}Y & : A \mapsto \underline{\exists}fA = \{y \in Y; \exists x((y = fx) \wedge (x \in A))\}; \\ \underline{\forall}f &: \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}Y & : A \mapsto \underline{\forall}fA = \{y \in Y; \forall x((y = fx) \Rightarrow (x \in A))\}; \end{aligned}$$

Par suite, la construction  $\mathcal{P}^2X = \mathcal{PP}X$  peut être considérée comme un foncteur  $P_2$  de neuf façons, quatre contravariantes et cinq covariantes, à savoir

$$\underline{\mathbf{C}}\underline{\exists}, \underline{\mathbf{C}}\underline{\forall}, \underline{\exists}\underline{\mathbf{C}}, \underline{\forall}\underline{\mathbf{C}} \text{ et } \underline{\mathbf{C}}^2, \underline{\exists}^2, \underline{\exists}\underline{\forall}, \underline{\forall}\underline{\exists}, \underline{\forall}^2. \quad (b)$$

Nous décrivons complètement le système de toutes les transformations naturelles d'un foncteur quelconque  $P_1$  de (a) vers un foncteur quelconque de (a) ou (b) de même variance que

$P_1$ , et parmi elles celles qui “représentent naturellement”  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{PP}$ . Ce qui nous permet de situer catégoriquement dans une même perspective le calcul booléen et l’arithmétique des cardinaux.

## 2 Du niveau 1 au niveau 1

**Proposition 1** *Toutes les transformations naturelles d’un foncteur de (a) vers un autre foncteur de (a) de même variance sont déterminées par les fonctions de  $\mathcal{P}X$  vers  $\mathcal{P}X$  suivantes :  $A \mapsto \emptyset$ ,  $A \mapsto X$ ,  $A \mapsto A$ ,  $A \mapsto \mathbf{C}_X A$ .*

Nous notons par la suite  $\nu_X : \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}X$  l’application définie par  $A \mapsto \mathbf{C}_X A$ .

## 3 Du niveau 1 au niveau 2 : les cas contravariants

**Proposition 2** *Les transformations naturelles du foncteur  $\underline{\mathbf{C}}$  vers le foncteur  $\exists \underline{\mathbf{C}}$  sont au nombre de 16, et sont déterminées par les 16 fonctions qui envoient respectivement  $A \subset X$  sur :*

$$\begin{array}{llll} \alpha_X^{0000} A = \emptyset & \alpha_X^{0001} A = \{X\} & \alpha_X^{0010} A = \{\mathbf{C}_X A\} & \alpha_X^{0011} A = \{\mathbf{C}_X A, X\} \\ \alpha_X^{0100} A = \{A\} & \alpha_X^{0101} A = \{A, X\} & \alpha_X^{0110} A = \{A, \mathbf{C}_X A\} & \alpha_X^{0111} A = \{A, \mathbf{C}_X A, X\} \\ \alpha_X^{1000} A = \{\emptyset\} & \alpha_X^{1001} A = \{\emptyset, X\} & \alpha_X^{1010} A = \{\emptyset, \mathbf{C}_X A\} & \alpha_X^{1011} A = \{\emptyset, \mathbf{C}_X A, X\} \\ \alpha_X^{1100} A = \{\emptyset, A\} & \alpha_X^{1101} A = \{\emptyset, A, X\} & \alpha_X^{1110} A = \{\emptyset, A, \mathbf{C}_X A\} & \alpha_X^{1111} A = \{\emptyset, A, \mathbf{C}_X A, X\} \end{array}$$

De manière similaire, il y a 16 transformations naturelles de  $\underline{\mathbf{C}}$  vers le foncteur  $\forall \underline{\mathbf{C}}$ . Elles sont déterminées par les 16 fonctions  $\beta_X^c A = \mathcal{P}X - \alpha_{\bar{X}}^{\bar{c}} A$ , où  $\bar{c}$  désigne la négation composante par composante de  $c$ .

Ces ensembles de 16 transformations naturelles ont canoniquement une structure d’algèbre de Boole : pour chaque valeur de  $c$  et  $d$ , et pour le  $\wedge$  et le  $\vee$  composante par composante,

$$\alpha_X^{c \wedge d} A = \alpha_X^c A \cap \alpha_X^d A, \quad \alpha_X^{c \vee d} A = \alpha_X^c A \cup \alpha_X^d A, \quad \beta_X^{c \wedge d} A = \beta_X^c A \cap \beta_X^d A, \quad \text{etc}$$

**Proposition 3** *Les transformations naturelles du foncteur  $\underline{\mathbf{C}}$  vers le foncteur  $\underline{\mathbf{C}} \forall$  sont au nombre de 16, et sont déterminées par les 16 fonctions suivantes :*

- ▷  $\mu_X^{0000} A = \emptyset$ ;
- ▷  $\mu_X^{0001} A = \{X\}$ ;
- ▷  $\mu_X^{0010} A = \{B : \mathbf{C}_X A \subset B \neq X\}$ ;
- ▷  $\mu_X^{0011} A = \{B : \mathbf{C}_X A \subset B\}$ ;
- ▷  $\mu_X^{0100} A = \{B : A \subset B \neq X\}$ ;

Les représentations naturelles de  $\mathcal{P}X$  dans  $\mathcal{PP}X$

- ▷  $\mu_x^{0101}A = \{B : A \subset B\};$
- ▷  $\mu_x^{0110}A = \{B : (A \subset B \text{ ou } \mathbf{C}_X A \subset B) \text{ et } (B \neq X)\};$
- ▷  $\mu_x^{0111}A = \{B : (A \subset B \text{ ou } \mathbf{C}_X A \subset B)\};$
- ▷  $\mu_x^{1000}A = \{B : \mathbf{C}_X B \cap A \neq \emptyset \text{ et } \mathbf{C}_X B \cap \mathbf{C}_X A \neq \emptyset\};$
- ▷  $\mu_x^{1001}A = \{B : \mathbf{C}_X B \cap A \neq \emptyset \text{ et } \mathbf{C}_X B \cap \mathbf{C}_X A \neq \emptyset\} \cup \{X\};$
- ▷  $\mu_x^{1010}A = \{B : \mathbf{C}_X B \cap A \neq \emptyset\};$
- ▷  $\mu_x^{1011}A = \{B : \mathbf{C}_X B \cap A \neq \emptyset\} \cup \{X\};$
- ▷  $\mu_x^{1100}A = \{B : \mathbf{C}_X B \cap \mathbf{C}_X A \neq \emptyset\};$
- ▷  $\mu_x^{1101}A = \{B : \mathbf{C}_X B \cap \mathbf{C}_X A \neq \emptyset\} \cup \{X\};$
- ▷  $\mu_x^{1110}A = \{B : X \neq B \subset X\};$
- ▷  $\mu_x^{1111}A = \mathcal{P}X;$

*De manière similaire, il y a 16 transformations naturelles de  $\underline{\mathbf{C}}$  vers le foncteur  $\underline{\mathbf{C}}\exists$  ; comme dans la proposition précédente, ces ensembles de 16 transformations naturelles ont chacun canoniquement une structure d'algèbre de Boole.*

Il y a donc  $4 \times 16 = 64$  transformations naturelles de  $\underline{\mathbf{C}}$  vers les foncteurs contravariants de niveau 2 (i.e. de (b)).

Par la suite, nous notons  $\pi_X, \psi_X, \nu_X, \delta_X$  respectivement les applications

$$\begin{aligned}\pi_X : \mathcal{P}X &\longrightarrow \mathcal{P}^2X \\ A &\longmapsto \{B \in \mathcal{P}X; \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)\} \\ \psi_X : \mathcal{P}X &\longrightarrow \mathcal{P}^2X \\ A &\longmapsto \{B \in \mathcal{P}X; \exists x(x \in B \wedge x \in A)\} \\ \nu_X : \mathcal{P}^2X &\longrightarrow \mathcal{P}X \\ \mathcal{A} &\longmapsto \{x \in X; \exists A(x \in A \wedge A \in \mathcal{A})\} \\ \delta_X : \mathcal{P}^2X &\longrightarrow \mathcal{P}X \\ \mathcal{A} &\longmapsto \{x \in X; \forall A(x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{A})\}\end{aligned}$$

Clairement :  $\nu_{\mathcal{P}X}\pi_X\nu_X = \psi_X$  et  $\delta_X = \nu_X\nu_X\nu_{\mathcal{P}X}$ , ainsi que  $\nu_Y\exists f\nu_X = \forall f$  et  $\nu_X\underline{\mathbf{C}}f\nu_Y = \underline{\mathbf{C}}f$ . Nous appelons ce type de relations *des relations de conjugaison par  $\nu$* . Dans les propositions précédentes, les "de manière similaire" correspondent à des "résultats obtenus par conjugaison".

Un ensemble de parties est ordonné par l'inclusion (ou par son opposée). Parmi les 64 transformations mentionnées plus haut, certaines ont des composantes qui sont des foncteurs (entre ensembles ordonnés). Parmi elles, certaines ont des composantes qui ont des adjoints, à

droite ou à gauche selon le choix de l'ordre, et parmi celles-ci, certaines ont des composantes qui sont des foncteurs monadiques (de fait, ces dernières ont des composantes injectives admettant une section monotone naturelle). Dans ce cas, on dit que l'on a *une représentation naturelle de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{PP}$* .

**Proposition 4** *Parmi les 64 transformations de source  $\underline{\mathbf{C}}$  et de but un foncteur de niveau 2 contravariant, il n'y a que 8 représentations naturelles de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{PP}$ , qui sont obtenues par conjugaison ou par composition simple avec  $\nu$ , à partir de  $\pi$  ou de  $\psi$  (qui sont elles-mêmes conjuguées). D'autre part, il y en a 32 qui ont des composantes monotones, parmi lesquelles il y en a 14 dont les composantes ont des adjoints qui de surcroît sont naturels.*

#### 4 Du niveau 1 au niveau 2 : les cas covariants

Il y a cinq formes covariantes de  $\mathcal{P}^2$  :  $\underline{\exists}^2$ ,  $\underline{\exists}\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{A}\underline{\exists}$ ,  $\mathbb{A}^2$  et  $\underline{\mathbf{C}}^2$  ; il y a donc en tout  $2 \times 5 = 10$  cas à considérer dans l'étude des transformations  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^2$ . Nous considérons ici les cas  $\underline{\exists} \rightarrow \underline{\exists}^2$  et  $\underline{\exists} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}^2$ , les autres cas se déduisant par conjugaison ou par composition avec  $\nu$ .

##### 4.1 LES TRANSFORMATIONS $\underline{\exists} \rightarrow \underline{\exists}^2$

###### 4.1.1 Nature des transformations

Soit  $\lambda : \underline{\exists} \rightarrow \underline{\exists}^2$  une transformation naturelle. Pour chaque  $f : X \rightarrow Y$  on a

$$\begin{array}{ccc} \underline{\exists}X & \xrightarrow{\underline{\exists}f} & \underline{\exists}Y \\ \lambda_X \downarrow & & \downarrow \lambda_Y \\ \underline{\exists}^2X & \xrightarrow{\underline{\exists}^2f} & \underline{\exists}^2Y \end{array} \quad \underline{\exists}^2f\lambda_X A = \lambda_Y \underline{\exists}f A \quad (*)$$

c'est-à-dire  $\{f(B) : B \in \lambda_X A\} = \lambda_Y f(A)$ . En particulier, si  $f$  est une inclusion  $X \subset Y$ , on a  $\lambda_X A = \lambda_Y A$  pour tous les  $A \subset X \subset Y$ . On en déduit que les valeurs de deux composantes  $\lambda_X$  et  $\lambda_Y$  de  $\lambda$  en un point commun  $A \subset X \cap Y$  sont les mêmes, i.e. ne dépendent que de  $A$  et non pas de l'ensemble contenant  $A$ . En particulier, si  $A \subset X$ ,  $\lambda_X A = \lambda_A A$ . Une transformation naturelle  $\lambda : \underline{\exists} \rightarrow \underline{\exists}^2$  détermine donc pour chaque ensemble  $A$  un sous ensemble  $BA$  de  $\underline{\exists}A$ , à savoir  $BA = \lambda_A A$  ; de plus, si  $f : X \rightarrow Y$ , la commutativité de (\*) signifie que  $\underline{\exists}f$  induit par restriction une application (surjective) de  $BX \rightarrow Bf(X) \subset BY$ , qui envoie chaque  $A \in BX$  sur  $f(A) \in Bf(X)$ . Une transformation naturelle  $\lambda : \underline{\exists} \rightarrow \underline{\exists}^2$  définit donc un *sous-foncteur de  $\underline{\exists}$* .

Inversement, supposons donné un sous-foncteur  $B$  de  $\underline{\exists}$ , i.e. un choix, pour chaque ensemble  $X$ , d'un sous-ensemble  $BX$  de  $\underline{\exists}X$  tel que pour tout ensemble  $A \in BX$  on ait  $\underline{\exists}f A \in BY$  ; on pose alors  $Bf A = \underline{\exists}f A$  :

$$\begin{array}{ccc} \underline{\exists}X & \xrightarrow{\underline{\exists}f} & \underline{\exists}Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ BX & \xrightarrow{Bf} & BY \end{array} \quad (**)$$

Les représentations naturelles de  $\mathcal{P}X$  dans  $\mathcal{PP}X$

Pour chaque ensemble  $X$ , soit  $\lambda_X A = BA$ . Un calcul immédiat montre que  $\lambda = \{\lambda_X\}$  est une transformation naturelle  $\underline{\exists} \rightarrow \underline{\exists}^2$ .

*Les sous-foncteurs de  $\underline{\exists}$  classifient naturellement les transformations naturelles  $\underline{\exists} \rightarrow \underline{\exists}^2$ .*

#### 4.1.2 Les sous-foncteurs de $\underline{\exists}$

Un sous-foncteur  $B$  de  $\underline{\exists}$  est un endofoncteur de **Ens** qui associe à chaque ensemble  $X$  un sous-ensemble de  $BX$  de  $\underline{\exists}X$  de telle manière que les inclusions  $BX \subset \underline{\exists}X$  rendent le diagramme (\*\*\*) commutatif. On a entre autres les sous-foncteurs suivants de  $\underline{\exists}$  :

- $\widehat{\emptyset}$  : envoie  $X$  sur  $\emptyset$  ;
- $\underline{\exists}^{--}$  : envoie  $X$  sur  $\{A \in \underline{\exists}X : A \neq \emptyset\}$  ;
- $\underline{\exists}^-$  : envoie  $X$  sur  $\emptyset$  si  $X = \emptyset$ , et sur  $\underline{\exists}X$  si  $X \neq \emptyset$ .

On observera que pour chaque  $X$  on a  $\underline{\exists}^{--}X \subset \underline{\exists}^-X \subset \underline{\exists}X$ , ce que l'on convient de noter  $\underline{\exists}^{--} \subset \underline{\exists}^- \subset \underline{\exists}$ .

La description et la classification de tous les sous-foncteurs de  $\underline{\exists}$  reposent sur trois lemmes techniques.

**Lemme 1** : Si  $B \neq \widehat{\emptyset}$ , alors pour chaque  $X \neq \emptyset$ ,  $BX \neq \emptyset$ .

**Lemme 2** : Si  $B \neq \widehat{\emptyset}$ , et si  $\emptyset \neq A \in BX$ , alors pour tous les  $A' \in BX$  tels que  $0 < |A'| \leq |A|$ , on a  $A' \in BX$ .

**Lemme 3** : Chaque sous-foncteur  $B \neq \widehat{\emptyset}$  de  $\underline{\exists}$  permet d'associer canoniquement à chaque  $X \neq \emptyset$  un cardinal  $\beta_X$  donné par  $\beta_X = \text{Sup}\{|A| : A \in BX\}$  (la borne de  $X$  induite par  $B$ ). On a (a) si  $\beta_Y \leq |X|$ , alors  $\beta_Y \leq \beta_X$  ; (b) si  $|Y| < \beta_X$ , alors  $\beta_Y = |Y|$ .

Un sous-foncteur de  $\underline{\exists}$  est dit *cardinalement borné* s'il existe un cardinal  $\beta$  tel que pour chaque ensemble  $X$  et pour chaque  $A \in BX$ ,  $|A| \leq \beta$ . Si  $B$  est borné, les bornes induites par  $\beta$  sont aussi bornées, et inversement, si les  $\beta_X$  forment une classe bornée,  $B$  est borné car  $B\emptyset$  est soit  $\emptyset$ , soit  $\{\emptyset\}$ . La *borne cardinale* de  $B$  est alors définie par

$$\text{Inf}\{\beta : \forall X, \forall A \in BX, |A| \leq \beta\}.$$

**Proposition 5** *Les sous-foncteurs non cardinalement bornés de  $\underline{\exists}$  sont  $\underline{\exists}^{--}$ ,  $\underline{\exists}^-$  et  $\underline{\exists}$ .*

Pour décrire les sous-foncteurs bornés de  $\underline{\exists}$ , nous utiliserons la notation suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\exists}_{<\alpha} X &= \{A \in \underline{\exists}X : |A| < \alpha\} \\ \underline{\exists}_{\leq\alpha} X &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } X = \emptyset \\ \underline{\exists}_{<\alpha} X & \text{si } X \neq \emptyset \end{cases} \\ \underline{\exists}^{--}_{<\alpha} X &= \{A \in \underline{\exists}X : A \neq \emptyset \text{ et } |A| < \alpha\} \end{aligned}$$

De la même manière, on définit  $\underline{\exists}_{\leq\alpha}$ ,  $\underline{\exists}^-_{\leq\alpha}$  et  $\underline{\exists}^{--}_{\leq\alpha}$  en remplaçant " $<$ " par " $\leq$ " ; on a clairement  $\underline{\exists}^{--}_{<\alpha} \subset \underline{\exists}_{\leq\alpha} \subset \underline{\exists}_{<\alpha}$ , et  $\underline{\exists}^{--}_{\leq\alpha} \subset \underline{\exists}^-_{\leq\alpha} \subset \underline{\exists}_{\leq\alpha}$ .

**Proposition 6**

- a) Les sous-foncteurs de  $\exists$  cardinalement bornés par 0 sont  $\exists_{\leq 0}^{--}$ ,  $\exists_{\leq 0}^-$ ,  $\exists_{\leq 0}$  ;
- b) Si  $\alpha$  est un cardinal successeur, les sous-foncteurs de  $\exists$  dont la borne cardinale est  $\alpha$  sont  $\exists_{\leq \alpha}^{--}$ ,  $\exists_{\leq \alpha}^-$  et  $\exists_{\leq \alpha}$  ;
- c) Si  $\alpha$  est un cardinal limite, les sous-foncteurs de  $\exists$  dont la borne cardinale est  $\alpha$  sont  $\exists_{< \alpha}^{--}$ ,  $\exists_{< \alpha}^-$  et  $\exists_{< \alpha}$  d'une part, et  $\exists_{\leq \alpha}^{--}$ ,  $\exists_{\leq \alpha}^-$  et  $\exists_{\leq \alpha}$  d'autre part.

On notera que :

$$\begin{aligned}\exists_{< 0}^{--} X &= \emptyset \quad (\text{i.e. } \exists_{< 0}^{--} = \hat{\emptyset}) \\ \exists_{< 0}^- X &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } X = \emptyset \\ \{\emptyset\} & \text{si } X \neq \emptyset \end{cases} \\ \exists_{< 0} X &= \{\emptyset\}\end{aligned}$$

**4.2 LES TRANSFORMATIONS  $\exists \rightarrow \underline{C}^2$**

**Proposition 7** Comme  $\underline{C}^{\text{op}} \dashv \underline{C}$ , on a une bijection naturelle  $\text{Nat}(\exists, \underline{C}^2) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(\underline{C}, \exists \underline{C})$ . Il y a donc (cf proposition 3) 16 transformations naturelles de  $\exists$  vers  $\underline{C}^2$ .

**5 Conclusion**

1) Dans la théorie des univers algébriques résumée en [1], les opérateurs  $\underline{C}, \pi, \psi, \nu$  ci-dessus sont générateurs, au sens où il est démontré qu'à partir d'eux tous les types de structures du premier ordre sont équationnellement définissables. Ici, nous avons montré qu'ils sont générateurs dans le cas contravariant de toutes les représentations naturelles de  $\mathcal{P}X$  dans  $\mathcal{PP}X$  (proposition 4).

2) L'“algèbre” de toutes les transformations naturelles de  $\mathcal{P}X$  dans  $\mathcal{PP}X$  dans le cas contravariant consiste canoniquement en quatre copies de l'algèbre de Boole atomique libre sur 2 éléments (proposition 3).

3) L'“algèbre” de toutes les transformations naturelles de  $\mathcal{P}X$  dans  $\mathcal{PP}X$  dans le cas covariant consiste essentiellement en, d'une part une copie de l'algèbre de Boole atomique libre sur 2 éléments (proposition 7), et, d'autre part (proposition 5) l'algèbre des cardinaux dans leur usage de délimiteur, explicité ici par la notion de borne (i.e. de sous-foncteur de  $\exists$ ) (voir [2]).

**Références**

1. R. Guitart, *Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ?*, CTGD, vol XXIII (1982)
2. R. Guitart, *Théorie des bornes*, Diagrammes, vol I, Paris juillet (1979)

# Modelling Term Rewriting Systems by Sesqui-Categories

John G Stell  
Department of Computer Science  
Keele University  
Keele, Staffordshire  
ST5 5BG  
U. K.  
email: john@cs.keele.ac.uk

## 1 Introduction

The simplest abstract model for a rewriting system is a binary relation on a set; the structures being rewritten are the elements of the set and a pair of elements is related if and only if the first rewrites to the second. In several kinds of rewriting the structures being rewritten form not merely a set, but support a composition so that they are the morphisms of a category. This leads to models of rewriting in which the rewrites appear as 2-cells between morphisms.

The binary relation model has been applied [Hue80] to term rewriting systems in order to separate those parts of confluence results which depend essentially on the rewritten structures being terms, from those aspects of such results which are true of an arbitrary binary relation. One aspect of confluence results which cannot be handled by the binary relation model of a term rewriting system is that of critical pairs [KB70]. The significance of the compositional structure in term rewriting is that this structure, together with coproducts, is sufficient to account for critical pairs. This is demonstrated in section 5 below.

It has been shown [RS87] that a term rewriting system gives rise to a 2-category in which the objects are finite sets of variables, the morphisms are substitutions, and the 2-cells are rewrites. In this paper the question of whether a 2-category really is the most appropriate structure to model a term rewriting system is considered, and a more general structure, called a sesqui-category is proposed as an alternative.

There are two advantages in using the weaker structure of a sesqui-category, rather than a 2-category. The first advantage is conceptual. A sesqui-category may be described informally as having all the structure of a 2-category except that there is no general horizontal composition  $\circ$  for combining a 2-cell with a 2-cell. There are instead two compositions  $\circ_L$  and  $\circ_R$  for combining a 2-cell with a morphism and vice versa respectively. The operations  $\circ_L$  and  $\circ_R$  each has a natural interpretation from the viewpoint of term rewriting, whereas the operation  $\circ$  of the 2-category has no such straightforward interpretation. The second advantage is that the hom-categories of the sesqui-category are  $\ell$ -categories, in the sense of [Mit72]; this means that we have a notion of length for 2-cells. This notion of length allows a distinction between confluence and local confluence, and hence a treatment of critical pairs.

## 2 Term Rewriting Systems

For a more detailed introduction to term rewriting the survey [DJ90] will be found helpful.

A signature  $\Omega$  gives rise to an endofunctor  $T_\Omega$  on  $\text{Set}$ ,  $XT_\Omega$  being the set of terms with variables in  $X$ . It is usual to fix a countably infinite set  $\mathcal{V}$  of variable symbols, and to call a function from  $\mathcal{V}$  to  $VT_\Omega$  which is the identity except for finitely many variables, a **substitution**. The functor  $T_\Omega$  is part of a monad, and  $\text{Fin}$  will denote the full subcategory of the Kleisli category for this monad determined by the finite subsets of  $\mathcal{V}$ .

The objects of  $\text{Fin}$  are thus finite sets of variables, and a morphism  $f : X \rightarrow Y$  is a function  $f : X \rightarrow YT_\Omega$ . If  $g : Y \rightarrow Z$  in  $\text{Fin}$ , then the composite  $fg$  is defined by setting, for each  $x \in X$ , the term  $xfg$  to be the term obtained by substituting  $yg$  for every variable  $y$  in  $xf$ . The morphisms of  $\text{Fin}$  correspond to substitutions, however some care is needed as the correspondence does not preserve composition. For example, the composite in  $\text{Fin}$  of  $\{x \mapsto y\} : \{x\} \rightarrow \{y\}$  and  $\{y \mapsto z\} : \{y\} \rightarrow \{z\}$  is  $\{x \mapsto z\}$ , but the composite of the substitutions  $\{x \mapsto y\}$  and  $\{y \mapsto z\}$  is  $\{x \mapsto z, y \mapsto z\}$ .

The usual notion of occurrences in a term extends to morphisms of  $\text{Fin}$ . An occurrence of  $f : X \rightarrow Y$  is a pair  $xa$ , where  $x \in X$  and  $a$  is an occurrence in the term  $xf$ . The set of all occurrences of  $f$  will be written  $\text{occ}(f)$ . The term at the occurrence  $xa$  in  $f$  is denoted  $f@xa$ , and the result of replacing this term by a term  $t$  is denoted  $f[t \setminus xa]$ . The notions of occurrences and replacement are also used with respect to substitutions.

A **term rewriting system**, or TRS, is a set of rules where each rule,  $l \Rightarrow r$ , is a pair of terms with all variables present in  $r$  also appearing in  $l$ . A TRS induces a graph on each hom-set of  $\text{Fin}$ . An edge from  $f_1$  to  $f_2$  is a triple of the form  $(l \Rightarrow r, \varphi, xa)$ , where  $l \Rightarrow r$  is a rule,  $\varphi$  is a substitution, and  $xa$  is an occurrence of  $f_1$ . These data will satisfy the conditions that  $f_1@xa = l\varphi$ , and  $f_2$  will be obtained from  $f_1$  by replacing the subterm at  $xa$  by  $r\varphi$ .

There are two ways in which rewrites interact with composition in  $\text{Fin}$ . Firstly, there is **instantiation**. If  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  and  $h : Y \rightarrow Z$ , and  $(l \Rightarrow r, \varphi, xa)$  is a rewrite from  $f_1$  to  $f_2$ , then  $(l \Rightarrow r, \varphi h, xa)$  is a rewrite from  $f_1 h$  to  $f_2 h$ . Secondly, there is **embedding**. If  $g : W \rightarrow X$  and  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ , and  $(l \Rightarrow r, \varphi, xa)$  is a rewrite from  $f_1$  to  $f_2$ , then there will be a set of rewrites between  $gf_1$  and  $gf_2$ .

## 3 Sesqui-Categories

In looking for an appropriate categorical abstraction for term rewriting we are led to consider a category  $\mathbf{K}_0$ , each hom-set  $\mathbf{K}_0(X, Y)$  of which is a category,  $\mathbf{K}(X, Y)$  where the composition represents the action of performing one rewrite followed by another. For each triple  $X, Y, Z$  of objects of  $\mathbf{K}_0$  there are two compositions  $\circ_R$  and  $\circ_L$  to model embedding and instantiation respectively. If  $f : X \rightarrow Y$  and  $\alpha$  is a 2-cell in  $\mathbf{K}(Y, Z)$ , then  $f \circ_R \alpha$  is a 2-cell in  $\mathbf{K}(X, Z)$ . If  $\beta$  is a 2-cell in  $\mathbf{K}(X, Y)$  and  $g : Y \rightarrow Z$ , then  $\beta \circ_L g$  is a 2-cell in  $\mathbf{K}(X, Z)$ .

A **sesqui-category** is defined to be data  $\mathbf{K}_0$ ,  $\circ_R$  and  $\circ_L$  as above, subject to the

following equations, which hold whenever the composites are defined.

$$\begin{array}{ll}
\text{i.} & 1_X \circ_R \beta = \beta \\
\text{iii.} & g \circ_R 1_h = 1_{gh} \\
\text{v.} & \alpha \circ_L 1_X = \alpha \\
\text{vii.} & 1_g \circ_L h = 1_{gh} \\
& \text{ii.} \quad (fg) \circ_R \beta = f \circ_R (g \circ_R \beta) \\
\text{iv.} & g \circ_R (\beta \cdot \delta) = (g \circ_R \beta) \cdot (g \circ_R \delta) \\
\text{vi.} & \alpha \circ_L (hk) = (\alpha \circ_L h) \circ_L k \\
\text{viii.} & (\alpha \cdot \gamma) \circ_L h = (\alpha \circ_L h) \cdot (\gamma \circ_L h) \\
\text{ix.} & (f \circ_R \alpha) \circ_L h = f \circ_R (\alpha \circ_L h)
\end{array}$$

In these equations,  $1_X$  is an identity 1-cell,  $1_f$  an identity 2-cell, and  $\cdot$  is the ‘vertical’ composition in the hom-categories. Sesqui-categories are so called as the prefix ‘sesqui’ is used to mean ‘one and a half’ and these structures lie part-way between categories and 2-categories. A sesqui-category satisfying  $(\partial_0 \alpha \circ_R \beta) \cdot (\alpha \circ_L \partial_1 \beta) = (\alpha \circ_L \partial_0 \beta) \cdot (\partial_1 \alpha \circ_R \beta)$ , where  $\partial_0$  and  $\partial_1$  denote domain and codomain, is just a 2-category.

An alternative definition of a sesqui-category is that it is an ordinary category  $K_0$  equipped with a lifting of the hom-functor to  $\mathbf{Cat}$ , as in the commutative diagram at the right, in which  $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$  is the functor which forgets the morphisms.

A third way of describing sesqui-categories is as enriched categories. Besides the usual cartesian closed structure,  $\mathbf{Cat}$  possesses exactly one other symmetric monoidal closed structure [FLK80]. This second structure can be called the unnatural symmetric monoidal closed structure on  $\mathbf{Cat}$ , since the internal hom is the category of functors and transformations which are not required to be natural. If  $\mathbf{Cat}'$  denotes  $\mathbf{Cat}$  equipped with the unnatural closed structure, then a  $\mathbf{Cat}'$ -category is exactly a sesqui-category. This description of a sesqui-category as a  $\mathbf{Cat}'$ -category leads via the notion of colimits in enriched categories to the appropriate definition of a coproduct in a sesqui-category, viz the  $\mathbf{Cat}'$ -coproduct.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbf{Cat} & \\
K(-, -) & \nearrow & \downarrow U \\
K_0^{\text{op}} \times K_0 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \mathbf{Set} \\
& K_0(-, -) &
\end{array}$$

## 4 Sesqui-Categories Associated to a TRS

In this section we see how a TRS gives rise to a sesqui-category,  $\mathcal{F}\mathit{in}$ , and a 2-category,  $\mathcal{FIN}$ , each having  $\mathbf{Fin}$  as its underlying category.

We saw above that a TRS makes each  $\mathbf{Fin}(X, Y)$  into a graph. If  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathbf{Fin}$ , two occurrences  $x_1 a_1$  and  $x_2 a_2$  of  $f$  are said to be **disjoint** if  $x_1 \neq x_2$  or neither  $a_1$  nor  $a_2$  is an initial substring of the other. When there are three morphisms in  $\mathbf{Fin}$ ,  $f_1, f_2, f_3 : X \rightarrow Y$ , and there are rewrites  $\alpha_1 = (l_1 \Rightarrow r_1, \varphi_1, x_1 a_1)$  from  $f_1$  to  $f_2$ , and  $\alpha_2 = (l_2 \Rightarrow r_2, \varphi_2, x_2 a_2)$  from  $f_2$  to  $f_3$ , we shall say the rewrites are **disjoint** if  $x_1 a_1$  and  $x_2 a_2$  are disjoint occurrences. When this happens, the rewrites may be performed in the other order. That is, if  $f'_2$  denotes  $f_2[l_1 \varphi_1 \setminus x_1 a_1, r_2 \varphi_2 \setminus x_2 a_2]$ , then  $\alpha_1$  is a rewrite from  $f'_2$  to  $f_3$ , and  $\alpha_2$  is a rewrite from  $f_1$  to  $f'_2$ . To form the category  $\mathcal{F}\mathit{in}(X, Y)$  from the graph  $\mathbf{Fin}(X, Y)$ , we require that if  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  are disjoint rewrites, such that  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$  is defined, then  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_1$ .

The compositions  $\circ_R$  and  $\circ_L$  can be defined using the ideas of embedding and instantiation of rewrites respectively, and  $\mathcal{F}\mathit{in}$  has coproducts which extend those in  $\mathbf{Fin}$ . Each hom-category of  $\mathcal{F}\mathit{in}$  has length, that is, for any morphism  $f$  there is a natural number  $|f|$  such that  $f$  is expressible as a composite of  $|f|$  non-identity morphisms, but not of more

than  $|f|$ . This notion of length corresponds exactly to the usual notion of length in term rewriting.

A category with a graph on each hom-set is called a **derivation scheme** in [Str95]. The construction of  $\mathcal{F}in$ , above, used one derivation scheme, but we can also consider the derivation scheme,  $\mathbb{D}$ , where the edges of the graphs are the rules alone, and not the rewrites derived from these. The following result characterizes  $\mathcal{F}in$  by a universal property.

**Theorem 4.1**  *$\mathcal{F}in$  is the free sesqui-category with coproducts generated by  $\mathbb{D}$ .* □

The proof of the theorem uses the following normal form lemma, which is also needed for the results in section 5.

**Lemma 4.2** *Every length one 2-cell in the free sesqui-category with coproducts generated by  $\mathbb{D}$  has a unique expression in the form  $f \circ_R (\alpha + X) \circ_L [g, X]$  where  $f$  and  $\partial_0 \alpha$  are epi.* □

In  $\mathcal{F}in$  the 2-cells are sequences of one-step rewrites subject to the equivalence that disjoint rewrites commute. By imposing an additional equivalence, we get a 2-category,  $\mathcal{FIN}$ .

A sequence of  $m+1$  one-step rewrites, where  $m \geq 0$ , is said to be an **outer nesting** if it has the form  $(l_1 \Rightarrow r_1, \varphi_1, xa)(l_2 \Rightarrow r_2, \varphi_2, xab_1) \cdots (l_2 \Rightarrow r_2, \varphi_2, xab_m)$ , and there is a substitution  $\psi$ , and a variable  $y$  occurring in  $\psi$ , such that  $\varphi_1 = \psi[l_2\varphi_2 \setminus y]$ , and  $\{b_1, \dots, b_m\} = \{b \in \text{occ}(r_1\psi) \mid (r_1\psi)@b = y\}$ . When the variables of  $r_1$  are a proper subset of those in  $l_1$ , we may have  $m = 0$ . A sequence of  $n+1$  one-step rewrites, where  $n \geq 1$ , is said to be an **inner nesting** if it has the form  $(l_2 \Rightarrow r_2, \varphi_2, xac_1) \cdots (l_2 \Rightarrow r_2, \varphi_2, xac_n)(l_1 \Rightarrow r_1, \varphi_1, xa)$ , and there is a substitution  $\psi$ , and a variable  $y$  occurring in  $\psi$ , such that  $\varphi_1 = \psi[r_2\varphi_2 \setminus y]$ , and  $\{c_1, \dots, c_n\} = \{c \in \text{occ}(l_1\psi) \mid (l_1\psi)@c = y\}$ .

To any sequence of rewrites from  $f$  to  $g$  which form an inner nesting, we can associate a sequence also from  $f$  to  $g$  which constitutes an outer nesting. By equating each inner nesting with its associated outer nesting, in addition to imposing commutativity of disjoint rewrites, the graph  $\mathcal{F}in(X, Y)$  becomes a category  $\mathcal{FIN}(X, Y)$ , which is a quotient of  $\mathcal{F}in(X, Y)$ . The 2-category,  $\mathcal{FIN}$ , can be characterized by a universal property.

**Theorem 4.3**  *$\mathcal{FIN}$  is the free 2-category with coproducts generated by  $\mathbb{D}$ .* □

The most significant distinction between the sesqui-category  $\mathcal{F}in$  and the 2-category  $\mathcal{FIN}$  is that, in general, the latter lacks a notion of length. For example, with rules  $f(x) \Rightarrow f(f(x))$  and  $f(x) \Rightarrow a$ , the following sequences of one-step rewrites are all identified.

$$\begin{aligned} ff(x) &\Rightarrow a \\ ff(x) &\Rightarrow fff(x) \Rightarrow a \\ ff(x) &\Rightarrow fff(x) \Rightarrow ffff(x) \Rightarrow a. \end{aligned}$$

Even when  $\mathcal{FIN}$  does have length, this may not correspond to the usual notion of length in term rewriting. For example, with rules  $f(x) \Rightarrow a$  and  $a \Rightarrow b$ , there is no distinction in  $\mathcal{FIN}$  between the one-step rewrite  $f(a) \Rightarrow a$  and the two-step rewrite  $f(a) \Rightarrow f(b) \Rightarrow a$ .

## 5 Confluence and Critical Pairs

In this section we see how the critical pairs of a TRS arise from the structure of  $\mathcal{F}in$ .

By a **span** in a sesqui-category with coproducts and length,  $\mathbf{K}$ , is meant a pair of 2-cells  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , where  $\partial_0\alpha = \partial_0\beta$ . The span can be **completed** if there exist 2-cells  $\gamma$ , and  $\delta$ , such that  $\partial_1\alpha = \partial_0\gamma$ , and  $\partial_1\beta = \partial_0\delta$ , and  $\partial_1\gamma = \partial_1\delta$ . A span  $\langle \alpha, \beta \rangle$  is said to be **embedded** in a span  $\langle \lambda, \mu \rangle$  if there exist 2-cells  $\gamma$  and  $\delta$  such that  $\lambda = \alpha \cdot \gamma$  and  $\mu = \beta \cdot \delta$ . A span where  $|\alpha| = 1 = |\beta|$  is a **local span**.  $\mathbf{K}$  is said to be **confluent** if every span can be completed. If every local span can be completed,  $\mathbf{K}$  is said to be **locally confluent**.

Certain spans owe their existence to the algebraic operations present in  $\mathbf{K}$ . If the 1-cells  $\partial_0\alpha$  and  $\partial_0\beta$  are composable, then there will be a span  $\langle \partial_0\alpha \circ_R \beta, \alpha \circ_L \partial_0\beta \rangle$ . Such a span is **created** by  $\circ_R$  and  $\circ_L$ . In a similar fashion, two 2-cells  $\alpha$  and  $\beta$  give rise to a span  $\langle \partial_0\alpha + \beta, \alpha + \partial_0\beta \rangle$ . Spans of these two forms can always be completed, and will be called **explicable spans**. A span which cannot be embedded in an explicable span will be called **non-trivial**.

Given a span  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , and suitable morphisms  $f$ ,  $g$ , and  $k$ , then there must also be spans  $\langle f \circ_R \alpha \circ_L g, f \circ_R \beta \circ_L g \rangle$ , and  $\langle \alpha + k, \beta + k \rangle$ . A span  $\langle \alpha, \beta \rangle$  is said to be **propagated from** a span  $\langle \gamma, \delta \rangle$  if there is a sequence of spans  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle, \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_n, \beta_n \rangle = \langle \gamma, \delta \rangle$ , where, for  $0 \leq i < n$ , either  $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle = \langle f \circ_R \alpha_{i+1} \circ_L g, f \circ_R \beta_{i+1} \circ_L g \rangle$  for some  $f$  and  $g$ , or  $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle = \langle \alpha_{i+1} + k, \beta_{i+1} + k \rangle$  for some  $k$ . If this happens, and  $\langle \gamma, \delta \rangle$  can be completed, then so can  $\langle \alpha, \beta \rangle$ .

A **span basis** for  $\mathbf{K}$  is defined as a set,  $B$ , of local spans of  $\mathbf{K}$  such that every non-trivial local span of  $\mathbf{K}$  is propagated from some member of  $B$ , and no member of  $B$  is propagated from any other. If  $\mathbf{K}$  possesses a span basis,  $B$ , and all spans in  $B$  can be completed, then  $\mathbf{K}$  will be locally confluent.

The fact that the sesqui-category derived from a TRS does possess a span basis was essentially demonstrated in [KB70], the elements of the span basis being the critical pairs. The usual definition of critical pair depends on notions of subterm and unification, but it is possible to characterize critical pairs solely in terms of the sesqui-category  $\mathcal{F}in$ .

The notion of propagation provides two relations on local spans in  $\mathcal{F}in$ . Write  $\langle \alpha, \beta \rangle \prec_0 \langle \alpha', \beta' \rangle$ , for local spans  $\langle \alpha, \beta \rangle$  and  $\langle \alpha', \beta' \rangle$ , if  $\langle \alpha', \beta' \rangle = \langle f \circ_R \alpha \circ_L g, f \circ_R \beta \circ_L g \rangle$  for some  $f$  and  $g$  and  $\langle \alpha', \beta' \rangle$  is not isomorphic to  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Similarly, write  $\langle \alpha, \beta \rangle \prec_+ \langle \alpha', \beta' \rangle$  for local spans  $\langle \alpha, \beta \rangle$  and  $\langle \alpha', \beta' \rangle$ , if  $\langle \alpha', \beta' \rangle = \langle \alpha + k, \beta + k \rangle$  for some  $k$ , and  $\langle \alpha, \beta \rangle$  is not isomorphic to  $\langle \alpha', \beta' \rangle$ . The relation  $\prec$  on local spans is defined to be the lexicographic product of (firstly)  $\prec_+$ , and (secondly)  $\prec_0$ . A local span  $\langle \alpha, \beta \rangle$  in  $\mathcal{F}in$  is **irreducible** if there is no local span  $\langle \alpha', \beta' \rangle$  for which  $\langle \alpha', \beta' \rangle \prec \langle \alpha, \beta \rangle$ . The ordering  $\prec$  is well founded, so the non-trivial irreducible spans form a span basis for  $\mathcal{F}in$ .

**Theorem 5.1** *The critical pairs of a TRS are exactly the non-trivial irreducible spans.* □

Recall that a TRS is **left-linear** if no left hand side of a rule contains any repeated variables, and is **orthogonal** if it is left-linear and has no critical pairs. The critical pairs in an orthogonal TRS admit a simpler characterization than those in the general case.

**Theorem 5.2** *In a left-linear TRS, the critical pairs are exactly the irreducible spans which are not explicable.* □

**Corollary 5.3** *A TRS is orthogonal iff all irreducible spans in  $\mathcal{F}in$  are explicable.* □

## 6 Further Work

It has been proposed [Buc85] that a general framework be found to account for various phenomena similar to critical pairs. Work towards such a framework includes [Sto92] and [Rei91], however these do not use sesqui-categories, and it seems that further development of the above treatment of confluence in sesqui-categories may be relevant.

It is a basic result of term rewriting theory that orthogonal systems are confluent. It is not clear whether this result can be explained in terms of the categorical properties of  $\mathcal{F}in$ . It seems that other sesqui-categories which can be derived from a TRS may be useful here, in particular one formed by using parallel rewrites as length one 2-cells.

## References

- [Buc85] B. Buchberger. Basic features and development of the critical-pair/completion procedure. In J-P. Jouannaud, editor, *Rewriting Techniques and Applications*, volume 202 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–45. Springer-Verlag, 1985.
- [DJ90] N. Dershowitz and J-P. Jouannaud. Rewrite systems. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter 6, pages 243–320. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [FLK80] F. Foltz, C. Lair, and G. M. Kelly. Algebraic categories with few monoidal biclosed structures or none. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 17:171–177, 1980.
- [Hue80] G. Huet. Confluent reductions: Abstract properties and applications to term rewriting systems. *Journal of the ACM*, 27(4):794–821, October 1980.
- [KB70] D. E. Knuth and P. B. Bendix. Simple word problems in universal algebras. In J. Leech, editor, *Computational Problems in Abstract Algebra*, pages 263–297, Oxford, 1970. Pergamon Press.
- [Mit72] B. Mitchell. Rings with several objects. *Advances in Mathematics*, 8:1–161, 1972.
- [Rei91] H. Reichel. A 2-category approach to critical pair completion. In H. Ehrig et al., editors, *Recent Trends in Data Type Specification*, volume 534 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 266–273. Springer-Verlag, 1991.
- [RS87] D. E. Rydeheard and J. G. Stell. Foundations of equational deduction: A categorical treatment of equational proofs and unification algorithms. In D. H. Pitt et al., editors, *Category Theory and Computer Science, Edinburgh, 1987*, volume 283 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 114–139. Springer-Verlag, 1987.
- [Sto92] K. Stokkermans. A categorical formulation for critical-pair/completion procedures. In M. Rusinowitch and J.-L. Rémy, editors, *Conditional Term Rewriting Systems*, volume 656 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 328–342. Springer-Verlag, 1992.
- [Str95] R. Street. Categorical structures. In M. Hazewinkel et al., editors, *Handbook of Algebra*. Elsevier, preprint version 1992, publication expected 1995.

# L'IDEE DE LOGIQUE SPECULAIRE

René Guitart\*

Journées Mathématiques C.A.E.N. 1994  
27-30 septembre 1994

0) La *Logique Spéculaire* a pour objet l'étude des énoncés "classiques" (disons de la logique du premier ordre) en tant qu'ils sont dits par quelqu'un, d'une façon qui, dans le même énoncé, fait intervenir des points de vues multiples désignés par des lettres  $P$ ,  $Q$ , etc, et des manières, qui fondamentalement sont deux, notées  $\sharp$  et  $\flat$ . Dans l'énoncé classique ces points de vues et manières ne figurent pas, sont non-dits. Dans la logique classique il n'y a qu'un point de vue et une manière. Mais dans le dialogue "réel" dont la partie dite est un énoncé classique le fait même de l'énonciation intervient, et ces points de vues et manières non-dits modifient de façon équivoque le sens de l'énoncé pour les locuteurs, introduisant donc un malentendu. Ce malentendu est de fait nécessaire à la poursuite du dialogue, car c'est la spéculation sur sa nature qui permet à chacun d'accorder du crédit à l'autre, en faisant provisoirement *tenir* l'énoncé non pas comme vrai, ce qui serait démesuré, mais comme possiblement non-inconsistant, et ceci quelque soit l'énoncé. La logique spéculaire s'occupe donc d'écrire et de gérer ces spéculations et leurs effets logiques, proposant ainsi un certain réglage du non-dit, ce qui permet une théorie de la communication.

Cette logique s'appelle *spéculaire* pour trois raisons. D'abord parce qu'elle permet de proposer des modèles mathématiquement bien constitués pour la théorie lacanienne de la psychanalyse et la théorie philosophique adjacente du sujet parlant, et tout particulièrement pour la notion psychanalytique de *spécularité*. En particulier les "étranges" formules de la sexuation de Lacan admettent alors en son sein une interprétation consistante. Ensuite parce que ce qu'elle introduit est un modèle mathématique minimal de la spéculation dans la *tenue* qui permet la poursuite du dialogue. Et on peut soutenir l'idée que toute spéculation est spéculaire en ce sens que la spéculation introduit un objet "prouvant" la consistance ou la cohérence parce qu'il est à la fois suffisamment à distance de l'objet (e.g. l'énoncé) dont il s'occupe et en même temps substituable à celui-ci au moins à un titre. Troisièmement, cette logique va résulter d'un travail "en miroir" (va-et-vient local/global des opérateurs) sur la logique classique, et il apparaît que cette logique admet une structure "en miroir", tant dans ses énoncés que dans ses règles, par changement dans

---

\* Université Paris 7

les expressions des  $\parallel$  en  $\flat$  et des  $\flat$  en  $\parallel$ . Les propriétés de la logique classique sont ainsi divisées en moitiées duales. Grossièrement on peut dire que la logique spéculaire est un “revêtement à 2 feuillets” de la logique classique, ceci si l'on considère uniquement la question de la manière de dire, laissant de côté la variété des points de vues. La logique classique résulte de la logique spéculaire par l'identification  $\parallel = \flat$  et les identifications  $x = y = z = \dots = *$  de tous les points de vues en un seul  $*$ .

1) Nous utiliserons le *yoga* suivant que nous appellerons le *va-et-vient local/global des opérateurs*. Le lecteur embarrassé par le caractère abstrait de ce qui suit pourra se reporter directement au cas qui nous intéresse explicitement ici, à savoir aux formules ( $\parallel$ ) et ( $\flat$ ) du paragraphe 2 et aux formules qui suivent exprimant dans la situation envisagée le calcul explicite des localisations et globalisations des opérations logiques. Toutefois la généralité que nous adoptons pour commencer maintenant a pour intérêt de rendre transparentes les propriétés universelles en jeu.

Soit  $F \dashv U(\epsilon, \eta)$  une adjonction, soit la donnée de deux foncteurs  $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  avec deux transformations naturelles  $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow UF$  et  $\epsilon : FU \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$  telles que  $\epsilon_F \circ F\eta = 1_F$  et  $U\epsilon \circ \eta_U = 1_U$ , de sorte que  $f \mapsto (Uf)\circ \eta_D$  détermine une bijection naturelle  $\mathcal{C}(FD, C) \cong \mathcal{D}(D, UC)$  notée brièvement :  $\frac{FD \rightarrow C}{D \rightarrow UC}$ .

Soit  $\Phi : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$  un 2-foncteur. Alors on a  $\Phi F \dashv \Phi U(\Phi\epsilon, \Phi\eta)$ . On note  $Y : \Phi \rightsquigarrow \mathcal{D}$  un objet de  $\Phi\mathcal{D}$ , et  $(\Phi F)(Y) = F.Y = Y^{ri}$ , et  $(\Phi\eta)_Y = \eta.Y = \alpha^+ : Y \rightarrow U.Y^{ri}$ . On a donc, pour tout  $Y : \Phi \rightsquigarrow \mathcal{D}$  et  $P : \Phi \rightsquigarrow \mathcal{C}$  la bijection naturelle  $\frac{Y^{ri} \rightarrow P}{Y \rightarrow U.P}$ . On dira que  $Y^{ri}$  est un *relèvement inductif* de  $Y$  le long de  $U$ .

Soit  $F' \dashv U'(\epsilon', \eta')$  une autre adjonction, avec  $U' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$  et  $F' : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{C}'$ , et soit  $\Psi : \mathbf{Cat}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$  un 2-foncteur. Alors on a  $\Psi U' \dashv \Psi F'(\Psi\eta', \Psi\epsilon')$ . On note  $X' : \mathcal{C}' \rightsquigarrow \Psi$  un objet de  $\Psi\mathcal{C}'$ , et  $(\Psi F')(X') = X'.F' = X'^{ep}$ , et  $(\Psi\eta')_{X'} = X'.\eta' = \pi : X'^{ep}.U' \rightarrow X'$ . On a donc, pour tout  $X' : \mathcal{C}' \rightsquigarrow \Psi$  et  $Q' : \mathcal{D}' \rightsquigarrow \Psi$  la bijection naturelle  $\frac{Q' \rightarrow X'^{ep}}{Q'.U' \rightarrow X'}$ . On dira que  $X'^{ep}$  est une *extension projective* de  $X'$  le long de  $U'$ .

Soit  $\Gamma : \mathbf{Cat}^{op} \times \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Cat}$  un 2-foncteur. Par exemple, on peut prendre pour  $\Gamma(\mathcal{C}', \mathcal{C})$  la catégorie  $\text{Nat}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$  ayant pour objets les foncteurs de  $\mathcal{C}'$  vers  $\mathcal{C}$  et pour morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs. On note  $\mathcal{C}' \xrightarrow{X} \mathcal{C}$  un objet de  $\Gamma(\mathcal{C}', \mathcal{C})$  et  $\mathcal{D}' \xrightarrow{Y} \mathcal{D}$  un objet de  $\Gamma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ . En effectuant un relèvement inductif le long de  $U$  dans le cas  $\Phi = \Gamma(\mathcal{C}', -)$  et une extension projective le long de  $U'$  dans le cas  $\Psi = \Gamma(-, \mathcal{D})$ , on a donc, pour  $P : \mathcal{C}' \rightsquigarrow \mathcal{C}$  et  $Q' : \mathcal{D}' \rightsquigarrow \mathcal{D}$  les bijections naturelles  $\frac{(Q'.U')^{ri} \rightarrow P}{Y = Q'.U' \rightarrow U.P = X'}$  et  $\frac{Y = Q'.U' \rightarrow U.P = X'}{Q' \rightarrow (U.P)^{ep}}$ , de sorte que en posant  $Q^{\parallel} = (Q'.U')^{ri} = F.(Q'.U') = (F.Q').U' = (Q'^{ri}).U'$  et  $P^{\vee} = (U.P)^{ep} = (U.P).F' = U.(P.F') = U.P^{ep}$  on a les foncteurs  $(-)^{\parallel} : \Gamma(\mathcal{D}', \mathcal{D}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}', \mathcal{C})$  et  $(-)^{\vee} : \Gamma(\mathcal{C}', \mathcal{C}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$  et l'adjonction  $(-)^{\parallel} \dashv (-)^{\vee}$ , avec donc la bijection naturelle  $\frac{Q^{\parallel} \rightarrow P}{Q' \rightarrow P^{\vee}}$ .

De façon duale, si, pour le même  $U$  on a une adjonction  $U \dashv G$ , on a le relèvement projectif  $Y^{rp} = G.Y$ , avec la bijection naturelle  $\frac{P \rightarrow Y^{rp}}{U.P \rightarrow Y}$ . En particulier on a  $\alpha^- : U.Y^{rp} \rightarrow Y$ . Et, pour le même  $U'$  et une adjonction  $U' \dashv G'$ , on a l'extension inductive  $X'^{ei} = X'.G'$ ,

avec la bijection naturelle  $\frac{X'^{\text{ei}} \rightarrow Q'}{X' \rightarrow Q'.U'}$ . Puis, avec  $Q^b = (Q'.U')^{rp} = G.(Q'.U') = (G.Q').U' = Q'^{rp}.U'$  et  $P^\wedge = (U.P)^{\text{ei}} = (U.P).G' = U.(P.G') = U.P^{\text{ei}}$  on a l'adjonction  $(-)^\wedge \dashv (-)^\flat$ , avec la bijection naturelle  $\frac{P \rightarrow Q^b}{P^\wedge \rightarrow Q'}$ .

On pose  $(-)^d = (-)^\sharp.(-)^\vee$  et  $(-)^b = (-)^\flat.(-)^\wedge$ .

Supposons de plus maintenant qu'en fait les catégories  $\Gamma(\mathcal{C}', \mathcal{C})$  et  $\Gamma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$  soient des ensembles ordonnés. Dans ce cas, des adjonctions  $(-)^\sharp \dashv (-)^\vee$  et  $(-)^\wedge \dashv (-)^\flat$  il résulte que  $\sharp V = \sharp$  et  $\flat \wedge \flat = \flat$ , et par suite  $(\sharp V)^2 = \sharp V$  et  $(\wedge \flat)^2 = \wedge \flat$ , et de l'adjonction  $(-)^\wedge \dashv (-)^\vee$  il résulte que  $\wedge \sharp V \flat \wedge \sharp = \wedge \sharp$  et  $V \flat \wedge \sharp V \flat = V \flat$ , et par suite  $(\wedge \sharp V \flat)^2 = \wedge \sharp V \flat$  et  $(V \flat \wedge \sharp)^2 = V \flat \wedge \sharp$ , etc.

En particulier, pour tous ensembles ordonnés  $T$  et  $T'$  avec  $T$  complet (i.e. avec tous les sups et tous les infs), on peut considérer pour  $\Gamma(T', T)$  l'ensemble  $\text{Ord}(T', T)$  des applications croissantes de  $T'$  vers  $T$ , ordonné "point par point" par :

$$f \leq g \text{ ssi } \forall t' \in T' (f(t') \leq g(t')).$$

On a alors les calculs point par point :

$$\begin{aligned} P^\vee(x) &= U(\wedge_{x \leq U'(y)} P(y)) \text{ et } P^\wedge(x) = U(\vee_{U'(y) \leq x} P(y)). \\ Q'^\sharp(y) &= \wedge_{Q'U'(y) \leq U(x)} x \text{ et } Q'^\flat(y) = \vee_{U(x) \leq Q'U'(y)} x. \end{aligned}$$

2) On s'intéresse enfin, maintenant, plus spécifiquement, à la globalisation et la localisation des opérations logiques dans un topos de préfaisceaux.

Fixons donc une catégorie  $S$  et considérons le topos  $\mathcal{E}ns^{S^{\text{op}}}$  des préfaisceaux sur  $S$  ou foncteurs de  $S^{\text{op}}$  vers la catégorie  $\mathcal{E}ns$  des ensembles et applications. On note  $S_0$  l'ensemble des objets de  $S$ . Fixons aussi un objet  $p$  de  $S$ , et considérons le foncteur  $eva_p : \mathcal{E}ns^{S^{\text{op}}} \rightarrow \mathcal{E}ns : X \mapsto X(p) = X_p$  qui à tout foncteur  $X$  sur  $S^{\text{op}}$  associe sa valeur en  $p$ . Alors, si  $E$  est un foncteur fixé sur  $S^{\text{op}}$ , on note  $\text{Sub}(E)$  le treillis des sous-objets de  $E$  (i.e. des sous-foncteurs de  $E$ ), on note  $\text{Sub}(E_p)$  le treillis des sous-ensembles de  $E_p$ , et on note  $U_p : \text{Sub}(E) \rightarrow \text{Sub}(E_p)$  le foncteur (i.e. ici l'application croissante) qui à  $X$  associe  $X_p$ ; ce foncteur est donc la restriction de  $eva_p$  à  $\text{sub}(E)$ . On prend  $\Gamma = \text{Ord}$ . Pour  $U = U_p$  et  $U' = (U_p)^n$ , on peut donc associer à tout connecteur propositionnel "localement" défini en  $p$  dans  $E$ , soit  $\kappa : \text{sub}(E_p)^n \rightarrow \text{sub}(E_p)$  deux opérateurs "globalisés" dans  $E$ , notés donc  $\kappa^\sharp : \text{sub}(E)^n \rightarrow \text{sub}(E)$  et  $\kappa^\flat : \text{sub}(E)^n \rightarrow \text{sub}(E)$ .

Avec les hypothèses ci-avant, soient  $E$  et  $F$  deux foncteurs fixés sur  $S^{\text{op}}$ , soit  $U = U_p : \text{sub}(E) \rightarrow \text{sub}(E_p)$ , et soit  $U' = U'_p : \text{sub}(E \times F) \rightarrow \text{sub}(E_p \times F_p)$  le foncteur qui à  $R \in \text{sub}(E \times F)$  associe  $R_p$  (défini, comme  $U_p$ , par restriction de  $eva_p$ ). Ce qui précède permet donc d'associer à tout quanteur "localement" défini en  $p$  dans  $E$ , relativement à  $F$ , soit  $Q : \text{sub}(E_p \times F_p) \rightarrow \text{sub}(E_p)$  deux quanteurs "globalisés" dans  $E$  relativement à  $F$ , notés donc  $Q^\sharp : \text{sub}(E \times F) \rightarrow \text{sub}(E)$  et  $Q^\flat : \text{sub}(E \times F) \rightarrow \text{sub}(E)$ .

On appelle opérateurs logiques les connecteurs et les quanteurs. On notera un opérateur par  $\omega$ . Pour indiquer la dépendance vis-à-vis de l'objet  $p$ , on écrira  $\sharp[p]$  et  $\flat[p]$  à la place de  $\sharp$  et  $\flat$ . Ainsi on notera, si besoin est,  $\omega^{\sharp[p]}$  pour  $\omega^\sharp$  et  $\omega^{\flat[p]}$  pour  $\omega^\flat$ .

On a donc, pour tout opérateur  $\omega$  défini localement en  $p$  et  $\lambda$  défini globalement :

$\frac{\omega^{\sharp[p]} < \lambda}{\omega, U_p^n \leq U_p, \lambda}$  et donc  $\omega^{\sharp[p]} = \bigcap_{\omega, U_p^n \leq U_p, \lambda} \lambda$ , et  $\frac{\lambda < \omega^{\flat[p]}}{U_p, \lambda \leq \omega, U_p^n}$  et donc  $\omega^{\flat[p]} = \bigcup_{U_p, \lambda \leq \omega, U_p^n} \lambda$ .

Soit  $P \subset S_0$ , et  $E$  un préfaisceau sur  $S$ . Si  $A$  est défini en  $P$  dans  $E$ , i.e. si  $A$  est la donnée pour tout  $p \in P$  d'un sous-ensemble  $A_p$  de  $E_p$ , soit si  $A$  est un sous-foncteur de  $E_P$  (restriction de  $E$  à  $P$ ), on pose, pour tout  $q \in S_0$ , en notant  $]q, P[$  l'application dont les restrictions aux  $E_p$  sont les  $E_u$ , pour  $u : q \rightarrow p$ , et en notant  $[P, q]$  l'application dont les projetées sur les  $E_p$  sont les  $E_v$ , pour  $v : p \rightarrow q$  :

$$\begin{aligned} (\sharp) : \quad (A^{\sharp P})_q &= \bigcap_{A \subset B_P, B \subset E} B_q = \bigcup_{p \in P} (A_p^{\sharp[p]})_q = \bigcup_{q \xrightarrow{u} p \in P} E(u)(A_p) \\ &\quad = (\coprod E_p \xrightarrow{]q, P[} E_q)(\coprod A_p), \\ (\flat) : \quad (A^{\flat P})_q &= \bigcup_{B_P \subset A, B \subset E} B_q = \bigcap_{p \in P} (A_p^{\flat[p]})_q = \bigcap_{P \ni p \xrightarrow{v} q} E(v)^{-1}(A_p) \\ &\quad = (E_q \xrightarrow{[P, q]} \prod E_p)^{-1}(\prod A_p), \end{aligned}$$

et on a

$$(*) : \quad \frac{A^{\sharp P} \leq B}{A \leq B_P} \quad \text{et} \quad \frac{B \leq A^{\flat P}}{B_P \leq A}.$$

Considérons par exemple le cas où  $S = \{0 \xrightarrow{2} 1\}$ . La donnée de  $E$  est donc la donnée de 2 ensembles  $E_0$  et  $E_1$  et d'une fonction  $\phi : E_1 \rightarrow E_0$ . Un sous-objet  $X$  de  $E$  est la donnée d'un couple  $(X_1, X_0)$  où  $X_0 \subset E_0$  et  $X_1 \subset E_1$  tel que  $\phi(X_1) \subset X_0$  i.e. tel que  $X_1 \subset \phi^{-1}(X_0)$ .

Les formules ( $\sharp$ ) et ( $\flat$ ) donnent, pour  $X_0 \subset E_0$  et pour  $X_1 \subset E_1$  :

$$\begin{aligned} (X_0)^{\sharp[0]} &= (\emptyset, X_0) \text{ et } (X_0)^{\flat[0]} = (\phi^{-1}(X_0), X_0), \\ (X_1)^{\sharp[1]} &= (X_1, \phi(X_1)) \text{ et } (X_1)^{\flat[1]} = (X_1, E_0). \end{aligned}$$

Dans le cas général on a toujours  $(A^{\flat P})_P \leq A \leq (A^{\sharp P})_P$ , c'est-à-dire que  $P$  "reçoit" ce qu'il "émet" en mode  $\flat$  (resp.  $\sharp$ ) comme "moins" (resp. plus) que ce qu'il avait à "dire". D'où le choix des notations  $\flat$  et  $\sharp$ , marques donc d'un manque ou d'un excès (inévitables pour dire).

Dans le cas général, les globalisations et les localisations des opérations logiques s'effectuent alors par :

$$\begin{aligned} \omega^{\sharp P}(Z) &= (\omega(Z_P))^{\sharp P} \text{ et } \omega^{\flat P}(Z) = (\omega(Z_P))^{\flat P}, \\ \omega^{\vee P}(W) &= (\omega(W^{\sharp P}))_P \text{ et } \omega^{\wedge P}(W) = (\omega(W^{\flat P}))_P. \end{aligned}$$

Pour  $\omega$  un opérateur globalement défini (et monotone) on détermine ses *altérations* par  $P$ , qui sont aussi des opérateurs globalement définis et monotones, par :

$$\begin{aligned} \omega^{dP} &:= (\omega^{\vee P})^{\sharp P}, \quad \omega^{\flat P} := (\omega^{\wedge P})^{\flat P}, \\ \omega^{qP} &:= (\omega^{\wedge P})^{\sharp P}, \quad \omega^{pP} := (\omega^{\vee P})^{\flat P}. \end{aligned}$$

Les altérations vérifient :

$$\begin{aligned} q \circ p &= d \text{ et } p \circ q = b, \\ d \circ b &= q \text{ et } b \circ d = p, \end{aligned}$$

et en particulier, fondamentalement, les opérateurs monotones  $d$  et  $b$  satisfont à :

$$d \circ b \circ d \leq d \leq d^2 \leq 1 \leq b^2 \leq b \leq b \circ d \circ b.$$

De là résulte que  $d$  et  $b$  sont des opérateurs d'ouverture et de fermeture quasi-inverses et

que  $q$  est adjoint à gauche à  $p$ .

La structure des altérations ainsi dégagée est la trace au niveau global du "recours" à la "localité"  $P$ .

Si, pour un même  $P$  fixé, on effectue plusieurs va-et-vient entre le local et le global, la structure de ces va-et-vient est réglée par le formulaire (où, par exemple,  $\flat \wedge$  signifie  $(-)^\wedge \circ (-)^\flat$ ) :

$$\begin{array}{ll} \flat \wedge \leq 1 \leq \sharp \vee & \vee \sharp \leq 1 \leq \wedge \flat \\ \wedge \sharp \wedge = \wedge & \wedge \sharp \vee = \wedge (\sharp \vee) \\ \wedge \flat \wedge = \wedge & \wedge \flat \vee = \wedge (\flat \vee) \\ \vee \sharp \wedge = \vee (\flat \wedge) & \vee \sharp \vee = \vee \\ \vee \flat \wedge = \vee (\flat \wedge) & \vee \flat \vee = \vee \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sharp \wedge \sharp = \sharp & \sharp \wedge \flat = \sharp (\wedge \flat) \\ \sharp \vee \sharp = \sharp & \sharp \vee \flat = \sharp (\wedge \flat) \\ \flat \wedge \sharp = \flat (\vee \sharp) & \flat \wedge \flat = \flat \\ \flat \vee \sharp = \flat (\vee \sharp) & \flat \vee \flat = \flat \end{array}$$

3) La logique spéculaire va résulter de l'effet du va-et-vient local/global sur les opérateurs *classiques*  $\omega$  dont on dispose aux niveaux locaux. Ses règles seront donc obtenues par croisement des pures règles du va-et-vient dont nous avons donné les premiers principes au paragraphe précédent avec les règles de la logique classique. De seconds principes réglant les successions de va-et-vient différents (relatifs à des  $P$ ,  $P'$ , etc distincts) détermineront en propre la théorie de la communication entre les localités via la globalité. Les règles de la logique classique sont formulées en termes d'*inégalités* et de *compositions* entre les opérateurs. Leur "déformation" en règles de la logique spéculaire repose sur d'une part la monotonie des globalisations  $\sharp$  et  $\flat$ , et d'autre part leur caractère universel, d'où résulte, pour la composition les principes suivants :

*Si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des opérateurs locaux composable on a :*

$$\begin{aligned} \omega_2^\sharp \circ \omega_1^\sharp &\geq (\omega_2 \circ \omega_1)^\sharp \geq \omega_2^\sharp \circ \omega_1^\flat, \\ \omega_2^\flat \circ \omega_1^\flat &\geq (\omega_2 \circ \omega_1)^\flat \geq \omega_2^\flat \circ \omega_1^\sharp. \end{aligned}$$

Un principe subsidiaire important est le suivant :

*Si  $\lambda$  et  $\rho$  sont des opérateurs locaux adjoints ( $\lambda \dashv \rho$ ), alors  $\lambda^\sharp$  et  $\rho^\flat$  sont des opérateurs globaux adjoints ( $\lambda^\sharp \dashv \rho^\flat$ ).*

Naturellement des règles similaires ont lieu pour la localisation.

Par exemple si l'on considère la négation classique  $N$  et  $P = S_0$ , alors dans le topos des préfaisceaux sur  $S$  il advient que  $N^\flat S_0$  est la négation intuitioniste, et que  $N^\sharp S_0$  est la co-négation co-intuitioniste. On a aussi que  $\exists^{\sharp S_0}$  est le  $\exists$  intuitioniste et que  $\forall^{\flat S_0}$  est le  $\forall$  intuitioniste. Les règles (intuitionistes) concernant ces opérateurs résultent formellement des règles classiques et des règles sur le va-et-vient ci-dessus. Ce faisant les règles classiques sont divisées en deux. Par exemple (en omettant d'écrire le  $S_0$ ) on a :

$$N^\flat N^\flat \geq 1 \text{ et } N^\sharp N^\sharp \leq 1,$$

et on a :

$$\exists^\flat \geq N^\flat \forall^\sharp N^\sharp \text{ et } \exists^\flat \leq N^\flat \forall^\flat N^\flat, \text{ etc.}$$

De façon générale, si dans le topos des préfaisceaux sur  $S$  est donné un morphisme  $f : F \rightarrow E$ , et si l'on note  $f_P$  la restriction de  $f$  à  $P$ , les globalisations des quantifications

classiques le long de  $f_P$  sont en fait les altérations (vis-à-vis de  $P$ ) des quantifications intuitionnistes le long de  $f$  :

$$(\forall f_P)^{\sharp P} = (\forall f)^{dP}, (\forall f_P)^{\flat P} = (\forall f)^{bP}, (\exists f_P)^{\sharp P} = (\exists f)^{dP}, (\exists f_P)^{\flat P} = (\exists f)^{bP}.$$

4) Ceci dit, nous appellons *énoncé spéculaire* du premier ordre la donnée d'un énoncé classique du premier ordre où de plus chaque opérateur et chaque variable propositionnelle libre est marqué en indice supérieur d'une indication  $\alpha x$  avec  $\alpha \in \{\sharp, \flat\}$  et avec  $x$  une lettre. Ces indications supplémentaires constituent ce que nous appellerons la *spéculation*. Par exemple si l'on prend l'énoncé classique  $A \wedge NA$ , alors  $A^{\flat x} \wedge^{\sharp y} N^{\sharp z} A^{\flat z}$  est un énoncé spéculaire associé, dont la spéculation proprement dite est la séquence :  $\flat x \sharp y \sharp z \flat z$ .

Une *interprétation* d'un énoncé spéculaire propositionnel consiste alors en le choix d'une catégorie  $S$ , l'attribution à chaque lettre  $x$  de la spéculation d'une partie  $P$  de  $S_0$ , le choix d'un préfaisceau  $E$  sur  $S$ , l'attribution à chaque variable propositionnelle d'un sous-objet de  $E$ . L'énoncé est alors interprété comme un sous-objet de  $E$  en interprétant les opérateurs marqués comme les globalisations indiquées des opérateurs classiques correspondant aux niveaux locaux. On procède de même pour les énoncés avec quantifications. S'il arrive que l'interprétation obtenue n'est pas l'objet 0 du topos de préfaisceaux considéré, on dit alors que la spéculation et l'interprétation constituent une *tenue* de l'énoncé classique considéré.

Ce qui arrive, c'est que tout énoncé classique peut tenir, c'est-à-dire peut, par l'introduction d'un jeu convenable dans une globalité ( $S$ ) de points de vues (les  $P$ ) et de manières de dire (les  $\sharp$  et les  $\flat$ ) au cours de l'énonciation, donner lieu à un objet qui, au moins d'un point de vue, n'est pas vide. Bref, faire tenir c'est arriver à pouvoir considérer ce qui est dit comme non intégralement vide, et c'est toujours possible. Mais ce n'est pas possible n'importe comment, cela dépend d'ailleurs non seulement de la valeur de vérité classique de l'énoncé, mais de sa forme explicite. De fait la théorie de la Vérité vient ensuite. La Vérité de l'énoncé sera constituée à partir de la catégorie de toutes les tenues de cet énoncé, laquelle constitue ce que nous appellerons la *cohérence* de l'énoncé. De fait la Vérité de l'énoncé consiste en les propriétés catégoriques de sa cohérence, par exemple le fait que celle-ci admette un objet terminal, ou bien le fait qu'elle soit connexe, ce qui en effet indique qu'entre toutes les tenues possibles un "principe objectif" peut circuler, indépendant de chaque tenue "subjective", principe duquel les tenues s'autorisent en quelque sorte. Une fois un tel principe élucidé, on peut dire que chaque tenue tient parce que c'est "vrai", est une tenue vraie. En tant qu'elle "gère", à propos d'un énoncé donné, la variation même des sous-entendus, la cohérence - et ses propriétés (la "Vérité" de l'énoncé), constitue donc le point de départ d'une théorie formelle du malentendu entre les locuteurs.

# Structures ordonnées atomiquement compactes

Friedrich WEHRUNG

Résumé. - Nous rappelons quelques généralités et résultats classiques sur la compacité atomique (équationnelle) de certaines structures, en mettant l'accent sur les structures ordonnées. Puis nous donnons une idée de la construction, présentée dans [22], d'un treillis bi-local (*bi-frame*) non équationnellement compact, et même non équationnellement compact pour les systèmes dénombrables à 3 variables.

Soit  $\mathcal{L}$  un langage du premier ordre et soit  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $\mathcal{L}$ . Si  $\{\mathbf{x}_i : i \in I\}$  est un ensemble (non nécessairement fini ni même dénombrable) de symboles de variable, un *système atomique* à paramètres dans  $\mathfrak{M}$ , à variables ("inconnues") dans  $\{\mathbf{x}_i : i \in I\}$  est un ensemble de formules atomiques de  $\mathcal{L}$  à paramètres dans [l'ensemble sous-jacent de]  $\mathfrak{M}$ . Si  $\Sigma$  est un système atomique à paramètres dans  $\mathfrak{M}$ , on dit que  $\Sigma$  est *finiment résoluble* (resp. *résoluble*) dans  $\mathfrak{M}$  quand toute partie finie de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma$ ) admet une solution dans  $\mathfrak{M}^I$ .

On dit que  $\mathfrak{M}$  est *atomiquement compact* quand tout système atomique à paramètres dans  $\mathfrak{M}$  finiment résoluble dans  $\mathfrak{M}$  est résoluble dans  $\mathfrak{M}$ . Quand le langage  $\mathcal{L}$  n'a pas de symbole de relation, on dit que  $\mathfrak{M}$  est *équationnellement compact*. Ces définitions se généralisent aisément au cas où les systèmes atomiques en question ont au plus  $m$  inconnues (où  $m$  est un cardinal — non nécessairement infini — donné), auquel cas nous dirons que  $\mathfrak{M}$  est *atomiquement compact pour  $m$  variables*.

Il est très facile de voir que si  $\Sigma$  est un système atomique à paramètres dans  $\mathfrak{M}$  qui est finiment résoluble dans  $\mathfrak{M}$ , alors  $\Sigma$  est résoluble dans une certaine puissance réduite de  $\mathfrak{M}$ . Par suite, si  $\mathfrak{M}$  est rétracte de toutes ses puissances réduites (resp. ultrapuissances), alors  $\mathfrak{M}$  est atomiquement compact. Réciproquement, si  $\mathfrak{M}$  est atomiquement compact, alors les rétractions d'une puissance réduite donnée  ${}^*\mathfrak{M}$  sur  $\mathfrak{M}$  sont exactement les solutions d'un certain système atomique à inconnues indexées par les éléments de  ${}^*\mathfrak{M}$ , qui est trivialement finiment résoluble. On a ainsi abouti au résultat de B. Węglorz [18] qui s'énonce "*un modèle est atomiquement compact si et seulement si il est rétracte de toutes ses puissances réduites (resp. ultrapuissances)*". Un corollaire immédiat de ce résultat très facile mais fondamental est que tout modèle atomiquement compact est *positivement compact* (i.e. compact pour les systèmes de formules *positives*) — en effet, les formules positives sont préservées par homomorphismes surjectifs. Un autre corollaire immédiat est que tout modèle *injectif* (dans la classe des modèles d'une théorie donnée, relativement à la classe des *plongements*) est atomiquement compact. Par exemple, le théorème de prolongement de Sikorski dit que toute algèbre de Boole complète est injective (et réciproquement): par suite, *toute algèbre de Boole complète est atomiquement compacte* (la réciproque est facile à établir) [18].

Par ailleurs, disons qu'un modèle  $\mathfrak{M}$  d'un langage  $\mathcal{L}$  est *topologiquement compact* quand il est muni d'une topologie compacte (=compact Hausdorff) pour laquelle les interprétations des symboles de relation (resp. fonction) sont des *fermés* (resp. des applications *continues*). Une application directe du théorème de Tychonoff montre alors que *tout modèle topologiquement compact est atomiquement compact*. Par suite, les *rétractes* des modèles topologiquement compacts sont également atomiquement compacts. La question de savoir, pour une classe  $\mathcal{C}$  donnée, si les modèles atomiquement compacts sont exactement les rétractes de modèles topologiquement compacts est le *problème de Mycielski* pour  $\mathcal{C}$ . Le problème de Mycielski a par exemple une solution positive pour les algèbres de Boole (conséquence immédiate du théorème de Stone et du théorème de Sikorski) et pour les groupes abéliens [4], mais négative pour les groupes [12]. Voir aussi [9]. Le problème de Mycielski pour les treillis distributifs, dû à ma connaissance à G.H. Wenzel [23], est encore ouvert.

De façon générale, pour les structures *ordonnées*, la compacité atomique est une propriété de *complétude*, voir par exemple [2] pour les demi-treillis munis d'un groupe d'automorphismes où sont obtenus des résultats semblables au théorème de Sikorski mais où de plus les rétractions sont définies par une formule explicite (donc: nul besoin d'axiome du choix!). Mentionnons aussi [19, 20, 21] où des résultats positifs de "compacité atomique bornée" sont obtenus (basiquement par la méthode du forcing en théorie des ensembles) pour les groupes réticulés complets, ou Dedekind  $\sigma$ -complets, ou monotones  $\sigma$ -complets. Ces structures atomiquement compactes ne sont *pas* en général topologiquement compactes, la raison fondamentale pour

ceci étant essentiellement le résultat de P.S. Rema [16] qui dit que les seules algèbres de Boole topologiquement compactes sont les algèbres de Boole atomiques complètes (*i.e.* les  $\mathcal{P}(X)$  pour tout ensemble  $X$ ); voir aussi [5] à ce sujet. Voici quelques exceptions notables, avec leurs inconvénients respectifs:

- Diverses topologies faibles sur les espaces de Banach. Les sphères unités ne sont pas en général fermées, ce qui fait que l'on ne peut pas les utiliser pour des problèmes “discrets”.
- La topologie de Hausdorff sur l'ensemble des fermés d'un espace topologique compact  $K$  (*i.e.* la topologie la plus grossière pour laquelle pour tout ouvert  $U$  de  $K$ , les ensembles  $\{F : F \subseteq U\}$  et  $\{F : F \cap U \neq \emptyset\}$  sont ouverts). Cette topologie est compacte, et l'application  $(A, B) \mapsto A \cup B$  est *continue* pour cette topologie. Ce serait idyllique si l'application d'intersection  $(A, B) \mapsto A \cap B$  était elle aussi continue, mais ce n'est pas toujours le cas (par exemple pour  $K = [0, 1]$  muni de la topologie usuelle).
- La topologie de l'intervalle sur un treillis *complètement distributif*  $E$  (*i.e.* la topologie la plus grossière pour laquelle les intervalles fermés  $[a, b]$ ,  $a \leq b$  dans  $E$ , sont des fermés); voir [10, VII 1.10]. Elle est compacte et les applications  $(x, y) \mapsto x \vee y$  et  $(x, y) \mapsto x \wedge y$  sont continues, c'est donc idyllique sauf que les treillis complètement distributifs sont des objets relativement peu courants.

Ainsi, la compacité topologique est en général peu appropriée à l'étude des structures ordonnées. D'après ce qui précède, il semblerait plutôt qu'au contraire, la compacité atomique soit, pour les structures ordonnées possédant des propriétés de *complétude*, la règle générale. Voici un premier exemple (qui figure dans l'introduction de [22]) qui montre que ce n'est pas le cas, même pour la compacité atomique à une variable (*i.e.* pour les systèmes atomiques à une variable).

**EXEMPLE.** Il existe une algèbre de Boole complète  $B$  et un groupe abélien localement fini  $G$  d'automorphismes de  $B$  tel que la structure  $(B, \vee, \wedge, 0, 1, g)_{g \in G}$  ne soit pas atomiquement compacte pour une variable.

**Preuve.** Munissons  $\Omega = \mathcal{P}(\omega)$  ( $\omega$  est l'ensemble des entiers naturels) de sa topologie naturelle (compacte), soit  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de  $\Omega$  et soit  $B$  l'algèbre de Boole complète des boréliens de  $\Omega$  modulo les parties de mesure nulle de  $\Omega$ . De plus, munissons  $\Omega$  lui-même de sa structure naturelle d'anneau de Boole (l'addition est la différence symétrique et la multiplication est l'intersection). Soit  $G$  le sous-groupe de  $(\Omega, +, 0)$  engendré par les parties finies de  $\omega$ . Alors  $G$  est localement fini (*i.e.* tout sous-groupe finiment engendré de  $G$  est fini), abélien, et opère naturellement sur  $B$  par automorphismes (*via*  $\tau_g : X \mapsto g + X$  — pour tout  $g \in G$ ). Considérons alors le système atomique suivant, dont l'inconnue est  $x$ :

$$\begin{cases} x \wedge \tau_\omega x = 0; \\ x \vee \tau_\omega x = 1; \\ x = \tau_g x \quad (\text{toute partie finie } g \text{ de } \omega). \end{cases}$$

Alors ce système est finiment résoluble (pour tout  $n \in \omega$ , considérer l'élément de  $B$  correspondant à  $U_n = \{x \in \Omega : n \in x\}$ ). Il n'est cependant pas résoluble, car sinon, il existerait une partie mesurable  $X$  de  $\Omega$  telle que  $X \cap \tau_\omega X$  et  $\Omega \setminus (X \cup \tau_\omega X)$  soient de mesure nulle, et qui soit de plus invariante par différence symétrique avec un ensemble fini; cependant, cette dernière condition entraîne que  $X$  est de mesure soit 0, soit 1, ce qui contredit les deux premières conditions. ■

L'exemple que nous allons à présent brièvement décrire est la solution d'un problème d'abord abordé par D. Kelly dans [11], puis “officialisé” par G. Grätzer dans [7, problème II.23, page 128].

Définissons un treillis *bi-local* (*bi-frame* dans [10]) comme un treillis *complet*  $A$  tel que pour tout élément  $a$  de  $A$  et toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  à valeurs dans  $A$ , l'on ait  $a \wedge \bigvee_{i \in I} x_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge x_i)$  et  $a \vee \bigwedge_{i \in I} x_i = \bigwedge_{i \in I} (a \vee x_i)$ . Dans tout treillis, la relation d'ordre  $\leq$  est définissable par la formule

$$x \leq y \iff x \wedge y = x,$$

et donc la compacité atomique et la compacité équationnellement sont deux notions équivalentes. Pour des raisons de tradition, nous utiliserons la dernière terminologie.

**THÉORÈME 1.** — Il existe un treillis bi-local non équationnellement compact.

Avant la résolution finale de ce problème [22], deux importantes indications que la solution pouvait être en fait *positive* furent respectivement [11] et [14], où D. Kelly et K.A. Nauryzbaev prouvérent respectivement

que tout treillis bi-local est équationnellement compact pour 1 variable et pour 2 variables. Nous allons ici indiquer la construction d'un treillis bi-local qui n'est pas équationnellement compact pour 3 variables, et nous renvoyons à [22] pour les preuves complètes.

Pour tous ensembles  $X$  et  $Y$ , nous noterons  ${}^X Y$  l'ensemble des applications de  $X$  vers  $Y$ . Pour tout ensemble préordonné  $(P, \leq)$  et toute partie  $X$  de  $P$ , nous écrirons  $\downarrow X = \{y \in P : (\exists x \in X)(y \leq x)\}$  et nous dirons que  $X$  est *initial* quand  $X = \downarrow X$ . À partir de maintenant, nous noterons  $P$  l'ensemble à 6 éléments  $\{p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2\}$  muni de la relation d'ordre définie par  $p < q$  si et seulement si il existe  $i$  et  $j$  dans  $\{0, 1, 2\}$  tels que  $i \neq j$  et  $p = p_i$  et  $q = q_j$ . Par suite,  $P$  est isomorphe à l'ensemble des parties propres de  $3 = \{0, 1, 2\}$  muni de l'inclusion. Pour tout ensemble  $D$  et tout élément  $d$  de  $D$ , nous noterons  $\pi_d^D$  la  $d$ -ième projection de  ${}^D P$  sur  $P$ .

Une propriété combinatoire essentielle de  $P$  est le lemme suivant (*projectivité* de  $P$ , voir [3]):

**LEMME 2.** - Soit  $f : P \times P \rightarrow P$  une application croissante telle que pour tout  $i$  dans  $\{0, 1, 2\}$ , l'on ait  $f(q_i, q_i) \leq q_i$ . Alors  $f$  est une projection, i.e.  $f = \pi_0^2$  ou  $f = \pi_1^2$ . ■

Pour tout  $x$  dans  $P$  et tout ensemble  $T$ , notons  $x \cdot T$  la fonction constante de domaine  $T$  et de valeur  $x$ . En utilisant le lemme précédent et le fait que  $P$  n'est pas réduit à un élément, l'on peut alors montrer le théorème suivant:

**LEMME 3.** - Soit  $D$  un ensemble non vide, soit  $f : {}^D P \rightarrow P$  une application croissante telle que pour tout  $i < 3$ , l'on ait  $f(q_i \cdot D) \leq q_i$ . Définissons  $\mathcal{U}^f$  par

$$\mathcal{U}^f = \{X \subseteq D : (\forall x, y \in P)(f(x \cdot X \cup y \cdot \complement X) = x)\}.$$

Alors  $\mathcal{U}^f$  est un ultrafiltre sur  $D$ , et pour tout  $s$  dans  ${}^D P$ , on a  $f(s) = \lim_{\mathcal{U}^f} s$ . En particulier, si  $D$  est fini, alors  $f$  est une projection. ■

Munissons alors  $\mathcal{P}^*(P) = \mathcal{P}(P) \setminus \{\emptyset\}$  de la relation de préordre  $\leq$  définie par

$$(*) \quad X \leq Y \iff [(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x \leq y) \text{ et } (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(x \leq y)].$$

Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble (dénombrable) de toutes les suites décroissantes d'éléments de  $\mathcal{P}^*(P)$  muni de l'ordre produit de celui défini par  $(*)$  et de la topologie discrète, et soit  $\Omega$  la partie fermée de  ${}^\omega P \times \mathcal{D}$  définie par

$$\Omega = \{(x, X) \in {}^\omega P \times \mathcal{D} : (\forall n \in \omega)(x(n) \in X(n))\}.$$

Par suite,  $\Omega$  est un espace polonais. Munissons  $\Omega$  du préordre produit, i.e. défini par

$$(x, X) \leq (y, Y) \iff (x \leq y \text{ et } X \leq Y).$$

L'on peut alors montrer le lemme suivant:

**LEMME 4.** - Soit  $\mathbb{B}$  l'algèbre de Boole complète des ouverts réguliers de  $\Omega$ . Alors l'ensemble  $\mathbb{E}$  des ouverts réguliers initiaux de  $\Omega$  est un sous-treillis de  $\mathbb{B}$ , clos par les opérations de borne supérieure et de borne inférieure arbitraire. Par suite, c'est un treillis bi-local.

Pour tout  $i < 3$ , posons  $A_i = \downarrow\{q_i\}$ . Pour toute partie  $Q$  de  $P$  et tout entier naturel  $m$ , posons

$$Q^{(m)} = \{(x, X) \in \Omega : X(m) \subseteq Q\} \quad \text{and} \quad Q^m = \{(x, X) \in \Omega : x(m) \in Q\}.$$

Par suite,  $Q^{(m)}$  et  $Q^m$  sont des ouverts fermés (donc *a fortiori* des ouverts réguliers) de  $\Omega$ . Considérons le système d'équations suivant (où  $x \leq y$  est une abréviation de  $x \wedge y = x$ ), à trois inconnues  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  et à paramètres dans  $\mathbb{E}$ :

$$(**) \quad \begin{cases} A_0^{(m)} \leq \mathbf{x}_0 & \text{(tout } m \text{ dans } \omega) \\ A_1^{(0)} \leq \mathbf{x}_1 \\ A_2^{(0)} \leq \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 = \emptyset \\ \mathbf{x}_0 \vee \mathbf{x}_1 \vee \mathbf{x}_2 = \Omega \end{cases}$$

En considérant pour tout  $m$  le triplet  $(A_0^m, A_1^m, A_2^m)$ , il est facile de voir que  $(**)$  est finiment résoluble dans  $\mathbb{E}$ .

Cependant, supposons qu'il existe une solution  $(X_0, X_1, X_2)$  de  $(**)$  dans  $\mathbb{E}$ . Alors  $\Omega^* = X_0 \cup X_1 \cup X_2$  est un ouvert dense initial de  $\Omega$ , et il existe une unique application  $f$  de  $\Omega^*$  vers  $P$  telle que pour tout  $x$  dans  $\Omega^*$  et tout  $i < 3$ , l'on ait

$$f(x) \leq q_i \iff x \in X_i.$$

Pour tous  $p, q$  dans  $P$ , notons  $[p, q]$  la suite constante de valeur  $\{p, q\}$ . L'on peut alors montrer le lemme suivant ( $\mathcal{P}(\omega)$  est muni de sa topologie naturelle, homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor):

**LEMME 5.** - *L'ensemble  $\mathcal{B} = \{I \subseteq \omega : (\forall p, q \in P)((p \cdot I \cup q \cdot I, [p, q]) \in \Omega^*)\}$  est un ouvert dense de  $\mathcal{P}(\omega)$ .* ■

Soit alors  $\mathcal{U} = \{I \subseteq \omega : f_I = \pi_0^2\}$ . L'on peut montrer que  $\mathcal{U}$  a la propriété de Baire, et que pour un ensemble résiduel de couples  $(I, J)$  dans  $\mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega)$ , l'on a  $I \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists I \in \mathcal{U}, I \in \mathcal{U} \Rightarrow I \cup J \in \mathcal{U}$  et enfin  $(I \in \mathcal{U} \text{ et } J \in \mathcal{U}) \Rightarrow I \cap J \in \mathcal{U}$ . Cette propriété s'avère suffisante, avec une preuve inspirée de celle du résultat classique que tout ultrafiltre sur  $\omega$  ayant la propriété de Baire est principal, pour montrer le lemme suivant (dont la conclusion pourrait s'énoncer: "l'ensemble  $\mathcal{U}$  est principal presque partout"):

**LEMME 6.** - *Il existe un entier naturel  $n$  tel que l'ensemble des éléments  $I$  de  $\mathcal{P}(\omega)$  tels que  $I \in \mathcal{U}$  si et seulement si  $n \in I$  soit résiduel dans  $\mathcal{P}(\omega)$ .* ■

Désormais, fixons l'entier naturel  $n$  du lemme 6, et posons  $m = n + 1$ . Pour tous éléments  $p, q, r$  de  $P$ , soit  $X(p, q, r)$  l'élément de  $\mathcal{D}$  défini par  $X(p, q, r)(k) = \{p, q, r\}$  si  $k < m$  et  $X(p, q, r)(k) = \{q, r\}$  si  $k \geq m$ .

**LEMME 7.** - *L'ensemble suivant:*

$$\mathcal{B}'' = \{I \subseteq \omega \setminus m : (\forall p, q, r \in P)((p \cdot m \cup q \cdot I \cup r \cdot (\omega \setminus m \setminus I), X(p, q, r)) \in \Omega^*)\}$$

*est un ouvert dense de  $\mathcal{P}(\omega \setminus m)$ .* ■

En utilisant le fait que  $m$  est strictement supérieur à  $n$ , l'on obtient alors le lemme suivant:

**LEMME 8.** - *Pour tout  $I$  dans  $\mathcal{B}''$  et tous  $p, q, r$  dans  $P$ , on a*

$$f(p \cdot m \cup q \cdot I \cup r \cdot (\omega \setminus m \setminus I), X(p, q, r)) = p.$$

Puisque  $\mathcal{B}''$  est non vide, l'on obtient, en posant  $p = p_0$  et  $q = r = q_0$ , que

$$f(p_0 \cdot m \cup q_0 \cdot (\omega \setminus m), X(p_0, q_0, q_0)) = p_0.$$

Par ailleurs,  $(p_0 \cdot m \cup q_0 \cdot (\omega \setminus m), X(p_0, q_0, q_0))$  appartient à  $A_0^{(m)}$ , son image par  $f$  est donc majorée par  $q_0$ , ce qui est une contradiction. Ainsi, nous pouvons conclure que  $\mathbb{E}$  n'est pas équationnellement compact, d'où le théorème 1, et même le fait que  $\mathbb{E}$  n'est pas équationnellement compact pour 3 variables pour les systèmes dénombrables d'équations.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] B. BANASCHEWSKI et E. NELSON, "Equational compactness in equational classes of algebras", *Algebra Universalis* 2 (1972), pp. 152-165.
- [2] S. BULMAN-FLEMING, I. FLEISCHER and K. KEIMEL, "The semilattices with distinguished endomorphisms which are equationally compact", *Proceedings of the American Mathematical Society* 73 (1979), n° 1, pp. 7-10.
- [3] E. COROMINAS, "Sur les ensembles ordonnés projectifs et la propriété du point fixe", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 311-I (1990), pp. 199-204.
- [4] L. FUCHS, "Infinite abelian groups", vol. I, 1970 and vol. II, 1973, Academic Press.
- [5] S. GĂINĂ, "Order topologies in Boolean algebras", *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 17, n° 2 (1972), pp. 243-251.

- [6] G. GIERZ, K.H. HOFMANN, K. KEIMEL, J.D. LAWSON, M. MISLOVE et D.S. SCOTT, "A compendium of continuous lattices", Springer-Verlag, 1980.
- [7] G. GRÄTZER, "General Lattice Theory", Birkhäuser Verlag, Basel, 1978.
- [8] G. GRÄTZER et H. LAKSER, "Equationally compact semilattices", *Colloq. Math.* **20**, n°1 (1969), pp. 27-30.
- [9] D. K. HALEY, "Equational compactness in rings", Lecture Notes in Mathematics **745**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1979.
- [10] P. JOHNSTONE, "Stone spaces", Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **3**, 1982.
- [11] D. KELLY, "A note on equationally compact lattices", *Algebra Universalis* **2**, n°1 (1972), pp. 80-84.
- [12] R.T. KEL'TENOVA, "On the theory of equationally compact algebras", collection of questions on mathematics and mechanics, No. 8 (Russian), *227. Izdanie Zazah. Gos. Univ., Alma-Ata* (1976), pp. 32-37.
- [13] S. KOPPELBERG, "General theory of Boolean Algebras", dans "Handbook of Boolean Algebras", vol. **1**, pp. 1-307, édité par J.D. Monk avec R. Bonnet, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [14] K.A. NAURYZBAEV, "Equationally compact distributive lattices", *Algebra and Logic* **25** (1986), n°5, pp. 369-379; traduit de *Algebra i Logika*, vol. **25**, n°5 (Septembre-Octobre 1986), pp. 584-599.
- [15] J. OXTOBY, "Measure and category", Graduate Texts in Mathematics 2, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1971.
- [16] P.S. REMA, "On compact topological lattices", *Mathematica Japonica* **9** (1964), n°2, pp. 93-98.
- [17] W. TAYLOR, "Some constructions of compact algebras", *Annals of Mathematical Logic*, vol. **3**, n°4 (1971), pp. 395-437.
- [18] B. WEGLORZ, "Equationally compact algebras (I)", *Fundamenta Mathematicae* **59** (1966), pp. 289-298.
- [19] F. WEHRUNG, "Boolean universes above Boolean models", *Journal of Symbolic Logic* **58** (4) (December 1993), pp. 1219-1250.
- [20] F. WEHRUNG, "A compactness property of Dedekind  $\sigma$ -complete  $\mathfrak{f}$ rings", à paraître dans *Algebra Universalis*.
- [21] F. WEHRUNG, "Bounded atomic compactness of ordered groups", préprint.
- [22] F. WEHRUNG, "Equational compactness of bi-frames and projection algebras", à paraître dans *Algebra Universalis*.
- [23] G.H. WENZEL, "Equational compactness", Appendix in: G. GRÄTZER, "Universal Algebra", 2nd edition, Springer-Verlag, 1979.

---

Université de Caen, département de Mathématiques, 14032 Caen Cedex (E-Mail  
gremlin@math.unicaen.fr).



## Autres conférences

Les conférences dont les titres suivent n'ont pas donné lieu à une version écrite.

**Yves DIERS** (Université de Valenciennes) :

*Catégories d'ensembles algébriques.*

**François LAMARCHE** (Imperial College, Londres) :

*Sur la dualité de Tchou.*

**Paul TAYLOR** (Imperial College, Londres) :

*A sketch for the classifying theory of a dependant type theory.*

**Albert BURRONI** (Université Paris 7) :

*Le topos (?) des n-polygraphes.*



## Table des matières

|   |            |
|---|------------|
| <b>Avant-propos .....</b>   | <b>3</b>   |
| <b>Christian LAIR.- <i>Des graphes aux patchworks via les esquisses et les trames</i> ..</b>  | <b>5</b>   |
| <b>Christian RETORE.- <i>Une modalité autoduale pour le connecteur “précède”</i> ....</b>   | <b>11</b>  |
| <b>Patrick DEHORNOY.- <i>Le groupe de structure d'une identité algébrique</i> ...</b>   | <b>17</b>  |
| <b>Pierre AGERON.- <i>Théorie des esquisses et théorie des groupes</i> .....</b>  | <b>23</b>  |
| <b>Dominique DUVAL et Jean-Claude REYNAUD.- <i>Esquisses et calcul</i> .....</b>  | <b>27</b>  |
| <b>Pascale SENECHAUD.- <i>Une application des esquisses : la paramétrisation</i> ...</b>  | <b>33</b>  |
| <b>Matthias GERNER et René GUITART. - <i>Le diagramme localement libre comme une complétion inductive d'un système de choix</i> .....</b>                           | <b>39</b>  |
| <b>Albert BURRONI et Jacques PENON.- <i>Une construction d'un nerf des <math>\infty</math>-catégories</i> .....</b>   | <b>45</b>  |
| <b>Dominique BOURN.- <i>Le foncteur nerf pour les n-groupoïdes</i> .....</b>  | <b>57</b>  |
| <b>R. GORDON and A.J. POWER.- <i>Gabriel - Ulmer duality for categories enriched in bicategories</i> .....</b>  | <b>63</b>  |
| <b>Monique MATHIEU.- <i>Extensions de théories de Lawvere</i> .....</b>   | <b>69</b>  |
| <b>P.T. JOHNSTONE.- <i>Finitary sketches and <math>\sigma</math>-coherent theories</i> .....</b>  | <b>75</b>  |
| <b>Tim PORTER.- <i>Les esquisses en topologie algébrique ?</i> .....</b>  | <b>79</b>  |
| <b>Ronald BROWN.- <i>Representation and computation for crossed modules</i> ....</b>  | <b>85</b>  |
| <b>Winfried DRECKMANN.- <i>A sketch for polynomial functors</i> .....</b>   | <b>91</b>  |
| <b>Yves LAFONT. - <i>Une nouvelle condition de finitude pour les monoïdes présentés par des systèmes de réécriture complets</i> (d'après Craig C. Squier) .....</b> | <b>97</b>  |
| <b>Jacques VAN DE WIELE.- <i>Des invariants de Vassiliev pour les noeuds à la logique de Lie</i> .....</b>  | <b>103</b> |
| <b>Seyed Kazem LELLAHI.- <i>Types de collection et monades</i> .....</b>  | <b>109</b> |
| <b>Pierre DAMPHOUSSE et René GUITART. - <i>Les représentations naturelles de <math>\mathcal{P}X</math> dans <math>\mathcal{PP}X</math></i> .....</b>                | <b>115</b> |
| <b>John G. STELL.- <i>Modelling term rewriting systems by sesqui-categories</i> .....</b>   | <b>121</b> |
| <b>René GUITART. - <i>L'idée de logique spéculaire</i> .....</b>  | <b>127</b> |
| <b>Friedrich WEHRUNG.- <i>Structures ordonnées atomiquement compactes</i> .....</b>   | <b>133</b> |
| <b>Autres conférences .....</b>   | <b>139</b> |

