

**Journée Mathématique
en l'honneur
d'Albert Burroni :
Catégories, théories algébriques
et informatique**

Université Paris VII

Vendredi 20 septembre 2002

Journée Mathématique en l'honneur d'Albert Burroni : Catégories, théories algébriques et informatique

Vendredi 20 septembre 2002
Université Paris VII, Salle 0C02, 175, rue du Chevaleret, 75013

09h10. Accueil.

09h30-10h15. Pierre Ageron,
Albert Burroni dans l'École d'Ehresmann : constructivisme
et structuralisme.

10h15-11h. Yves Lafont,
Théorie algébrique des circuits.

11h20-12h05. Jacques Penon,
T-catégories représentables.

12h05-12h50. Elisabeth Burroni,
Lois distributives. Application aux automates stochastiques.

14h15-15h. Martin Hyland,
Generalized algebra : variations on ideas of Burroni.

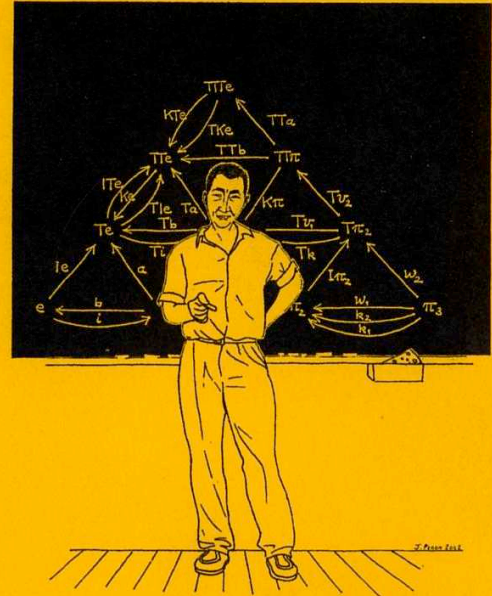
15h-15h45. Vincent Danos,
Rigueur et brutalité en mathématique : la part du calcul.

16h05-16h50. Georges Maltsiniotis,
Homotopie et catégories.

16h50-17h35. René Guitart,
Toute théorie est algébrique.

18h. Pot, avec en entrée :

René Cori, « Stupeur sacrée ! la preuve se fait par les abîmes. ».



Équipes de Topologie et Géométrie Algébrique (UMR 7586), et de Preuves Programmes Systèmes (UMR 7126).
Renseignements auprès de René Guitart (guitart@math.jussieu.fr).

Journée Mathématique en l'honneur d'Albert Burroni : Catégories, théories algébriques et informatique

Université Paris VII,
Équipes de *Topologie et Géométrie Algébrique (UMR 7586)*
et de *Preuves Programmes Systèmes (UMR 7126)*

Salle 0C2, 175, rue du Chevaleret, 75013, Vendredi 20 septembre 2002

Affiche de la Journée : Table des matières, avec un dessin représentant Albert Burroni (par Jacques Penon)	pages 2-3
9h10. <i>René Guitart</i> , Présentation.	5-6
Un souvenir de <i>Marianne Guillemot-Teissier</i> : Une rencontre exceptionnelle.	7-8
Un message d' <i>Andrée C. Ehresmann</i> . Pour la Journée mathématique en l'honneur d'Albert Burroni.	9-10
9h30-10h15 : <i>Pierre Ageron</i> , Albert Burroni dans l'École d'Ehresmann. Constructivisme et structuralisme.	11-24
10h15-11h : <i>Yves Lafont</i> , Vers une théorie algébrique des circuits booléens.	25-26
11h20-12h05 : <i>Jacques Penon</i> , T-catégories représentables.	27-38
12h05-12h50 : <i>Élisabeth Burroni</i> , Lois distributives. Application aux automates stochastiques.	39-62
14h15-15h : <i>Martin Hyland</i> , L'Algèbre Généralisée.	63-68
15h-15h45 : <i>Vincent Danos</i> , Le Formel et l'Insignifiant.	69-72
16h05-16h50 : <i>Georges Maltsiniotis</i> , Homotopie et catégories.	73-78
16h50-17h35 : <i>René Guitart</i> , Toute théorie est algébrique.	79-102
18h : Pot, avec en entrée : <i>René Cori</i> : "Stupeur sacré! la preuve se fait par les abîmes".	103-114
Bibliographie complète des travaux d'Albert Burroni et d'Élisabeth Burroni.	115-116

Présentation

René Guitart

Le but de la Journée du 20 septembre 2002 dont voici les Actes est d'esquisser le parcours mathématique original d'Albert Burroni.

Il a été possible d'organiser cette Journée grâce au financement des Équipes de *Topologie et Géométrie Algébrique (UMR 7586)*, de *Preuves Programmes Systèmes (UMR 7126)* – les deux équipes dont Albert Burroni est membre – et de l'*UFR de Mathématiques de Paris 7* – où il enseigne depuis 1969. Nous en remercions très sincèrement B. Kahn, P.-L. Curien, et P. Vogel. Que soient aussi chaleureusement remerciés É. Burroni, R. Cori, V. Danos, J. Penon, ainsi que O. Ainaudi et C. Salzard, de leurs aides indispensables et continues. Et bien sûr que les conférenciers, qui ont tous accepté avec enthousiasme de participer à la Journée, soient aussi remerciés très cordialement.

Certains amis et collègues qui ne pouvaient venir ont voulu manifester leur soutien à la Journée. Ce sont D. Bourn, F. Borceux, G. Bourdaud, L. Coppey, D. Duval, A. C. Ehresmann, A. Herreman, F. Lamarche, Ch. Leruste, B. Rosebrugh, G. Sabbagh, ainsi que l'ensemble des catégoriciens de Louvain-la-Neuve et d'Italie, en voyage à Toronto.

On peut lire ci-après le message envoyé par Andrée Ehresmann, communiqué donc au début de cette Journée. Comme ce message évoque la rencontre d'Albert Burroni avec Charles Ehresmann en 1967, nous avons pensé à le faire précéder d'un texte à propos d'une autre rencontre importante, plus ancienne, avec Lise Teissier et Marianne Teissier, en 1954 ... que nous avons demandé à Marianne Guillemot-Teissier d'évoquer.

De plus, à la fin de la Journée, autour d'un pot où tous étaient conviés, René Cori nous a livré sa joyeuse approximation personnelle de la vie mathématicienne d'Albert Burroni — que l'on aura plaisir à lire ici, en conclusion. Nous avons ajouté encore une bibliographie complète des travaux publiés par Albert Burroni et par Élisabeth Burroni.

Entre ces débuts et fin, où les détails biographiques établissent un peu la forme spécifique de l'attachement d'Albert Burroni aux mathématiques – on trouvera donc ici, dans l'ordre où elles se sont tenues, huit conférences purement mathématiques. Elles sont en double relation avec Albert Burroni. En effet, d'une part, tous les conférenciers ont échangé et travaillé avec Albert Burroni à un moment donné dans le passé ; et, d'autre part, tout ce dont ils parlent maintenant dans ces conférences-ci est lié de manière essentielle avec des mathématiques élaborées par Albert Burroni. La première conférence, de Pierre Ageron, donne une idée de la manière dont les conceptions d'Albert Burroni

s'insèrent dans l'École d'Ehresmann en théorie des catégories, par les travaux sur l'esquisse des topologies, puis prennent leur envol propre. Les principales idées qu'il a introduites ensuite sont les T -catégories, les structures 2-algébriques et pseudo-algébriques, les algèbres graphiques et polygraphiques, la récursivité graphique. Les conférences suivantes ici sont toutes liées à ces idées-là, en montrent en acte la fécondité et l'actualité.

La fécondité ou richesse de ces idées s'éclaircit un peu en songeant à la question du style. Il est une espèce de mathématiciens, comme Charles Ehresmann ou Joachim Lambek, qui pense que l'essentiel du travail mathématique est, finalement, d'aboutir aux bonnes définitions, si naturelles qu'elles en soient immédiatement intelligibles et qu'elles évitent tout calcul. L'attachement à cette conception – du naturel auquel il faut tant travailler, qu'il faut savoir attendre – est une forme de rigueur intellectuelle. Si Ehresmann et Lambek, notamment, ont si bien apprécié Albert Burroni, c'est peut-être parce que, en sus du caractère attachant de son cheminement et de sa personne, ils ont reconnu en lui quelqu'un de cette espèce-là.

à Paris, le 31 janvier 2004.

Une rencontre exceptionnelle

Marianne Guillemot-Teissier

C'est un vieux souvenir ...

Ma mère, Lise Teissier, directrice du Centre d'orientation professionnelle des 3^{ème} et 4^{ème} arrondissements de Paris, m'a raconté ce jour là que sa collègue Madame Galloy avait rencontré, à la consultation, un singulier jeune homme.

Ce garçon avait emporté, pour lire dans la salle d'attente, un livre acheté sur les quais ... (que serait-il arrivé, ou plutôt que ne serait-il pas arrivé, si cette dame n'avait pas eu l'idée de regarder ce livre ?).

Madame Galloy a vu qu'il s'agissait de Mathématiques, mais, n'y comprenant rien, elle a préféré le montrer à sa directrice. (Sur l'auteur de ce livre, mes souvenirs sont un peu en désaccord avec ceux d'Albert ; lui dit qu'il s'agissait d'un manuel de Mathématiques spéciales de Papelier ; je croyais me souvenir que c'était un ouvrage de Georges Bouligand, qui avait assuré le cours de Calcul différentiel et intégral l'année où j'ai passé ce certificat, mais qu'importe ? C'était de toute façon un ouvrage mathématique de niveau universitaire).

En entendant le récit de ma mère, j'ai pensé immédiatement que je devais rencontrer ce jeune homme ; mais je me disais que si un apprenti ébéniste, qui n'avait presque pas fait d'études secondaires, se promenait avec un livre de mathématiques supérieures sous le bras, c'était sans doute en partie pour se singulariser, et qu'il n'en comprenait vraisemblablement pas grand chose lui-même – Mais, quelques jours plus tard, quand j'ai vu Albert Burroni pour la première fois, je me suis rendu compte que j'étais très loin de la vérité ...

Je rencontrais quelqu'un qui comprenait les Mathématiques sans aucune référence scolaire – C'était stupéfiant. Après tant d'années, il m'est difficile de donner des détails sur ce premier entretien : à part, de mon côté, cette stupeur, cet émerveillement. Je me rappelle pourtant qu'un moment, feuilletant ce fameux livre, Albert a indiqué : “Je suis resté longtemps sur cette page”. Il s'agissait de la définition de la continuité ...

Quand j'ai revu ma mère, je lui ai dit : “Il est sensationnel !” Pour moi, pour ma mère aussi, il fallait qu'il reprenne ses études, cela ne faisait pas le moindre doute ; il fallait préparer le baccalauréat par correspondance, trouver un travail plus compatible avec les études que celui d'apprenti ébéniste. Je suis allée voir M. Gustave Monod, qui était alors directeur de l'enseignement supérieur. Je ne le connaissais pas personnellement ; il m'a reçue très courtoisement et s'est montré compréhensif. Il a rapidement trouvé pour Albert un travail (à temps partiel je crois) au ministère de l'Éducation Nationale.

Pour l'aider à préparer le bac, Albert a suivi quelques leçons particulières, pendant peu de temps je crois. L'un des professeurs s'entendait bien avec lui ; un autre, de caractère moins agréable, s'accommodait mal d'un élève aussi atypique.

Nous nous sommes vus par la suite, souvent d'abord, ensuite nos rencontres se sont espacées. Il voyait d'avantage ma mère, qui recevait ses confidences et lui prodiguait ses conseils. Elle a été pour lui une sorte de mère adoptive. Il lui a dédié sa thèse de 3^{ème} cycle.

Quand nous nous rencontrions, nous parlions de mathématiques, et aussi de beaucoup d'autres sujets : littérature, musique, sciences ...

À cette époque, comme on sait, le baccalauréat comportait deux parties. Albert a été reçu du premier coup au premier bac. Pour le second, cela ne s'est pas aussi bien passé, et il est parti au service militaire sans être bachelier. Albert a rappelé que ma mère et moi lui avons envoyé

à l'armée des fascicules de Bourbaki. j'avais presque oublié cet épisode, et je ne me souviens pas de lui en avoir expédié plus d'une fois. Il est vrai que je n'ai jamais partagé l'enthousiasme d'Albert pour cet auteur polycéphale – peut-être parce que je connaissais quelques uns des membres de cette confrérie ... et je n'ai jamais réussi à faire se rencontrer Albert et l'un d'entre eux. Et s'il en a connu certains plus tard, c'était de sa propre initiative.

Albert a repris ses études. On se rencontrait plus rarement. Comme moi, il est devenu enseignant d'Université et chercheur. Comme moi, il s'est marié et a eu des enfants.

Après la mort de ma mère, il y a 16 ans, je ne l'ai vu qu'une fois, un peu par hasard. Mais je ne l'avais pas vraiment perdu de vue. Je le savais travaillant dans les Mathématiques qu'il aimait, entouré d'amis dont beaucoup venaient du cadre des mathématiques, et je connaissais Elisabeth, qui elle aussi l'avait rencontré grâce aux Mathématiques.

Cette journée de 2002 fut l'apogée d'une carrière commencée il y a bien des années, dans un centre d'orientation professionnelle ...

Ce fut aussi une fête des mathématiques et de l'amitié.

Je suis heureuse d'avoir revu Albert ce jour là.

Marianne Guillemot-Teissier

22 octobre 2003.

Pour la Journée Mathématique en l'honneur d'Albert Burroni

Andrée C. Ehresmann

Des engagements antérieurs m'empêchent de me trouver parmi vous aujourd'hui et je le regrette vivement ; j'envoie ces quelques mots pour qu'il y ait quand même une certaine présence de Charles et de moi-même.

Charles a connu Albert Burroni comme étudiant de Maîtrise puis de 3^{ème} cycle, et il m'a tout de suite parlé de cet étudiant au parcours atypique qu'il appréciait beaucoup. A cette époque nous étions en plein développement de la théorie des esquisses, et il est donc naturel que sa thèse de 3^{ème} cycle (soutenue en Juillet 1970) ait porté sur cette théorie. J'ai suivi ses travaux dès le début, mais ne l'ai rencontré que quelques mois avant la soutenance pour en discuter puisque Charles m'avait demandé d'être rapporteur de sa thèse.

À notre première entrevue, j'ai été frappée du tour stimulant que la conversation a tout de suite pris, approchant les domaines les plus divers des Mathématiques. Cette expérience s'est souvent renouvelée à Jussieu pendant les 5 années suivantes, avant que nous venions nous fixer à Amiens où les occasions de se rencontrer ont malheureusement été plus rares.

Cinq de ses articles ont été publiés dans les "Cahiers" : son important travail sur les *T-catégories* en 1971, *Structures pseudo-algébriques* en 1975, *Algèbres graphiques* en 1981, *Récurtivité graphique* en 1986 et, avec Elisabeth, *Structures algébriques: Thèmes et Variations* en 1992. Ses idées ont souvent été trop en avance de leur temps pour être immédiatement reconnues à leur juste valeur, mais ceci est en train de changer et je suis persuadée que ses travaux seront de plus en plus utilisés et cités.

J'espère qu'Albert Burroni appréciera (autant que je le fais moi-même) la liberté que donne la retraite et qu'il profitera pleinement des années à venir pour continuer avec encore plus d'ardeur ses beaux travaux.

Andrée C. Ehresmann

Paris, le 20 septembre 2002

Albert Burroni dans l'école d'Ehresmann.

Constructivisme et structuralisme.

par Pierre Ageron (Caen)

L'objet de cette conférence est d'analyser les premiers travaux mathématiques d'Albert Burroni sous divers angles (historique, épistémologique, technique).

1. Vous savez que c'est sous la conduite de **Charles Ehresmann** qu'Albert a fait ses premiers pas dans la recherche. Lorsqu'Ehresmann, professeur à l'Université Paris 7, a pris sa retraite en 1975, il était devenu victime d'un certain ostracisme et l'événement n'a pas été marqué par une petite fête comme celle d'aujourd'hui. Je saisis donc l'occasion de présenter quelques aspects de sa pensée mathématique, sans lesquels il est difficile de saisir le sens des travaux d'Albert. Ce paragraphe résume une partie d'une étude en préparation sur la théorie ehresmannienne des structures.

Je souligne d'abord qu'Ehresmann n'a pas la vocation d'un marginal des mathématiques. Normalien très attaché à son école ainsi qu'à son maître Élie Cartan (le seul mathématicien français de l'ancienne génération bénéficiant du respect des « jeunes Turcs » des années 30), dont il poursuit l'œuvre de refondation de la géométrie différentielle, c'est tout naturellement qu'il est en 1935 l'un des neuf membres fondateurs de Bourbaki. Mais s'il partage pleinement l'idéal de structuration et d'unification de la mathématique qui caractérise le groupe, il se singularise en croyant possible et nécessaire une définition précise de la notion générale de structure, susceptible de développements théoriques : il le dit en 1939 devant Cavailles et Lautman [Ehresmann 1946]. Or bien des membres du groupe ne sont pas convaincus et considèrent que l'idée de structure fait partie des « notions premières » [Beaulieu 1989, p. 329]. Jean Dieudonné a ainsi résumé les choses :

« Dès avant 1940, il rêvait d'une théorie abstraite de toutes les espèces de structures possibles, ce qui rencontrait quelques réticences au sein du groupe Bourbaki. » [Dieudonné 1984]

On doit cependant constater que la première publication de Bourbaki, le fascicule de résultats de *Théorie des ensembles* [Bourbaki 1939], s'achève bel et bien (dans son paragraphe 8) sur un essai de définition générale des « structures » et « espèces de structures ». Quel a été le rôle d'Ehresmann dans l'élaboration de cette définition ? Selon sa deuxième épouse Andrée Charles-Ehresmann, « il a beaucoup participé à sa formulation » [A. Ehresmann 1980, p. 823]. Mais selon le témoignage d'André Weil recueilli par Liliane Beaulieu, le fascicule a essentiellement été rédigé par Delsarte et Dieudonné, avec la collaboration ponctuelle de Cartan

[Beaulieu 1989, p. 331]. Vu l'insistance d'Ehresmann sur la notion de structure, j'ai quand même du mal à croire qu'il ne se soit pas fortement impliqué dans l'affaire : l'ouverture prochaine des archives de Bourbaki devrait aider à préciser ce point.

Quoi qu'il en soit, cette notion de structure, reprise dans le traité complet [Bourbaki 1957], n'a cessé de susciter des commentaires sévères de la grande majorité des commentateurs : « une définition horrible » [Lambek 1968, p. 156], « compliquée et inefficace » [MacLane 1983], « peu maniable et d'un emploi difficile » [Patras 2001, p. 130], « la partie la plus laide de son œuvre » [Béziau 2002, p. 51], « un monstre et un outil inutilisable » [Cartier 2003, p. XXVII], etc. Je pourrais multiplier les citations. Ce genre de jugement, a pris, on le voit, un caractère assez automatique. Le paradoxe est qu'elles expriment le fond de la pensée du groupe Bourbaki, les « réticences » dont Dieudonné a fait état devenant d'ailleurs explicites lors la troisième édition du fascicule de résultats, en 1958 :

« [...] il ne semble guère possible d'énoncer des définitions générales et précises concernant les structures, en dehors du cadre de la Mathématique formelle. »

Je souhaite présenter une défense de la tentative bourbakiste de 1939, que l'on doit considérer comme un acte de recherche et non une mise au net d'idées antérieures. S'il est exact qu'*au sein du traité*, « elle ne joue pas de rôle mathématique significatif » [Corry 1996, p. 334], elle a connu *hors Bourbaki* une remarquable postérité qui plaide pour elle. On y voit apparaître deux idées-clefs :

- celle de transport de structure (par bijection),
- celle de construction de structure (via l'échelle des ensembles).

Or ce sont exactement ces deux idées, convenablement réinterprétées, qui sont à la base de la théorie générale des structures élaborée par Ehresmann à partir de 1957, dans le langage de la théorie des catégories d'Eilenberg-MacLane (contrairement à ce qu'on croit parfois, cette dernière n'est pas, en soi, une théorie des structures). Comme il est clairement expliqué dans l'introduction du livre *Catégories et structures* [Ehresmann 1965, p. vii], la théorie catégorique des structures associe deux points de vue complémentaires :

1— Le *point de vue algébrique*, ou théorie axiomatique des espèces de structures, généralise en termes de catégories d'opérateurs l'idée de transport de structure ([Ehresmann 1957], [Ehresmann 1965]). À noter que l'interprétation combinatoire des séries entières proposée par Joyal dans un article célèbre se réclame explicitement d'Ehresmann et de ce point de vue [Joyal 1981, p. 1].

2— Le *point de vue constructif* m'intéressera ici davantage. Il s'agit d'élaborer des méthodes de définition de structure sur des objets d'une catégorie arbitraire. Assez naturellement, Ehresmann songe d'abord à fonctorialiser la technique de Bourbaki : c'est la *méthode des foncteurs types* [Ehresmann 1960], à laquelle plusieurs de ses élèves donnent ensuite de beaux développements dans un esprit de plus en plus catégorique — voir [Guitart 1979] pour un résumé. Elle est cependant insuffisamment universelle pour pouvoir, comme le réclament

les mathématiques depuis la fin des années 1950, structurer des objets d'une catégorie arbitraire. Ehresmann est alors conduit à imaginer *la méthode des esquisses* : [Ehresmann 1966], [Ehresmann 1968]. Inspirée par la notion de « type » ([Bénabou 1968a]), qui généralise elle-même celle de « théorie algébrique » ([Lawvere 1963]), la notion d'esquisse y ajoute deux idées supplémentaires fortement nouvelles :

- définir les structures par des propriétés universelles beaucoup plus générales que les produits : limites projectives et/ou limites inductives quelconques,
- accomplir ces définitions dans un formalisme minimaliste de caractère axiomatique : il ne s'agit pas de prétendre décrire une théorie achevée, mais une présentation de théorie, comme c'est le cas dans la pratique des mathématiques.

Qu'est-ce qu'une esquisse ? On commence par définir une notion de **néo-catégorie**, alias **graphe multiplicatif**, qui généralise celle de catégorie en ne supposant pas que deux flèches consécutives ont nécessairement une composée (tout objet a néanmoins une identité). Une esquisse σ est alors une néocatégorie dans laquelle on distingue certains cônes projectifs et/ou inductifs (non nécessairement discrets). On définit une réalisation de σ dans une catégorie \mathbb{H} comme un foncteur de σ vers \mathbb{H} envoyant chaque cône projectif (resp. inductif) distingué sur une limite projective (resp. inductive) dans \mathbb{H} . On dit d'une catégorie qu'elle est esquissable si elle est équivalente à la catégorie des réalisations d'une esquisse σ dans la catégorie des ensembles.

La définition d'une esquisse a en réalité connu de nombreuses variations. En voici un exemple : dans [Ehresmann 1966] et [Ehresmann 1968], une esquisse comporte (en plus des ingrédients précédents) des flèches distinguées, que les réalisations doivent envoyer sur des monomorphismes ; par la suite, cette donnée s'est avérée inutile, des cônes projectifs particuliers pouvant jouer le même rôle. D'autres variations, liées à la taille des données, seront analysées plus loin.

Les premiers exemples d'esquisses apparaissent dans [Ehresmann 1966]. Y est ainsi dessinée une esquisse dont les réalisations ensemblistes s'identifient aux catégories (petites) : cette esquisse (aujourd'hui gravée sur la tombe d'Ehresmann) permet de définir aisément les catégories dans une catégorie arbitraire. Le même article décrit brièvement une esquisse dont les réalisations ensemblistes sont les corps : on a là le tout premier exemple d'une esquisse « mixte », c'est-à-dire avec co-présence de cônes projectifs et de cônes inductifs.

Parmi les nombreuses thèses de troisième cycle dirigées par Ehresmann vers 1970, beaucoup portent sur les esquisses : [Burroni 1970t], [É. Burroni 1970t], [Lair 1970t], [F. Conduché 1971t], [Barthélémy 1971t]. Par la suite, c'est surtout Ch. Lair qui développe la théorie des esquisses, collaborant successivement avec F. Foltz, R. Guitart, L. Coppey. La théorie s'internationalise à partir du milieu des années 1980 et représente aujourd'hui un corps de doctrine considérable — sur lequel manque encore une synthèse.

La notion d'esquisse illustre une caractéristique de la pensée d'Ehresmann : la volonté d'élever au rang de concept ce qu'on voyait auparavant comme présentation, non intrinsèque, d'un type de structure. Une démarche qui a été sévèrement jugée : Jean Bénabou par exemple estime que « le type est le "vrai" objet mathématique » [Bénabou 1968a] et critique le « manque d'élégance » et le « défaut d'invariance » des notions non intrinsèques (sans il est vrai explicitement mentionner les esquisses) [Bénabou 1968b]. C'est en effet une option philosophique neuve et forte que d'accorder un statut d'*objet algébrique de premier plan* à des systèmes, *a priori* peu ou pas structurés, de générateurs et relations. C'est le cas des néocatégories : elles sont des présentations de catégories, mais aussi pour Ehresmann des structures fondamentales par elles-mêmes. Le choix, rare et audacieux, du préfixe *néo*, préféré aux habituels *pré*, *semi*, *para*, *quasi*, *pseudo*, . . . , en est une confirmation éclatante. C'est le cas des esquisses : elles sont des présentations de types de structures, de théories mathématiques. Dans ce cas, c'est le mot même d'esquisse, à mon avis grande réussite terminologique, qui montre l'importance accordée à la notion.

Dans cette attitude, je crois retrouver un écho de la critique intuitionniste. Il s'agit de répondre à des questions comme : que sont les mathématiques sinon la construction progressive, jamais achevée, de théories à partir de présentations axiomatiques ? le type, objet déductivement clos, a-t-il une réalité autre qu'idéale ? et est-on fondé à identifier deux présentations aussi longtemps que l'on n'a pas représenté l'une dans une extension de l'autre ? La considération de structures algébriques affaiblies ou partielles lui permet de rendre compte mathématiquement de la construction progressive d'une structure, et d'échapper au vertige tautologique menaçant l'algèbre universelle. Or ces structures faibles, chères par exemple à un Krasner, ont été bannies par l'idéologie dominante du vingtième siècle au nom de l'élégance ou de l'économie conceptuelle, certes éminemment désirables, mais rarement acquises dès le départ. Mais du point de vue des mathématiques constructives, l'idée de fonction partielle est essentielle, et il en va de même pour un point de vue constructif sur les structures. Ehresmann entreprend ainsi, avec ses élèves, *la constructivisation de la méthode structurale à l'intérieur d'elle-même*. Je suis frappé par son utilisation dans [Ehresmann 1966] du mot *idée*, qui désigne la genèse d'une construction (le mot est repris dans [Lair 1971a]). Mieux : Ehresmann formalise une notion d'*idée constructive*, qu'il abrège en *Idée*, avec une majuscule suggérant un retranchement du platonisme dans les petits dessins. Les noms donnés aux différents concepts mis au point dans l'école d'Ehresmann (esquisse, idée, prototype, maquette, ébauche, trame, canevas. . .) révèlent la quête d'une écriture archaïque des choses, de signes graphiques susceptibles d'être soumis au calcul formel. Ce « constructivisme structural » est vraiment, surtout dans les années 1960-70, un mode de pensée extrêmement original. Cela est une des explications de la rapide et considérable marginalisation nationale et internationale d'Ehresmann, puis de celle du groupe d'élèves resté fidèle au « point de vue systématiquement constructif des esquisses » [Lair 1971a].

2. La thèse de 3e cycle d'Albert Burroni s'intitule *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies* [Burroni 1970t]; elle a été en partie résumée dans deux notes aux *Comptes-rendus de l'Académie des sciences* : [Burroni 1970a], [Burroni 1970b]. La soutenance s'est déroulée le 30 juin 1970 : le jury, présidé par Charles Ehresmann, était composé d'Andrée Bastiani, rapporteur de la thèse et future épouse d'Ehresmann, ainsi que de Michel Lazard et Peter Hilton, deux mathématiciens à qui l'on doit des réflexions très précoces sur la notion générale de structure (notion d'analyseur dans [Lazard 1955], "group-like structures" dans [Eckmann-Hilton 1962]).

La thèse d'Albert est d'abord une première synthèse, remarquablement claire, de l'état de la théorie des esquisses en 1970. On note que la classe de flèches distinguées (devant se réaliser en monomorphismes) est toujours présente parmi les données d'une esquisse. Comme dans les textes d'Ehresmann, l'accent mis sur l'aspect constructif de la théorie est attesté par l'omniprésence du verbe "construire" et de ses dérivés, par exemple dans cette phrase :

« si nous partons d'une esquisse déjà connue, nous en construirons une plus grande en parlant de *données supplémentaires*, c'est-à-dire en ajoutant de nouvelles données à celles déjà connues. » [Burroni 1970t, p. 4].

Le travail d'Albert a aussi, et surtout, consisté en une étude d'exemples. Dans ces temps pionniers, il importait en effet d'évaluer le pouvoir expressif du formalisme des esquisses en agrandissant le corpus de structures esquissées. Parmi les exemples mémorables qu'il décrit, une « esquisse d'esquisse » apporte la preuve que le formalisme est suffisamment puissant pour s'autodécrire :

« Les esquisses et les types sont des structures qui servent à définir des structures algébriques. En construisant leur esquisse, nous montrons qu'elles-mêmes sont des structures algébriques, ce qui permet d'en déduire leurs propriétés générales. » [Burroni 1970b, p. 449]

C'est surtout à l'« esquisse de topologie » que je m'intéresserai aujourd'hui. La structure d'espace topologique était vraisemblablement considérée comme un test critique pour la théorie des esquisses : c'est en effet l'exemple même de structure qui se décrit aisément « à la Bourbaki » ou en termes de foncteurs typiques, alors qu'il n'est pas évident qu'on puisse la définir par limites projectives et inductives. Assez curieusement, Ehresmann avait affirmé très tôt que c'est possible [Ehresmann 1966, p. 3], tout en se gardant bien de dire comment ! En 1970, Albert résout le problème :

« On montre que les topologies peuvent être définies comme des structures algébriques : ce sont des réalisations d'une esquisse dans un type. Cette esquisse, construite en utilisant la notion de "typification", est à la fois projective et inductive. » [Burroni 1970a, p. 228]

Remarquons l'insistance sur le caractère mixte de l'« esquisse de topologie » : il semble qu'on l'ait jusqu'à ce jour tenu comme un fait mathématiquement significatif. À la fin de cette conférence, je vous montrerai que ce n'est pas le cas, car on peut la remplacer par une autre « esquisse de topologie » qui est, elle, purement projective. Je montrerai d'ailleurs qu'Albert est passé très près de cette construction !

Mais revenons au raisonnement qu'il tient en 1970. Lorsqu'on tente d'esquisser les topologies, une des difficultés de l'exercice tient au fait qu'on veut obtenir les applications continues comme transformations naturelles entre réalisations de l'esquisse. Il est donc exclu de décrire une topologie à partir de l'ensemble de ses ouverts : ce sont alors les applications ouvertes qu'on obtiendrait. Inspiré par l'esprit des quasi-topologies ("Limesräume") de Kowalsky, auxquelles Ehresmann s'était aussi intéressé, Albert montre que se donner une topologie sur un ensemble E revient à se donner, entre l'ensemble $\mathbf{F}(E)$ des filtres sur E et l'ensemble E lui-même, une relation « de convergence » soumise à certains axiomes. Une application continue est alors une application qui préserve cette notion de convergence. Voici un système d'axiomes possible, parmi d'autres systèmes équivalents discutés par Albert. Les identificateurs des axiomes sont ceux qu'il utilise :

T₂ si $F \rightarrow x$ et si $F \subset F'$, alors $F' \rightarrow x$

T₁ $I_E(x) \rightarrow x$ [$I_E(x)$ désignant le filtre principal associé à un point x de E],

T'₄ si $\Phi \rightarrow F$ et si $F \rightarrow x$, alors $K_E(\Phi) \rightarrow x$ [$K_E(\Phi)$ désignant le filtre sur E obtenu en faisant la "somme" des éléments d'un filtre Φ sur $\mathbf{F}(E)$].

En décrivant abstraitement cette situation, il obtient l'esquisse cherchée. Elle comporte entre autres un « objet des points » e , un « objet des filtres » $f(e)$, un « objet des filtres sur les filtres » $f(f(e))$, des flèches de e vers $f(e)$ et $f(f(e))$ vers $f(e)$ pour représenter les applications I_E et K_E , et un monomorphisme de but $f(e) \times e$ pour se donner la relation de convergence entre filtres et points. Il n'est pas difficile de traduire les axiomes ci-dessus, après quoi il ne reste guère qu'à « typifier » l'objet $f(e)$ comme ensemble des filtres sur e . Pour cela, Albert a l'idée de décomposer le foncteur $\mathbf{F} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ comme limite inductive canonique de foncteurs représentables et ajoute à l'esquisse les cônes projectifs (discrets) et le cône inductif nécessaires pour spécifier cette décomposition. Les réalisations ensemblistes de l'esquisse obtenue sont bien les espaces topologiques. À noter qu'Albert étudie aussi les réalisations *topologiques* de son esquisse, et conclut, apparemment un peu déçu :

« Une "topologie topologique" n'est rien d'autre qu'un couple (π, π') de topologies au-dessus d'un même ensemble $\theta(\pi) = \theta(\pi')$ ». [Burroni 1970t, p. 65]. »

Telle est l'esquisse de topologie d'Albert. Si l'on consulte la bibliographie récente sur les esquisses, on peut être frappé du fait qu'elle n'y est jamais mentionnée. Plus troublant encore, la lecture de travaux devenus classiques permet de conclure qu'une telle esquisse n'existe pas ! En effet, une catégorie esquissable contient nécessairement un ensemble *dense* d'objets *présentables* [Lair 1981]. Mais ce n'est pas le cas de la catégorie \mathbf{Top} , où « les individus présentables sont exactement ceux qui sont discrets : une société exemplaire ! » [Gabriel-Ulmer 1971, S. 64].

Le paradoxe n'est bien sûr qu'apparent, et voici son explication. La définition standard des esquisses, depuis [Ehresmann 1968], requiert que les cônes distingués d'une esquisse spécifient des limites projectives ou inductives d'indexation **petite**. Avec les notations de l'époque (où \mathcal{N}'_0 désigne la classe des petites néocatégories) :

$$\mathcal{I}, \mathcal{I}' \subset \mathcal{N}'_0$$

Or l'esquisse des topologies construite par Albert comporte un cône inductif d'indexation non petite. C'est ce qui l'a conduit à mettre un chapeau :

$$\mathcal{I}, \mathcal{I}' \subset \widehat{\mathcal{N}}'_0$$

détail graphique qui indique qu'il a abandonné la restriction de taille sur les cônes, obtenant une notion d'esquisse beaucoup plus générale. Cette extension ne fait, curieusement, l'objet d'aucun commentaire, que ce soit dans sa thèse ou dans les notes aux *Comptes-rendus*. Il faut dire que le maître avait donné son feu vert : « Ce n'est pas la Bible, ma définition ! » ; dans ces conditions, se rappelle Albert, « je me sentais couvert ». J'ai relevé systématiquement les contraintes de taille imposées aux esquisses dans tous les articles de théorie des esquisses des années 1966-1975 : elles connaissent de nombreuses variations. On découvre par exemple que Christian Lair, dont l'objectif constant, atteint dans [Lair 1981], a été de caractériser les catégories esquissables, travaillait dans [Lair 1971b] avec la même notion d'esquisse généralisée qu'Albert Burroni, puis revint assez rapidement à des cônes d'indexation petite. C'est que la méthode de « typification » d'Albert était en un sens trop puissante : selon Lair, le Canadien Robert Paré suspectait dès cette époque que *toute* catégorie est esquissable par une esquisse dont on ne contrôle pas la taille — ce qu'il établira bien plus tard, sous l'hypothèse (plutôt faible) que les idempotents de la catégorie soient scindés [Makkai-Paré 1987, theorem 2.2.2.].

On pourrait en conclure que la partie de la thèse d'Albert relative à l'esquisse de topologie a ainsi perdu sa pertinence. Ce serait aller trop vite en besogne, car prouver l'esquissabilité d'une catégorie et construire une esquisse particulière sont deux choses bien différentes. Je m'en suis convaincu lorsque j'ai tenté de retrouver l'esprit de cette époque en esquissant *ab initio* certaines catégories essentiellement *petites* à idempotents scindés (l'esquissabilité d'une telle catégorie est assurée par la théorie). Ainsi, lorsque j'ai voulu esquisser la catégorie des

extensions algébriques galoisiennes de \mathbb{Q} , j'ai utilisé la théorie de Galois-Krull-Grothendieck [Ageron 2001]. Indépendamment de cette théorie, la même esquisse (à isomorphisme près) résulte aussi de la connaissance de certaines propriétés abstraites de la catégorie, faciles à vérifier... à condition d'en connaître *a priori* la liste! De la même façon, Albert a construit son esquisse en utilisant des outils mathématiques extérieurs (filtres), complètement étrangers aux méthodes générales de construction d'esquisses (qui n'ont été imaginées que dix ans plus tard par Lair, et ne conduisent pas à une esquisse canonique en général). Il me semble que la question de savoir ce que fait exactement le mathématicien qui esquisse un type de structures est fort délicate, et demanderait à être approfondie en croisant les approches psychologique et mathématique. Bien sûr, dans le système de pensée d'Ehresmann, le problème est éludé puisque l'esquisse est l'objet primitif : mais l'esquisse de topologie d'Albert est peu plausible en tant qu'écriture archaïque ou qu'objet syntaxique, tel qu'en utilise aujourd'hui l'informatique.

Concluons sur la thèse de 3e cycle d'Albert : elle renferme un travail sur la structure de topologie, sans aucun doute extrêmement significatif, mais qui, à l'époque de sa rédaction, n'a pas encore trouvé le cadre conceptuel qui lui donne vraiment sens. Une solution strictement mathématique sera apportée dès l'année suivante par Albert par lui-même.

3. J'en viens ainsi au long mémoire [Burroni 1971] qui s'intitule **T-catégories** (*Catégories dans un triple*), et qui révèle à mon avis un mathématicien profond et original. En comparaison de [Burroni 1970t], il procède d'influences plus diversifiées ([Barr 1969], [Bénabou 1967], [Lambek 1969]) : j'y insisterai toutefois peu, car elles sont indiquées avec précision. Ce qui, paradoxalement, est peu explicité, laissant ainsi un espace au commentateur, c'est la filiation entre ce mémoire et la thèse soutenue l'année précédente. Du point de vue épistémologique, on peut analyser les choses ainsi. On a vu que l'esquisse de topologie n'est pas petite, donc peu satisfaisante du point de vue syntaxique. Albert en extrait la partie irréductible à des données petites pour la faire glisser de la syntaxe vers la sémantique. Ainsi, au lieu de voir les topologies comme des structures dans une catégorie (celle des ensembles), il propose de les voir comme des structures *dans un endofoncteur de cette catégorie*. Plus précisément, il lit les propriétés \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}'_4 ci-dessus comme des axiomes de réflexivité et de transitivité « tordus » par \mathbf{F} , l'endofoncteur des filtres. En réalité, c'est \mathbf{U} , l'endofoncteur des ultrafiltres, qu'il privilégie maintenant : cela a pour effet de faire disparaître l'axiome \mathbf{T}_2 et lui permet d'interpréter une topologie comme un *préordre dans \mathbf{U}* . De plus, il note que dans la formulation des axiomes \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}'_4 interviennent les transformations naturelles $I : \text{id}_{\mathbb{E}ns} \rightarrow \mathbf{U}$ et $K : \mathbf{U} \circ \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ qui font de \mathbf{U} un triple (j'utilise ici le mot *triple*, usuel à l'époque, pour désigner ce qu'on appelle plutôt aujourd'hui une *monade*) et est ainsi naturellement amené à s'intéresser aux préordres dans un triple \mathbf{T} quelconque. C'est aussi l'idée de [Barr 1969], mais avec un point de vue différent, visible dans la terminologie : Barr parle d'*algèbres relationnelles* de \mathbf{T} et non de préordres dans \mathbf{T} .

Le fait de considérer des préordres dans un triple est déjà un pas important, rompant avec l'idée que toute structure vit naturellement dans une catégorie. Albert va beaucoup plus loin. Dans une démarche apparemment assez spéculative, il pense à une structure plus générale que celle de préordre dans \mathbf{T} : celle de *catégorie dans \mathbf{T}* (en abrégé : \mathbf{T} -catégorie). Comme il le remarque, cela revient à unifier la polysémie apparente du symbole sagittal \rightarrow , qui traditionnellement désigne aussi bien un *morphisme* dans une catégorie (c'est le cas où $\mathbf{T} = \text{id}$) qu'une *limite* dans un espace topologique (cas d'un préordre dans $\mathbf{T} = \mathbf{U}$). Cette structure de \mathbf{T} -catégorie, conjecturale, à proprement parler chimérique, Albert la synthétise par un moyen indirect : convoquant l'interprétation des catégories donnée dans [Bénabou 1967], il obtient d'abord une définition conceptuelle des \mathbf{T} -catégories, possible a priori seulement dans le cas où le triple \mathbf{T} est "cartésien". Puis il la déconstruit pour aboutir à une description explicite et globale, qui garde un sens dans le cas d'un triple non cartésien (comme celui des ultrafiltres). Cette description explicite des catégories dans un triple \mathbf{T} est donnée dès le début de [Burroni 1971] : c'est la figure 1. On la voit aussi derrière Albert sur l'affiche de notre journée, dessinée avec talent par Jacques Penon (usant de sa liberté d'artiste, Jacques lui a fait subir une rotation d'angle $-\pi/4$). Dans la partie basse de la figure, l'œil exercé reconnaît, un peu déformée, l'esquisse de catégorie : π est l'objet des flèches, e est l'objet des objets, etc. — mais si la flèche « but » (notée b) va, très normalement, de π vers e , la flèche « source » (notée a) va de π vers Te ; ainsi est ménagé un espace, celui qui est nécessaire pour souder une image de l'« esquisse de triple » (bord gauche de la figure). Je suis revenu dans cette dernière phrase au langage des esquisses, mais une note de bas de page montre que telle était bien l'intention d'Albert :

« Dans un travail ultérieur, nous considérerons la figure 1 comme "l'esquisse des \mathbf{T} -catégories", ces dernières n'étant que des "réalisations" de cette "esquisse" munie de "typifications" » [Burroni 1971, p. 232]

Je n'irai pas plus loin dans l'analyse de l'article, où se cachent beaucoup de remarques profondes. Je note avec intérêt que depuis quatre ou cinq ans, après un très long sommeil, la théorie des catégories dans un triple et les différents exemples donnés par Albert ne cessent d'être redécouverts. Voici quelques exemples.

L'interprétation des multicatégories de [Lambek 1969] donnée dans [Her-mida 2000] est identique à celle d'Albert : ce sont les catégories dans le triple des monoïdes libres. Dans [Leinster 2000, 2.2.], on trouve une notion de \mathbf{T} -*multicatégorie* qui coïncide exactement avec celle de \mathbf{T} -catégorie d'Albert (mais Leinster ne travaille que dans le cas où \mathbf{T} est cartésien). En particulier les *fc-multicatégories* de [Leinster 2000, 3.6.] sont exactement ce qu'Albert appelait simplement *multicatégories* [Burroni 1971, p. 276-285] : les catégories dans le triple des catégories libres. Quant aux *ultracatégories* de [Clementino-Tholen 200+], elles ne

sont rien d'autre que ce qu'Albert appelait *hypertopologies* [Burroni 1971, p. 290-291] : les catégories dans le triple des ultrafiltres. Enfin les *polycatégories abstraites* de [Koslowski 2003] sont assez voisines des catégories dans une loi distributive \mathbf{D} , généralisation des catégories dans un triple définies, cette fois, par Élisabeth Burroni [É. Burroni 1973] !

Comme annoncé, je terminerai par une remarque technique sans prétention (son seul mérite est sans doute de ne pas se trouver déjà dans les écrits d'Albert !) Exactement comme pour l'esquisse de topologie, les "typifications" font de l'esquisse de \mathbf{T} -catégorie construite par Albert une esquisse *mixte*. Mais dans le cas (usuel) d'un triple \mathbf{T} sur $\mathbb{E}ns$ (ou bien sur une catégorie de préfaisceaux), *on peut esquisser les \mathbf{T} -catégories de manière purement projective* : ceci tient seulement au fait que les limites inductives dans $\mathbb{E}ns$ sont universelles. On s'explique ainsi mieux que la catégorie des \mathbf{T} -catégories possède toutes les limites projectives, ce qu'Albert a démontré « à la main » [Burroni 1971, p. 232-234]. La construction qu'il a donnée de ces limites revient d'ailleurs plus ou moins à la description d'une telle esquisse projective : il s'agit au fond de déterminer des foncteurs d'oubli adéquats pour lesquels cette construction se fait point par point. Une remarque analogue s'applique aux \mathbf{T} -préordres et, en particulier, aux espaces topologiques : eux aussi sont les réalisations d'une certaine esquisse *projective* (non petite, bien sûr). Enfin, lorsque le triple \mathbf{T} possède un rang, l'esquisse projective de \mathbf{T} -catégorie n'a qu'un petit nombre de cônes : on obtient alors de surcroît l'existence des limites inductives dans la catégorie des \mathbf{T} -catégories, ainsi que l'existence d'un adjoint à gauche pour le foncteur d'oubli des \mathbf{T} -catégories vers les \mathbf{T} -graphes, et même, en utilisant le critère syntaxique de [Lair 1975], la triplabilité de ce foncteur d'oubli.

Concluons sur [Burroni 1971]. Lorsqu'on le compare avec sa thèse, cet article révèle rapidement l'autonomisation de la pensée d'Albert vis à vis de son maître : il a en partie abandonné les notations qui lui étaient chères, il a étendu son horizon bibliographique, et les concepts du « structuralisme constructif » d'Ehresmann (en particulier celui d'esquisse) semblent absents. Et pourtant, à regarder les choses finement, l'esprit ehresmannien est présent, et même plus que dans la thèse. Conscient sans doute de la signification ambiguë de son esquisse de topologie du point de vue constructif, Albert a magistralement retourné la situation : il a d'un même coup restitué un statut clair au travail mathématique accompli dans sa thèse, et créé la doctrine nouvelle et prometteuse des catégories dans un triple. Pour définir ces dernières même dans le cas non cartésien, il a travaillé implicitement avec une esquisse (on pense à la manière dont Ehresmann a su s'affranchir des produits fibrés pour définir les catégories différentiables). Il a du reste annoncé son prochain retour explicite aux esquisses (c'est par le biais des algèbres graphiques qu'il l'accomplira dans les années 1980). C'est enfin dans un esprit très proche de celui d'Ehresmann qu'il a suggéré une étude plus générale des structures dans un triple :

« la notion de \mathbf{T} -catégorie n'est qu'une " \mathbf{T} -structure" parmi d'autres » [Burroni 1971, p. 320]

et même l'étude des structures dans une configuration catégorique autre qu'un triple (Élisabeth a par exemple étudié le cas d'une loi distributive [É. Burroni 1973]). Ainsi, trente ans plus tard, la veine ouverte par Albert Burroni dans les directions tracées par Charles Ehresmann me semble loin d'être épuisée.

BIBLIOGRAPHIE

AGERON (Pierre)

[2001] Limites inductives point par point dans les catégories accessibles, *Theory and Applications of Categories* 8 (2001), p. 313-323

BARR (Michael)

[1970] Relational algebras, in *Reports of the Midwest Category Seminar IV*, Lecture Notes in Mathematics 137, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1970, p. 9-55

BARTHÉLÉMY (Jean-Pierre)

[1971] *Esquisses pointées* (thèse de 3^e cycle), *Esquisses mathématiques* 12 (1971), 79 p.

BEAULIEU (Liliane)

[1990] *Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944)*, thèse de doctorat, Université de Montréal, 1990, deux volumes, 552 p.

BÉNABOU (Jean)

[1967] Introduction to bicategories, in *Reports of the Midwest Category Seminar I*, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967, p. 1-77

[1968a] Structures algébriques dans les catégories, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* 10 (1968), p. 1-126

[1968b] Catégories algébriques et théorie de la descente, *Séminaire Dubreil-Pisot*, 21^e année, 1967/68, n^o 14 (23 mars 1968), 2 p.

BÉZIAU (Jean-Yves)

[2002] La théorie des ensembles et la théorie des catégories : présentation de deux sœurs ennemies du point de vue de leurs relations avec le fondement des mathématiques, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* IX (2002), p. 45-53

BOURBAKI (Nicolas)

[1939] *Théorie des ensembles*, fascicule de résultats, Paris : Hermann, 1939, rééd. 1951, 1958, 1964

[1957] *Théorie des ensembles. Chapitre 4 : structures*, Paris : Hermann, 1957, rééd. revue et diminuée 1966, 1970

BURRONI (Albert)

[1970a] Esquisse de topologie, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (série A)* 271 (1970), p. 228-230

[1970b] Esquisses de types : catégories munies de limites, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (série A)*, 271 (1970), p. 449-452

[1970t] Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies (thèse de 3^e cycle), *Esquisses mathématiques* 5 (1970), 87 p.

[1971] **T**-catégories (Catégories dans un triple), *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XII (1971), p. 215-321

BURRONI (Élisabeth)

[1970] *Catégories discrètement structurées. Triples* (thèse de 3^e cycle), *Esquisses mathématiques* 5 (1970), 88 p.

[1973] Algèbres non déterministiques et **D**-catégories, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XIV (1973), p. 417-475

CARTIER (Pierre)

[2003] *Le défi post-hilbertien*, introduction à : J. Gray, *Le défi de Hilbert*, Paris : Dunod, 2003

CLEMENTINO (Maria) and THOLEN (Walter)

[2003] Metric, Topology and Multicategory A Common Approach, *Journal of Pure and Applied Algebra* 179 (2003), p. 13-47.

CONDUCHÉ (François)

[1971] Sur les structures définies par limites projectives (thèse), *Esquisses mathématiques* 11 (1971), 67 p.

CORRY (Leo)

[1996] *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Bâle : Birkhäuser, 1996

DIEUDONNÉ (Jean)

[1984] notice sur Charles Ehresmann, in *Annuaire des anciens élèves de l'École normale supérieure*, reproduit dans *Charles Ehresmann, œuvres complètes et commentées*, vol. I, Amiens : A. Charles-Ehresmann, 1984, p. XXI-XXIV

ECKMANN (Beno) and HILTON (Peter J.)

[1962] Group-like structures in general categories, *Mathematische Annalen* 145 (1962), p. 227-255 ; 150 (1963), p. 165-187 ; 151 (1963), p. 150-186

EHRESMANN (Charles)

N.B. Toutes les références ci-dessous à l'exception de [1946] et [1965] sont réimprimées dans *Charles Ehresmann, Oeuvres complètes et commentées*, Amiens : A. Charles-Ehresmann, 1980 à 1984

[1946] intervention lors de la discussion sur « La pensée mathématique » suivant la conférence commune d'Albert Lautman et Jean Cavailles (4 février 1939), *Bulletin de la Société française de philosophie* XL (1946), réimpr. dans Jean Cavailles, *Oeuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris : Hermann, 1994

[1957] Gattungen von lokalen Strukturen, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 60 (1957), p. 49-77

[1960] Catégorie des foncteurs types, *Rev. Unión Mat. Argent.* 20 (1960), p. 194-209

[1965] *Catégories et structures*, Paris : Dunod, 1965

[1966] *Introduction to the theory of structured categories*, University of Kansas, Department of Mathematics, Technical report 10 (1966) vii+88 p.

[1968] Esquisses et types des structures algébriques, *Buletinul Institutului Politehnic din Iași* XIV (1968), p. 1-14

GABRIEL (Peter) und ULMER (Friedrich)

[1970] *Lokal präsentierbare Kategorien*, *Lecture Notes in Mathematics* 221, Berlin : Springer 1970

GUITART (René)

[1979] Foncteurs-types, équations de structures, univers algébriques, *Séminaire de catégories Guitart-Lair-Coppey, Foltz*, UER de mathématiques, Université Paris 7, 16 février 1979, exposé n° 9, 8 p.

[1980] Sur les contributions de Charles Ehresmann à la théorie des catégories *Gaetzte des mathématiciens* 13 (1980), p. 37-43, réimprimé dans *Charles Ehresmann, œuvres complètes et commentées*, vol. I, Amiens : A. Charles-Ehresmann, 1984

HERMIDA (Claudio)

[2000] Representable multicategories, *Advances in Mathematics* 151 (2000), p. 164-225

JOYAL (André)

[1981] Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advances in Mathematics* 42 (1981), p. 1-82

KOSŁOWSKI (Jürgen)

[2003] A monadic approach to polycategories, à paraître

LAIR (Christian)

[1970t] *Constructions d'esquisses. Transformations naturelles généralisées* (thèse de 3^e cycle), *Esquisses mathématiques* 2 (1970), 102 p.

[1971a] Idées et maquettes de structures algébriques, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XII (1971), p. 29-55

[1971b] Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une catégorie soit fortement ou très fortement spécifiable, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (série A)* 273 (1971), p. 596-598

[1975] Esquissabilité et triplabilité, *Cahiers de topologie et de géométrie différentielle* XVI (1975), p. 274-279

LAMBEK (Joachim)

[1968] compte-rendu de la deuxième édition de [Bourbaki 1957], *Bulletin canadien de mathématiques* 11 (1968), p. 155-156

[1969] Deductive systems and categories. II. Standard constructions and closed categories, in : *Category Theory Homology Theory Appl.*, Proceedings of the Conference at Seattle Res. Center Battelle Mem. Inst. 1968, 1, Lectures Notes in Mathematics 86, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1969, p. 76-122

LAZARD (Michel)

[1955] Lois de groupes et analyseurs, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure (III^e série)* 72 (1955), p. 299-400

LEINSTER (Thomas)

[2000] *Operads in Higher-Dimensional Category Theory*, thèse, University of Cambridge, juillet 2000

MAC LANE (Saunders)

[1983] recension des *Oeuvres complètes et commentées de Charles Ehresmann*, volumes III-1 et III-2 (Amiens, 1984), *Mathematical Reviews*, 83e : 01090a (1983)

MAKKAI (Michael) and PARÉ (Robert)

[1989] *Accessible categories : the foundations of categorical model theory*, Providence : AMS, 1989

PATRAS (Frédéric)

[2001] *La pensée mathématique contemporaine*, Paris : PUF, 2001

Vers une théorie algébrique des circuits booléens

Yves Lafont

Institut de Mathématiques de Luminy*
Université de la Méditerranée (Aix-Marseille 2) - CNRS

Journée en l'honneur d'Albert Burroni (2002)

J'ai eu la chance de rencontrer Albert Burroni lorsque j'étais étudiant en maîtrise de maths à Jussieu, et qu'il assurait les TD du cours de logique de Jean-Louis Krivine. En règle générale, les normaliens (dont j'étais) n'assistaient pas aux TD, mais nous avons fait en sorte que ceux-ci deviennent une sorte de cours parallèle (et passionnant) sur les catégories. Quelques années plus tard, Albert exposait sa *théorie des mots de dimension supérieure* [1,2]. Pour résumer, je dirais que cette théorie fournit un cadre algébrique unificateur pour des notions logiques (mots, automates, termes, grammaires, réécritures, ...) et topologiques (complexes cellulaires).

Le point de départ de ce nouveau paradigme est une présentation finie par générateurs et relations de la catégorie monoïdale des ensemble finis. Il se trouve que cette présentation apparaît implicitement en *théorie de la démonstration* : d'abord dans le *calcul des séquents* de Gerhard Gentzen, puis dans la *logique linéaire* de Jean-Yves Girard. Issu moi-même de l'école Girardienne, j'ai naturellement adopté le point de vue Burroniste.

Ma première contribution dans le domaine est une *théorie de la réécriture en dimension 2* [3]. Dans ce cas, le point de départ est un système de réécriture complet correspondant à la présentation déjà mentionnée. Mais à l'époque, je n'avais pas assez d'exemples pour apporter de l'eau à notre moulin. Plus tard, je me suis un peu intéressé au *calcul réversible*, puis au *calcul quantique*. Cela m'a donné l'idée d'une *théorie algébrique des circuits booléens* [4]. À vrai dire, cette théorie n'existe pas encore (d'où le titre), mais ce travail m'a conduit à une relecture du calcul matriciel (en particulier de l'algorithme de Gauss) qui m'a paru suffisamment riche et stimulante pour être publiée en l'état alors que l'objectif est loin d'être atteint. De toutes façons, les mathématiciens savent bien que les questions sont plus intéressantes que les réponses...

[1] A. Burroni, *Higher dimensional word problem*, Category theory and computer science (Paris, France, septembre 1991), LNCS 530, Springer-Verlag, pp. 94–105

[2] A. Burroni, *Higher Dimensional Word Problem*, Theoretical Computer Science 115, 1993, pp. 43–62

[3] Y. Lafont, *Penrose diagrams and 2-dimensional rewriting*, Applications of Categories in Computer Science (ed. M.P. Fourman, P.T. Johnstone & A.M. Pitts), LMSLNS 177, Cambridge University Press, 1992, pp. 191–201

[4] Y. Lafont, *Towards an Algebraic Theory of Boolean Circuits*, Journal of Pure and Applied Algebra 184 (2-3), 2003, pp. 257–310

*163 avenue de Luminy, Case 907 - 13288 Marseille CEDEX 9 - France

T-CATÉGORIES REPRÉSENTABLES

JACQUES PENON

INTRODUCTION

Le concept de \mathbf{T} -catégorie (et celui, dérivé, de \mathbf{T} -opérade) apparaît de plus en plus comme central en théorie des catégories aux cotés de celui de monade, algèbres sur une monade, etc... Il n'est pourtant pas nouveau (\simeq 1971), mais il a été longtemps méconnu. Aussi, avec cet article (exposé lors du colloque de Septembre 2002 organisé en l'honneur d'Albert Burroni), nous espérons que nous contribuerons à développer « l'édifice \mathbf{T} -catégorique » et surtout à faire connaître le travail d'Albert Burroni.

Ce papier s'articule entre deux concepts d'Albert Burroni : Celui de \mathbf{T} -catégorie, comme le suggère le titre, et celui de \mathbf{T} -pseudo-algèbre, tous les deux introduits dans [Bur-71]¹, et c'est la notion de \mathbf{T} -catégorie représentable, développée ici, qui va faire le lien entre les deux.

Le concept lui même de \mathbf{T} -catégorie représentable m'a été suggéré, dans les années 70 (à Oberwolfach) par André Joyal pour affaiblir les structures algébriques (mais il trouve aussi ses origines dans [Bur 71] avec les \mathbf{T} -catégories prétensorielles — p.67). De son côté, A.Burroni avait proposé les pseudo-algèbres dans cette même optique (pour l'origine de la notion, consulter [Bur 71]). Nous allons voir qu'en réalité, à un détail près, ces deux concepts sont équivalents (montré au §4).

Signalons que les \mathbf{T} -catégories représentables généralisent les multicatégories représentables de C. Hermida [Her 99] où, pour ces dernières, la monade \mathbf{T} est la monade « monoïde libre ». T.Leinster a lui aussi proposé une définition de \mathbf{T} -catégorie représentable [Lei 02], aussi nous en dirons quelques mots en fin d'article.

Je veux remercier Dominique Bourn pour ses remarques pertinentes (voir le §1) et surtout pour m'avoir évité une erreur qui, bien que ne remettant pas en cause les conclusions du théorème 2, en aurait, faussement, alourdi les hypothèses. Je remercie aussi Pierre Ageron pour ses multiples et indispensables références bibliographiques qui m'ont permis de bien me situer dans la genèse des concepts introduits ici.

¹La terminologie de ce dernier concept à varié au cours du temps : les « \mathbf{T} -pseudo-algèbres» de [Bur 71] ont été rebaptisées, dans un contexte différent, « \mathbf{T} -2-algèbres» dans [Bur 73], puis le nom de « \mathbf{T} -pseudo-algèbres» est réapparu dans le texte de base [Bur 75]. Aujourd'hui Burroni les appelle « \mathbf{T} -algèbres laxes», adoptant la terminologie donnée par M.Bunge de « \mathbf{T} -lax algebras» dans [Bun 74].

1. DÉFINITION DES \mathbf{T} -CATÉGORIES REPRÉSENTABLES.

• Fixons une catégorie à produits fibrés \mathbf{E} que l'on munit d'une structure de monade catésienne $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ (i.e. T commute aux produits fibrés et η, μ sont cartésiennes c.à.d., considérées comme foncteurs $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^2$, elles envoient toute flèche sur un carré cartésien). Une conséquence de ces axiomes, utile ici, est le fait que pour tout objet X de \mathbf{E} la flèche η_X est un monomorphisme fort [Bou] (en effet, cette propriété étant vraie pour les flèches de la forme η_{TX} , elle se transporte par changement de base à η_X).

Commençons par quelques rappels.

On appelle \mathbf{T} -catégorie dans [Bu 71] (mais appelée \mathbf{T} -multicatégorie dans [Lei 88]) la donnée

- d'un objet O de \mathbf{E} et,
- d'un monoïde (S, ι, κ) dans $Gr_O(\mathbf{T})$, où $Gr_O(\mathbf{T})$ est la catégorie monoïdale dont :
 - les objets (appelés \mathbf{T} -graphes) sont les spans de la forme $TO \xleftarrow{\partial_0} S \xrightarrow{\partial_1} O$,
 - les flèches sont simplement les morphismes entre ces spans,
 - l'objet unité est $TO \xleftarrow{\eta_O} O \xrightarrow{Id} O$,
 - le produit tensoriel de $TO \xleftarrow{\partial_0} S \xrightarrow{\partial_1} O$ et de $TO \xleftarrow{\partial'_0} S' \xrightarrow{\partial'_1} O$ est le \mathbf{T} -graphe $TO \xleftarrow{\partial''_0} S \circ S' \xrightarrow{\partial''_1} O$, où $S \circ S'$ est donné par le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} S \circ S' & \xrightarrow{\pi_1} & S \\ \pi_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \partial_0 \\ TS' & \xrightarrow{T\partial'_1} & TO \end{array}$$

et où ∂''_0 et ∂''_1 sont donnés par les composés suivant :

$$\partial''_0 = (S \circ S' \xrightarrow{\pi_0} TS' \xrightarrow{T\partial'_0} T^2O \xrightarrow{\mu_0} TO) \text{ et } \partial''_1 = (S \circ S' \xrightarrow{\pi_1} S \xrightarrow{\partial_1} O).$$

Un morphisme entre deux \mathbf{T} -catégories $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est la donnée de deux flèches : l'une $f : O \rightarrow O'$ et l'autre $s : S \rightarrow S'$ vérifiant les identités suivantes :

$$Tf \cdot \partial_0 = \partial'_0 \cdot s, \quad f \cdot \partial_1 = \partial'_1 \cdot s, \quad \iota' \cdot f = s \cdot \iota \quad \text{et} \quad s \cdot \kappa = \kappa' \cdot s \circ s$$

(où rappelons le, $\iota : C \rightarrow S$ et $\kappa : S \circ S \rightarrow S$)

Les \mathbf{T} -catégories et leurs morphismes forment une catégorie que l'on notera $Cat(\mathbf{T})$

• Donnons nous maintenant une \mathbf{T} -catégorie $\mathcal{S} = (O, S, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$. A cette \mathbf{T} -catégorie on peut faire correspondre deux catégories internes à \mathbf{E} , notées $C(\mathcal{S})$ et $K(\mathcal{S})$ et un foncteur interne $u : C(\mathcal{S}) \rightarrow K(\mathcal{S})$.

• La première catégorie interne $C(\mathcal{S}) = (C_0, C_1, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$ s'obtient comme suit : Son objet des objets C_0 est O et son objet des flèches C_1 , ainsi que le morphisme «domaine» $\partial_0 : C_1 \rightarrow C_0$ sont donnés par le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{can} & S \\ \partial_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \partial_0 \\ O & \xrightarrow{\eta_O} & TO \end{array}$$

Ensuite, les flèches «codomaine» $\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_0$, «identité» $\iota : C_0 \longrightarrow C_1$ et «composition» $\kappa : C_1 \star C_1 \longrightarrow C_1$ (où $C_1 \star C_1 = C_1 \times_O C_1$) sont des restrictions des flèches correspondantes de la **T**-catégorie. De façon précise : $\partial_1 = (C_1 \xrightarrow{can} S \xrightarrow{\partial_1} O)$ et ι et κ proviennent des factorisations :

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \overset{\iota}{\dashrightarrow} & C_1 \\ Id \downarrow & & \downarrow can \\ O & \xrightarrow{\iota} & S \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 \star C_1 & \overset{\kappa}{\dashrightarrow} & C_1 \\ can \downarrow & & \downarrow can \\ S \circ S & \xrightarrow{\kappa} & S \end{array}$$

où $can : C_1 \star C_1 \longrightarrow S \circ S$ est l'unique flèche de **E** rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xleftarrow{\pi_1} & C_1 \star C_1 & \xrightarrow{\pi_0} & C_1 \\ can \downarrow & & \downarrow can & & \downarrow can \\ S & \xleftarrow{\pi_1} & S \circ S & \xrightarrow{\pi_0} & TS \xleftarrow{\eta_S} S \end{array}$$

- La deuxième catégorie interne $K(\mathcal{S}) = (K_0, K_1, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$ (déjà décrite dans [Bur 71] et [Lei 88]), se construit comme suit : Son objet des objets K_0 est TO , son objet des flèches K_1 est TS , ses flèches «domaine», «codomaine» et «identité» sont données par :

$\partial_0 = (TS \xrightarrow{T\partial_0} T^2O \xrightarrow{\mu_O} TO)$, $\partial_1 = (TS \xrightarrow{T\partial_1} TO)$, $\iota = (TO \xrightarrow{T\iota} TS)$. Sa loi de composition $\kappa : K_1 \star K_1 \longrightarrow K_1$ est donnée par le composé : $K_1 \star K_1 \xrightarrow{\sim} T(S \circ S) \xrightarrow{T\kappa} TS$ où l'isomorphisme ci-dessus provient du fait que le carré composé suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccccc} T(S \circ S) & \xrightarrow{T\pi_0} & T^2S & \xrightarrow{\mu_S} & TS \\ T\pi_1 \downarrow & \lrcorner & T^2\partial_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow T\partial_1 \\ T(S) & \xrightarrow{T\partial_0} & T^2O & \xrightarrow{\mu_O} & TO \end{array}$$

Plus qu'une catégorie interne à **E**, $K(\mathcal{S})$ est surtout une catégorie interne à **E^T** (la catégorie des **T**-algèbres). Les morphismes de structure sur K_0 et K_1 sont donnés par les flèches μ_O et μ_S .

- Le foncteur interne $u : C(\mathcal{S}) \longrightarrow K(\mathcal{S})$ entre ces deux catégories est donné par : $u_0 = \eta_O : O \longrightarrow TO$ et $u_1 = (C_1 \xrightarrow{can} S \xrightarrow{\eta_S} TS)$. On montre que u est, internement, pleinement fidèle.
- Nous pouvons maintenant définir les **T**-catégories représentables.

Définition 1.1. Appelons **T**-catégorie représentable une **T**-catégorie \mathcal{S} pour laquelle le foncteur interne canonique $u : C(\mathcal{S}) \longrightarrow K(\mathcal{S})$, précédemment décrit admet (internement) un adjoint à gauche.

Exemple 1.2. Lorsque **E=Ens** et **T** est la monade "monoïde libre", une **T**-catégorie (ce qu'on appelle dans ce cas une multicatégorie - pour sa définition originelle, voir [Lam 69]) est représentable ssi, pour tout n -uplet d'objets $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

il existe une flèche universelle $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \otimes \vec{x}$ dans le sens que la précomposition (c'est-à-dire la composition $S \circ S \xrightarrow{k} S$ de la multicatégorie) avec cette flèche induit la bijection naturelle en y :

$$\frac{(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow y}{(\otimes \vec{x}) \longrightarrow y}$$

\mathcal{S} satisfait donc exactement le premier axiome (sur les 2) de la définition des multicatégories représentables (voir [Her 00]).

2. CONSTRUCTION D'ALGÈBRES LAXES

• Avant d'arriver à l'équivalence annoncée dans l'introduction, arrêtons-nous un moment sur la configuration apparaissant dans la définition des \mathbf{T} -catégories représentables, c'est-à-dire d'une adjonction $(\alpha, \beta) : l \dashv u : C \rightleftarrows K$ dans $Cat(\mathbf{E})$, où K est sous-jacent à un objet de $Cat(\mathbf{E}^{\mathbf{T}})$. Nous allons voir qu'une telle configuration suffit à produire une algèbre laxe (pour la monade $\overline{\mathbf{T}}$, prolongement de \mathbf{T} à $Cat(\mathbf{E})$). Cette procédure peut même se faire, plus généralement, dans le cadre des 2-catégories comme nous allons le voir maintenant. Mais, tout d'abord, commençons par rappeler la définition des algèbres laxes.

• Soit \mathbf{C} une 2-catégorie et $\mathbf{M} = (M, \eta, \mu)$ une 2-monade sur \mathbf{C} (c'est-à-dire que M est un 2-endofoncteur de \mathbf{C} , η et μ des 2-transformations naturelles, et leur foncteur et transformation naturelle sous-jacents forment une monade sur la catégorie sous-jacente à \mathbf{C}) (bien sûr, toutes ces données sont strictes; elles pourraient bien entendu être présentées dans le cadre plus général, et surtout non strict, des bicatégories, comme l'a fait A.Burroni à l'origine - voir [Bur 71]). Une \mathbf{M} -algèbre laxe (voir [Bur 73], [Bur 75] où, dans ce dernier article, elles sont appelées \mathbf{M} -pseudo-algèbres à droite; voir aussi [Bun 74]) est la donnée :

- d'un objet C de \mathbf{C} ,
- d'une flèche notée $\otimes : MC \longrightarrow C$,
- de deux 2-cellules $i : \otimes \cdot \eta_C \longrightarrow Id_C$ et $a : \otimes \cdot \mu_C \longrightarrow \otimes \cdot M \otimes$ faisant commuter les diagrammes suivants dans $Hom(MC, C)$ et $Hom(M^3C, C)$:

$$\begin{array}{ccc} \otimes & \xrightarrow{a \cdot M \eta_C} & \otimes \cdot M \otimes \cdot M \eta_C \\ \downarrow a \cdot \eta_{MC} & \searrow Id & \downarrow \otimes \cdot M i \\ \otimes \cdot M \otimes \cdot \eta_{MC} & \xrightarrow{i \cdot \otimes} & \otimes \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \otimes \cdot \mu_C \cdot \mu_{MC} & \xleftarrow{Id} & \otimes \cdot \mu_C \cdot M \mu_C & \xrightarrow{a \cdot M \mu_C} & \otimes \cdot M \otimes \cdot M \mu_C \\ \downarrow a \cdot \mu_{MC} & & & & \downarrow \otimes \cdot M a \\ \otimes \cdot M \otimes \cdot \mu_{MC} & \xrightarrow{Id} & \otimes \cdot \mu_C \cdot M^2 \otimes & \xrightarrow{a \cdot M^2 \otimes} & \otimes \cdot M \otimes \cdot M^2 \otimes \end{array}$$

Un morphisme $(C, \otimes, i, a) \longrightarrow (C', \otimes', i', a')$ entre \mathbf{M} -algèbres laxes (appelé morphisme à gauche dans [Bur 75]) est la donnée

- d'une flèche $f : C \longrightarrow C'$,

- d'une 2-cellule $\varphi : \otimes' \cdot Mf \longrightarrow f \cdot \otimes$
faisant commuter les diagrammes suivants dans $Hom(C, C')$ et $Hom(M^2C, C')$:

$$\begin{array}{ccc} \otimes' \cdot Mf \cdot \eta_C & \xrightarrow{\varphi \cdot \eta_C} & f \cdot \otimes \cdot \eta_C \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow f \cdot i \\ \otimes' \cdot \eta_{C'} \cdot f & \xrightarrow{i' \cdot f} & f \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \otimes' \cdot \mu_{C'} \cdot M^2f & \xrightarrow{a' \cdot M^2f} & \otimes' \cdot M \otimes' \cdot M^2f \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow \otimes' \cdot M\varphi \\ \otimes' \cdot Mf \cdot \mu_C & & \otimes' \cdot Mf \cdot M\otimes \\ \varphi \cdot \mu_C \downarrow & & \downarrow \varphi \cdot M\otimes \\ f \cdot \otimes \cdot \mu_C & \xrightarrow{f \cdot a} & f \cdot \otimes \cdot M\otimes \end{array}$$

\mathbf{M} -algèbres laxes et morphismes entre \mathbf{M} -algèbres laxes forment une catégorie notée ici $Alx(\mathbf{M})$ (en fait, elle a une structure de 2-catégorie, voir toujours [Bur 75], mais les 2-cellules entre algèbres laxes ne seront pas abordées ici).

• Reprenons maintenant les considérations du début de ce paragraphe mais dans le cadre plus général donné ici des 2-catégories. Considérons la catégorie, notée $Adal(\mathbf{M})$, qui a :

- pour objets, les adjonctions $(\alpha, \beta) : l \dashv u : C \rightleftarrows K$ dans \mathbf{C} , où K est en plus muni d'un morphisme de structure $m : MK \longrightarrow K$ qui fait de (K, m) une \mathbf{M} -algèbre.
- pour flèches, $(C, K, m, u, l, \alpha, \beta) \longrightarrow (C', K', m', u', l', \alpha', \beta')$ les couples de flèches (f, F) où $f : C \longrightarrow C'$ est une flèche de \mathbf{C} et $F : (K, m) \longrightarrow (K', m')$ est une flèche de $\mathbf{C}^{\mathbf{M}}$, f et F étant liées par la commutation $F \cdot u = u' \cdot f$.

Nous allons construire un foncteur canonique $U : Adal(\mathbf{M}) \longrightarrow Alx(\mathbf{M})$. Donnons-nous tout d'abord un objet $\mathcal{A} = (C, K, m, u, l, \alpha, \beta)$ de $Adal(\mathbf{M})$. On lui fait correspondre une \mathbf{M} -algèbre laxe (C, \otimes, i, a) où C est inchangé et où $\otimes : MC \longrightarrow C$ est donné par le composé suivant :

$$MC \xrightarrow{Mu} MK \xrightarrow{m} K \xrightarrow{l} C$$

Les 2-cellules i et a sont données par $i = \beta$ (ce qui a un sens puisque $l \cdot u = \otimes \cdot \eta_C$) et a est la flèche dans $Hom(M^2C, C)$ suivante :

$$\otimes \cdot \mu_C \xrightarrow{\text{Id}} l \cdot m \cdot Mm \cdot M^2u \xrightarrow{l \cdot m \cdot M\alpha \cdot Mm \cdot M^2u} l \cdot m \cdot Mu \cdot Ml \cdot Mm \cdot M^2u \xrightarrow{\text{Id}} \otimes \cdot M\otimes$$

Notons $U(\mathcal{A})$ cette \mathbf{M} -algèbre laxe. Si, d'autre part, $(f, F) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est un morphisme de $Adal(\mathbf{M})$, on construit un morphisme $(f, \varphi) : U\mathcal{A} \longrightarrow U\mathcal{A}'$ où f reste inchangé et où φ est la 2-cellule :

$$\otimes' \cdot Mf \xrightarrow{\text{Id}} l' \cdot F \cdot m \cdot Mu \xrightarrow{\gamma \cdot m \cdot Mu} f \cdot l \cdot m \cdot Mu \xrightarrow{\text{Id}} f \cdot \otimes$$

où $\gamma : l' \cdot F \longrightarrow f \cdot l$ est le composé suivant dans $Hom(K, C')$:

$$l' \cdot F \xrightarrow{l' \cdot F \cdot \alpha} l' \cdot F \cdot u \cdot l \xrightarrow{\text{Id}} l' \cdot u' \cdot f \cdot l \xrightarrow{\beta' \cdot f \cdot l} f \cdot l$$

On construit ainsi un foncteur $U : Adal(\mathbf{M}) \longrightarrow Alx(\mathbf{M})$.

3. LA CONSTRUCTION ADJOINTE

• Revenons maintenant à la catégorie \mathbf{E} et à la monade \mathbf{T} du paragraphe 1. On voit facilement qu'on peut prolonger à $Cat(\mathbf{E})$ la monade \mathbf{T} et que cette nouvelle monade (qui est cartésienne) est en fait une 2-monade (cela provient de ce que les structures de catégorie, de foncteur et même de transformation naturelle s'expriment à l'aide de produits fibrés et donc commutent avec T). Notons la $\overline{\mathbf{T}}$. On peut donc appliquer la construction précédente où ici $\mathbf{C} = Cat(\mathbf{E})$ et $\mathbf{M} = \overline{\mathbf{T}}$.

Théorème 1 : *Le foncteur $U : Adal(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Alx(\overline{\mathbf{T}})$ admet ici un adjoint à gauche noté Kl , pour lequel la transformation naturelle unité $Id \longrightarrow U \cdot Kl$ est une identité (la notation Kl provient du fait que dans le cas où \mathbf{T} est la monade identité sur \mathbf{E} on retrouve, internement parlant, la catégorie de Kleisli - avec sa paire d'adjoints - d'une comonade quelconque).*

preuve : Avant de commencer, remarquons que la 2-catégorie $Cat(\mathbf{E})$ est représentable (voir [Gray 71]). On note $\delta : \partial_0 \longrightarrow \partial_1 : C^2 \longrightarrow C$ la 2-cellule universelle pour l'objet C et si $\theta : x \longrightarrow y : X \longrightarrow C$ est une autre 2-cellule, on désigne par $|\theta| : X \longrightarrow C^2$ l'unique flèche telle que :

$$(\partial_0 \cdot |\theta| \xrightarrow{\delta \cdot |\theta|} \partial_1 \cdot |\theta|) = (x \xrightarrow{\theta} y)$$

Remarquons aussi que $Cat(\mathbf{E})$ est à 2-produits fibrés et que l'endofoncteur $\overline{\mathbf{T}}$ commute avec eux ainsi qu'avec les 2-cellules universelles. En conséquence, $\overline{\mathbf{T}}$ commute aussi aux objets commas.

• Commençons par construire le foncteur Kl . Soit $\mathcal{C} = (C, \otimes, i, a)$ une $\overline{\mathbf{T}}$ -algèbre laxe de $Cat(\mathbf{E})$. On va tout d'abord construire une $\overline{\mathbf{T}}$ -catégorie dans $Cat(\mathbf{E})$, notée $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{C}) = (C, S, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$, où le span $\overline{\mathcal{T}}C \xleftarrow{\partial_0} S \xrightarrow{\partial_1} C$ est obtenu en considérant l'objet comma suivant dans la 2-catégorie $Cat(\mathbf{E})$.

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \partial_0 \swarrow & \Rightarrow & \searrow \partial_1 \\ \overline{\mathcal{T}}C & \xrightarrow[\otimes]{} & C \end{array}$$

$\iota : C \longrightarrow S$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\partial_0 \cdot \iota = \eta_C$ et, dans $Hom(C, C)$:

$$(\otimes \cdot \partial_0 \cdot \iota \xrightarrow{\sigma \cdot \iota} \partial_1 \cdot \iota) = (\otimes \cdot \eta_C \xrightarrow{i} Id_C)$$

et $\kappa : S \circ S \longrightarrow S$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\mu_C \cdot \overline{\mathbf{T}}\partial_0 \cdot \pi_0 = \partial_0 \cdot \kappa$ et, dans $Hom(S \circ S, C)$: $(\otimes \cdot \partial_0 \cdot \kappa \xrightarrow{\sigma \cdot \kappa} \partial_1 \cdot \kappa) = (\otimes \cdot \mu_C \cdot \overline{\mathbf{T}}\partial_0 \cdot \pi_0 \xrightarrow{a \cdot \overline{\mathbf{T}}\partial_0 \cdot \pi_0} \otimes \cdot \overline{\mathbf{T}} \otimes \cdot \overline{\mathbf{T}}\partial_0 \cdot \pi_0 \xrightarrow{\otimes \cdot \overline{\mathbf{T}}\sigma \cdot \pi_0} \otimes \cdot \overline{\mathbf{T}}\partial_1 \cdot \pi_0 \xrightarrow{Id} \otimes \cdot \partial_0 \cdot \pi_1 \xrightarrow{\sigma \cdot \pi_1} \partial_1 \cdot \pi_1)$, où $\pi_0 : S \circ S \longrightarrow \overline{\mathbf{T}}S$ et $\pi_1 : S \circ S \longrightarrow S$ sont les projections canoniques. A partir de cette $\overline{\mathbf{T}}$ -catégorie (dans $Cat(\mathbf{E})$) on peut considérer deux catégories internes dans $Cat(\mathbf{E})$ (ce sont donc des objets de $Cat(Cat(\mathbf{E})) = Cat^2(\mathbf{E})$, c'est-à-dire des catégories doubles internes à \mathbf{E}). La première est $k(\mathcal{C})$, où $(kC)_0 = C$, $(kC)_1 = C^2$

etc ... (existant dans toute 2-catégorie représentable), la seconde est $K\overline{S}(\mathcal{C})$, où $K(\mathcal{S})$ est construite au paragraphe 1, dans \mathbf{E} au lieu de $Cat(\mathbf{E})$, dans le cas d'une \mathbf{T} -catégorie quelconque \mathcal{S} . On construit ensuite un foncteur interne canonique $u : k(\mathcal{C}) \longrightarrow K\overline{S}\mathcal{C}$, en posant : $u_0 = (C \xrightarrow{\eta_C} \overline{TC})$ et $u_1 = (C^2 \xrightarrow{can} S \xrightarrow{\eta_S} \overline{TS})$, où $can : C^2 \longrightarrow S$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\partial_0 \cdot can = \eta_C \cdot \partial_0$ et, dans $Hom(C^2, C) : (\otimes \cdot \partial_0 \cdot can \xrightarrow{\sigma \cdot can} \partial_1 \cdot can) = (\otimes \cdot \eta_C \cdot \partial_0 \xrightarrow{i \cdot \partial_0} \partial_0 \xrightarrow{\delta} \partial_1)$

Lemme : Le foncteur interne $u : k(\mathcal{C}) \longrightarrow K\overline{S}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche noté l (dans $Cat^2\mathbf{E}$).

Preuve du lemme : On construit $l : K\overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow k(\mathcal{C})$ en posant $l_0 = \otimes : \overline{TC} \longrightarrow C$ et $l_1 = |\lambda| : \overline{TS} \longrightarrow C^2$, où λ est la 2-cellule composée suivante dans $Hom(\overline{TS}, C)$:

$$\otimes \cdot \mu_C \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{a \cdot \overline{T}\partial_0} \otimes \cdot \overline{T} \otimes \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{\otimes \cdot \overline{T}\sigma} \otimes \cdot \overline{T}\partial_1$$

. L'unité $\alpha : Id \longrightarrow u \cdot l$ et la co-unité $\beta : l \cdot u \longrightarrow Id$ de l'adjonction sont données par les flèches $\overline{TC} \longrightarrow \overline{TS}$ et $C \longrightarrow C^2$, toujours notées α et β , sont définies par :

- pour α , comme étant l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\overline{T}\partial_0 \cdot \alpha = \eta_{\overline{TC}}$ et, dans $Hom(\overline{TC}, \overline{TC}) : (\overline{T} \otimes \cdot \overline{T}\partial_0 \cdot \alpha \xrightarrow{\overline{T}\sigma \cdot \alpha} \overline{T}\partial_1 \cdot \alpha) = (\overline{T} \otimes \cdot \eta_{\overline{TC}} \xrightarrow{Id} \eta_C \cdot \otimes)$.
- pour β , par $\beta = |i|$. □

Fin de la preuve du théorème 1 :

• Ainsi, à tout objet \mathcal{C} de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$ on lui fait correspondre un objet de $Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$ que nous noterons $\overline{Kl}(\mathcal{C})$. On étend ensuite la définition de \overline{Kl} aux flèches de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$. En effet, si $(f, \varphi) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est une flèche de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$, on construit tout d'abord un morphisme de $\overline{\mathbf{T}}$ -catégorie $(f, s) : \overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow \overline{S}(\mathcal{C}')$, où f est inchangé et où $s : S \longrightarrow S'$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ pour laquelle $\partial'_0 \cdot s = \overline{T}f \cdot \partial_0$ et, dans $Hom(S, C')$:

$$(\otimes' \cdot \partial'_0 \cdot s \xrightarrow{\sigma' \cdot s} \partial'_1 \cdot s) = (\otimes' \cdot \overline{T}f \cdot \partial_0 \xrightarrow{\varphi \cdot \partial_0} f \cdot \otimes \cdot \partial_0 \xrightarrow{f \cdot \sigma} f \cdot \partial_1)$$

(au passage, on vient de construire un foncteur, noté \overline{S} , $Alx(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Cat(\overline{\mathbf{T}})$. Il sera repris au paragraphe suivant). Ce morphisme de $\overline{\mathbf{T}}$ -catégorie induit un foncteur interne $F = K\overline{S}(f, \varphi) : K\overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow K\overline{S}(\mathcal{C}')$, où $F_0 = \overline{T}f : \overline{TC} \longrightarrow \overline{TC}'$ et $F_1 = \overline{T}s : \overline{TS} \longrightarrow \overline{TS}'$. Ce foncteur est aussi un morphisme de $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ -algèbre (ou encore un foncteur interne dans $(Cat(\mathbf{E}))^{\overline{\mathbf{T}}}$). Parallèlement, on a aussi le foncteur interne $kf : k\mathcal{C} \longrightarrow k\mathcal{C}'$ où $(kf)_0 = f$ et $(kf)_1 = f^2$. Le couple (kf, F) est un morphisme $\overline{Kl}\mathcal{C} \longrightarrow \overline{Kl}\mathcal{C}'$ et \overline{Kl} ainsi construit est un foncteur $Alx(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$. Le foncteur Kl désiré est alors le composé suivant :

$$Alx(\overline{\mathbf{T}}) \xrightarrow{\overline{Kl}} Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}}) \xrightarrow{z} Adal(\overline{\mathbf{T}})$$

où z provient du 2-foncteur encore noté $z : Cat^2(\mathbf{E}) \longrightarrow Cat(\mathbf{E})$ qu'on définit par $z(C_0, C_1, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa) = (C_{00}, C_{10}, \partial_{00}, \partial_{10}, \iota_0, \kappa_0)$. Profitons-en pour signaler que le 2-foncteur $k : Cat(\mathbf{E}) \longrightarrow Cat^2(\mathbf{E})$ est une section de z (i.e. $z \cdot k = Id$). Le

foncteur k se prolonge aussi en des foncteurs $Alx(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Alx(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$ et $Adal(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$ tous deux notés encore k (car on a la commutation $k\overline{TC} \simeq \overline{\overline{TC}}k$). L'identité $z \cdot k = Id$ reste encore satisfaite.

Dans le même ordre d'idée, l'identité $U \cdot Kl = Id$ résulte de l'identité $U \cdot \overline{Kl} = k$ (où ici $U : Adal(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Alx(\overline{\mathbf{T}})$).

• Il nous faut maintenant construire la co-unité $\varepsilon : Kl \cdot U \longrightarrow Id$ et, pour ce faire, puisque nous utilisons \overline{Kl} , on construit une transformation naturelle $\overline{\varepsilon} : \overline{Kl} \cdot U \longrightarrow k$. Définissons-la sur un objet $\mathcal{A} = (C, K, m, u, l, \alpha, \beta)$ de $Adal(\overline{\mathbf{T}})$. Notons $\mathcal{C} = U\mathcal{A}$, $\mathcal{C} = (C, \otimes, i, a)$. On construit pour cela un foncteur interne (dans $Cat(\mathbf{E})$), $c : K\overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow k(K)$ en posant : $c_0 = (\overline{TC} \xrightarrow{\overline{T}u} \overline{TK} \xrightarrow{m} K)$ et $c_1 = |\theta| : \overline{TS} \longrightarrow K^2$, où θ est la flèche composée suivante dans $Hom(\overline{TS}, K)$:

$$m \cdot \overline{T}m \cdot \overline{T}^2 u \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{m \cdot \overline{T}\alpha \cdot \overline{T}m \cdot \overline{T}^2 u \cdot \overline{T}\partial_0} m \cdot \overline{T}u \cdot \overline{T} \otimes \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{m \cdot \overline{T}u \cdot \overline{T}\sigma} m \cdot \overline{T}u \cdot \overline{T}\partial_1$$

Le couple $(Id, c) : \overline{Kl} \cdot U(\mathcal{A}) \longrightarrow k(\mathcal{A})$ est un morphisme de $Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$. Il ne reste plus qu'à poser $\overline{\varepsilon}_{\mathcal{A}} = (Id, c)$ et $\varepsilon_{\mathcal{A}} = z(\overline{\varepsilon}_{\mathcal{A}})$ pour obtenir les transformations naturelles désirées. \square

4. L'ÉQUIVALENCE ENTRE $Catr(\mathbf{T})$ ET $Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$

• Il est temps de résoudre le problème annoncé dans l'introduction, c'est-à-dire, l'équivalence (à un détail près !) entre les \mathbf{T} -catégories représentables et les $\overline{\mathbf{T}}$ -algèbres laxes. Précisons pour commencer de quel détail il s'agit. Toujours dans le même contexte des § 1 et § 3, considérons la sous-catégorie pleine, notée $Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$ de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$ ayant pour objets les $\overline{\mathbf{T}}$ -algèbres laxes (C, \otimes, i, a) , où i est un isomorphisme ; on note j l'inclusion de $Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$ dans $Alx\mathbf{T}$. Considérons aussi la catégorie $Catr(\mathbf{T})$ ayant :

- pour objets, les \mathbf{T} -catégories représentables munies de leurs «représentations» (c.a.d. du choix de l'adjoint à gauche de $u : C(\mathcal{S}) \longrightarrow K(\mathcal{S})$ ainsi que du choix de l'unité et de la co-unité de cette adjonction).
- pour flèches, les morphismes entre leurs \mathbf{T} -catégories sous-jacentes.

On note $j : Catr(\mathbf{T}) \longrightarrow Cat(\mathbf{T})$ le foncteur d'oubli pleinement fidèle qui en découle. D'un autre côté, il y a aussi un foncteur canonique $V : Catr(\mathbf{T}) \longrightarrow Adal(\overline{\mathbf{T}})$ (celui-ci étant clair sur les objets, construisons-le sur les flèches. Pour cela, il nous suffit, plus généralement, d'associer à tout morphisme de \mathbf{T} -catégorie (représentable ou non) $(f, s) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ un couple de foncteurs internes (g, h) , où $g : C\mathcal{S} \longrightarrow C\mathcal{S}'$ et $h : K\mathcal{S} \longrightarrow K\mathcal{S}'$, h étant un morphisme de $\overline{\mathbf{T}}$ -algèbre, et tel que l'on ait la commutation $h \cdot u = u' \cdot g$. En fait, $g_0 = f$ et $g_1 : C\mathcal{S}_1 \longrightarrow C\mathcal{S}'_1$ se déduit de s par factorisation. De plus, h est donné par $h_0 = Tf$ et $h_1 = Ts$. On remarque ensuite qu'on a la factorisation suivante :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} Catr(\mathbf{T}) & \xrightarrow{U'} & Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) \\ \downarrow V & & \downarrow j \\ Adal(\overline{\mathbf{T}}) & \xrightarrow{U} & Alx(\overline{\mathbf{T}}) \end{array}$$

(cela provient du fait que, pour tout objet \mathcal{S} de $Catr(\mathbf{T})$ - qui est noté de la même façon que son image par V - le foncteur canonique $u : C\mathcal{S} \rightarrow K\mathcal{S}$ étant pleinement fidèle (voir le paragraphe 1), la co-unité $\beta : l \cdot u \rightarrow Id$ est un isomorphisme).

Théorème 2 : *Le foncteur $U' : Catr(\mathbf{T}) \rightarrow Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$ est une équivalence.*

preuve : Le pseudo-inverse, noté S' , de U' est donné par la factorisation suivante :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) & \overset{S'}{\dashrightarrow} & Catr(\mathbf{T}) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ Alx(\overline{\mathbf{T}}) & \xrightarrow{S} & Cat(\mathbf{T}) \end{array}$$

où S est le composé $(Alx(\overline{\mathbf{T}}) \xrightarrow{\overline{S}} Cat(\overline{\mathbf{T}}) \xrightarrow{z} Cat(\mathbf{T}))$ (la construction de \overline{S} est donnée dans la preuve du théorème 1). Pour la construire, il nous suffit de factoriser \overline{S} par $Catr(\overline{\mathbf{T}})$ et donc de montrer que, pour tout objet \mathcal{A} de $Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$, la $\overline{\mathbf{T}}$ -catégorie $\overline{S}\mathcal{A}$ est représentable, ce qui revient à montrer que le foncteur interne $u : C\overline{S}\mathcal{A} \rightarrow K\overline{S}\mathcal{A}$ admet un adjoint à gauche ; mais cela résulte immédiatement des constructions du Théorème 1, en remarquant que, quand $i : \otimes \cdot \eta_C \rightarrow Id$ est un isomorphisme dans \mathcal{A} , le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} C^2 & \xrightarrow{can} & S \\ \partial_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \partial_0 \\ C & \xrightarrow{\eta_C} & \overline{\mathbf{T}}C \end{array}$$

et, en conséquence, il existe un isomorphisme canonique $C\overline{S}\mathcal{A} \simeq kC$ au-dessus de $K\overline{S}\mathcal{A}$. Cet isomorphisme est naturel en \mathcal{A} et il produit, à son tour, un isomorphisme comme ci-dessous :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) & \overset{S'}{\dashrightarrow} & Catr(\mathbf{T}) \\ j \downarrow & \simeq & \downarrow V \\ Alx(\overline{\mathbf{T}}) & \xrightarrow{Kl} & Adal(\overline{\mathbf{T}}) \end{array}$$

L'équivalence cherchée va alors résulter du lemme suivant :

Lemme : *Il existe un isomorphisme naturel comme ci-dessous :*

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} Catr(\mathbf{T}) & \xrightarrow{V} & Adal(\overline{\mathbf{T}}) & \xrightarrow{U} & Alx(\overline{\mathbf{T}}) \\ & \searrow j & & \swarrow S & \\ & & Cat(\mathbf{T}) & & \end{array}$$

preuve du lemme : Soit \mathcal{S} un objet de $Catr(\mathbf{T})$. On note $j\mathcal{S} = (O, S, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$, $V\mathcal{S} = (C, K, u, l, \alpha, \beta)$ et $\tilde{\mathcal{S}} = \overline{SUV}\mathcal{S} = (C, \tilde{S}, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$. Il nous faut montrer que $\mathcal{S} \simeq z(\tilde{\mathcal{S}})$, et ceci, naturellement en \mathcal{S} . Pour cela, on considère les deux objets commas suivants dans $Cat(\mathbf{E})$:

$$\begin{array}{ccc} & P^0 & \\ \partial_0 \swarrow & \Rightarrow & \searrow \partial_1 \\ K & \xrightarrow{h} & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & P^1 & \\ \partial_0 \swarrow & \Rightarrow & \searrow \partial_1 \\ K & \xrightarrow{u} & C \end{array}$$

En fait, il existe une unique flèche $\gamma : P^1 \longrightarrow P^0$ (qui est un isomorphisme) telle que $\partial_0 \cdot \gamma = \partial_0$ et, dans $Hom(P^1, K)$:

$$(l \cdot \partial_0 \cdot \gamma \xrightarrow{h \cdot \gamma} \partial_1 \cdot \gamma) = (l \cdot \partial_0 \xrightarrow{l \cdot b} l \cdot u \cdot \partial_1 \xrightarrow{\beta \cdot \partial_1} \partial_1)$$

A partir de là, on vérifie qu'on a les isomorphismes :

$$S \simeq P_0^1 \xrightarrow{\gamma_0} P_0^0 \simeq \tilde{S}_0$$

L'isomorphisme composé est un isomorphisme dans $Gr_O(\mathbf{T})$, c'est même un isomorphisme entre \mathbf{T} -catégories.

fin de la preuve du théorème 2 : Aux quatre 2-diagrammes (1), (2), (3), (4) signalés au cours de cette preuve, ajoutons la commutation du triangle suivant, montré au théorème 1 :

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} & Adal(\overline{\mathbf{T}}) & \\ Kl \nearrow & & \searrow U \\ Alx(\overline{\mathbf{T}}) & \xrightarrow{Id} & Alx(\overline{\mathbf{T}}) \end{array}$$

Ils nous permettent d'écrire les isomorphismes suivants : $j \cdot S' \cdot U' \stackrel{(2)}{\simeq} S \cdot j \cdot U' \stackrel{(1)}{\simeq} S \cdot U \cdot V \stackrel{(4)}{\simeq} j$ et donc $S' \cdot U' \simeq Id$ (car $j : Catr(\mathbf{T}) \longrightarrow Cat(\mathbf{T})$ est pleinement fidèle). De même : $j \cdot U' \cdot S' \stackrel{(1)}{\simeq} U \cdot V \cdot S' \stackrel{(3)}{\simeq} U \cdot Kl \cdot j \stackrel{(5)}{\simeq} j$ et donc $U' \cdot S' \simeq Id$ (car $j : Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Alx(\overline{\mathbf{T}})$ est pleinement fidèle). D'où l'équivalence cherchée.

Remarques et commentaires

1) T.Leinster a, lui aussi, une définition de \mathbf{T} -catégorie représentable (ou plutôt, en suivant sa terminologie, de \mathbf{T} -multicatégorie représentable) dans ce même cadre général. Mais son concept est plus fort que celui présenté ici puisqu'il coïncide avec les multicatégories représentables de C.Hermida, dans le cas (ensembliste) où \mathbf{T} est la monade "monoïdes libres". Sans doute correspond-il aux \mathbf{T} -catégories représentables (en notre sens) pour lesquelles le morphisme a de l'algèbre lax correspondante est un isomorphisme (comme le suggère T.Leinster [Lei 02]).

2) Pour définir les \mathbf{T} -catégories représentables, on a eu recours à une adjonction dans la 2-catégorie $Cat(\mathbf{E})$. Pourtant, cette condition est probablement trop forte pour bien des catégories \mathbf{E} (nous pensons au cas où \mathbf{E} est un topos de faisceaux et

aux commutations strictes qu'elle va nécessairement produire termes à termes). En un sens, elle paraît être en contradiction avec la volonté d'affaiblissement (ou plutôt ici de laxification) des structures, qui sous-tend cet article. Peut-être faudrait-il lui préférer une adjonction "implicite" (ou "locale") qui a tout-à-fait son sens dans le cadre des topos (et qui, on le sait, est lié à la théorie des champs). Il est probable qu'à l'époque, A.Joyal m'avait déjà fait part de telles réflexions, même s'il ne m'avait pas donné explicitement la définition de **T**-catégorie représentable formulée ici.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bou] D. Bourn. Communication personnelle à l'auteur.
- [Bun 74] M. Bunge. Coherent extensions and relational algebras. Transactions of the AMS. 197 (1974) 355-390.
- [Bur 71] A. Burroni. **T** – *categories*. Cahiers de top. et géom. diff. XII,3 (1971) 215-321.
- [Bur 73] A. Burroni. Structures 2-algébriques. Cahier de top. et géom. diff. XIV,2 (1973) 165-166.
- [Bur 75] A. Burroni. Pseudo-algèbres. Cahiers de top. et géom. diff. XVI,4 (1975) 343-393.
- [Gray 71] J. Gray. The Meeting of the Midwest Category Seminar in Zurich. August 24-30, 1970. Report of the Midwest Category Seminar V. LNM (Springer-Verlag) (1971) 248-255 (vol 195?).
- [Her 00] C. Hermida. Representable Multicategories. Advances in mathematics. vol 151, number 2, may 10, 2000.
- [Lam 69] J. Lambek. Deductive Systems and Categories (II). LNM (Springer-Verlag) 86 (1969) 76-122.
- [Lei 88] T. Leinster. General operads and Multicategories. math. CT/9810053 (8 oct 1998).
- [Lei 02] T. Leinster. Communication personnelle à l'auteur (lors du colloque en l'honneur d'A.Burroni en sept. 2002).

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UNIVERSITÉ PARIS 7, CASE 7012, 2, PLACE JUSSIEU, 75251 PARIS CEDEX 05 FRANCE.

E-mail address: penon@math.jussieu.fr

LOIS DISTRIBUTIVES. APPLICATIONS AUX AUTOMATES STOCHASTIQUES

ELISABETH BURRONI

RÉSUMÉ. Les automates déterministes sont les algèbres d'une monade associée à un monoïde libre. Pour prolonger aux automates non déterministes et stochastiques un tel formalisme monadique, il est commode d'avoir recours à une notion plus riche que celle de monade, mais tout aussi basique : celle de loi distributive entre deux monades. La notion d'algèbre sur une monade se généralise alors par celle d'algèbre sur une loi distributive (voir [Bu' 74]). Les automates non déterministes et les automates stochastiques sont des algèbres sur des lois distributives dont la première monade est, comme dans le cas déterministe, la monade associée à un monoïde. Nous avons introduit le cas non déterministe à l'aide de la monade des parties dans [Bu' 74]. La monade des probabilités (voir [Tull 71] et [Giry 81]) nous permet alors de définir de manière analogue une nouvelle loi distributive et de présenter les automates stochastiques comme les algèbres sur cette loi distributive.

Cet article se situant au confluent des catégories, des automates et des probabilités, nous avons, pour la commodité du lecteur, fait les rappels utiles relatifs à chacune de ces disciplines (App.I, App.II et App.III). On trouvera également en appendice (App.IV et App.V) une construction détaillée de la monade des probabilités, et de la loi distributive qui la relie à la monade associée à un monoïde.

1. Automates déterministes

Soit $M = (M, e, m)$ un monoïde (e est l'unité de M et m , sa loi, sera notée multiplicativement : $(a, b) \mapsto ab$, pour tout $(a, b) \in M \times M$). On lui associe une monade $T_M = (T_M, \eta, \mu)$ sur la catégorie **Ens** des ensembles, définie de la manière suivante : l'endofoncteur $T_M : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens}$ associe, à tout ensemble X , l'ensemble $M \times X$ et, à toute application $f : X \rightarrow Y$, l'application $M \times f : M \times X \rightarrow M \times Y : (a, x) \mapsto (a, f(x))$; de plus, pour tout ensemble X , $\eta X : X \rightarrow M \times X$ et $\mu X : M \times M \times X \rightarrow M \times X$ sont les applications respectivement définies par $\eta X(x) = (e, x)$ et $\mu X(a, b, x) = (ab, x)$ (voir App.I.4, où, plus généralement, on associe une monade à tout monoïde d'une catégorie monoïdale).

Une T_M -algèbre est un couple (X, θ) , où X est un ensemble et $\theta : M \times X \rightarrow X$ une application vérifiant les axiomes (A_1) et (A_2) des algèbres (voir App.I.3), i.e

vérifiant, pour tout $a, b \in M$ et tout $x \in X$,

$$\theta(e, x) = x \quad \text{et} \quad \theta(ab, x) = \theta(a, \theta(b, x))$$

Une T_M -algèbre s'appelle plus couramment un M -ensemble, mais, pour des raisons d'homogénéité de terminologie avec la suite, nous lui donnerons également le nom de M -automate déterministe (de loi de transition θ). En se reportant à App.11.1, on constate trivialement le fait suivant :

Proposition 1 : *Dans le cas où $M = \Sigma^*$ (c'est-à-dire, le cas où M est le monoïde libre engendré par un ensemble fini Σ), une T_M -algèbre est la donnée d'un automate déterministe sur l'alphabet Σ .*

Pour décrire, en restant dans un cadre «monadique», les automates non déterministes et stochastiques, on a besoin d'une notion plus riche que celle de monade, celle de «loi distributive» entre deux monades (voir App.1.5).

2. Algèbres sur une loi distributive

Les automates non déterministes et stochastiques seront présentés plus loin comme deux cas particuliers d'une notion d'algèbre sur une loi distributive. Pour une introduction aux lois distributives, voir App.1.5 ; dans cette section nous introduisons ce nouveau type d'algèbre. Les données dans cette section sont les suivantes : $T = (T, \eta, \mu)$ et $T' = (T', \eta', \mu')$ sont deux monades sur une même catégorie \mathbf{C} , et $\tau : T/T'$ une loi distributive de T sur T' , i.e c'est la donnée d'un triplet $\tau = (\tau, T, T')$, où $\tau : TT' \rightarrow T'T$ est une transformation naturelle rendant commutatifs les diagrammes (B_i) rappelés dans App.1.5. Tous les résultats donnés ci-dessous ont été démontrés dans [Bu' 74].

2.1. On appelle τ -algèbre (appelée D -algèbre dans [Bu' 74]), la donnée d'un couple (X, θ) , où X est un objet de \mathbf{C} et $\theta : TX \rightarrow T'X$ un morphisme de \mathbf{C} rendant commutatifs les diagrammes suivants dans \mathbf{C} :

$$(A'_1) \quad \begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{\theta} & T'X \\ & \eta^X \swarrow & \nearrow \eta'^X \\ & X & \end{array}$$

$$(A'_2) \quad \begin{array}{ccccccc} TT'X & \xrightarrow{T\theta} & TT'X & \xrightarrow{\tau X} & T'TX & \xrightarrow{T'\theta} & T'T'X \\ & \searrow \mu^X & & & & & \swarrow \mu'^X \\ & & TX & \xrightarrow{\theta} & T'X & & \end{array}$$

On retrouve les T -algèbres, comme cas particulier des τ -algèbres, en prenant $T' = id_{\mathbf{C}}$, $\eta' = \mu' = id_{T'}$ et $\tau = id_T$.

2.2. La donnée d'une τ -algèbre sur X est équivalente à la donnée d'une T -algèbre sur $T'X$ qui est τ -compatible avec la T' -algèbre libre $\mu'X$ (voir App.l.6). Plus précisément, si (X, θ) est une τ -algèbre, $(T'X, \mu'X \circ T'\theta \circ \tau X)$ est une T -algèbre qui est τ -compatible avec $(T'X, \mu'X)$; et inversement, si $(T'X, \theta)$ est une T -algèbre τ -compatible avec $(T'X, \mu'X)$, alors $(X, \theta \circ T\eta'X)$ est une τ -algèbre.

2.3. La donnée de la loi distributive $\tau : T/T'$ équivaut à la donnée d'un prolongement de la monade T sur \mathbf{C} en une monade $\tilde{T} = (\tilde{T}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu})$ sur la catégorie de Kleisli $Kl(T')$ (voir App.l.7), ce qui signifie que les diagrammes suivants commutent si, pour le second, on remplace le couple (\Downarrow, \Uparrow) par chacun des couples $(\eta, \tilde{\eta})$ et $(\mu, \tilde{\mu})$ (où $F_{T'}$ est défini dans App.l.7) :

$$\begin{array}{ccc} Kl(T') & \xrightarrow{\tilde{T}} & Kl(T') \\ F_{T'} \uparrow & & \uparrow F_{T'} \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{T} & \mathbf{C} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Kl(T') & \xrightarrow{\Uparrow} & Kl(T') \\ F_{T'} \uparrow & & \uparrow F_{T'} \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\Downarrow} & \mathbf{C} \end{array}$$

Pour dire cela brièvement, ces diagrammes signifient que, moyennant l'identification de la catégorie \mathbf{C} à son image $F_{T'}(\mathbf{C})$ dans $Kl(T')$ (voir App.l.7), la restriction de la monade \tilde{T} à \mathbf{C} est la monade T . De plus, pour tout morphisme de Kleisli $u : X \dashrightarrow Y$ (se reporter à App.l.7 pour cette notation), $\tilde{T}u$ est le morphisme composé $\tau Y \circ Tu : TX \dashrightarrow TY$.

$$\begin{array}{ccc} & T'Y & \\ & \nearrow u & \\ X & \xrightarrow[u]{} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & TT'Y & \xrightarrow{\tau Y} & T'TY \\ & \nearrow Tu & \nearrow \tilde{T}u & \\ TX & \xrightarrow[\tilde{T}u]{} & TY \end{array}$$

2.4. Si $\theta : TX \longrightarrow T'X$ est un morphisme de \mathbf{C} , alors (X, θ) est une τ -algèbre dans \mathbf{C} ssi c'est une \tilde{T} -algèbre dans $Kl(T')$; en effet, remarquant que θ est en fait un morphisme de Kleisli $TX \dashrightarrow X$, ça n'est qu'une question de traduction dans $Kl(T')$ des axiomes (A'_i) de τ -algèbres donnés dans 2.1 : $\theta \circ \eta X \equiv \eta'X$ et $\theta \circ \mu X = \mu'X \circ T'\theta \circ \tau X \circ T\theta$ s'écrivent (voir App.l.7) $\theta \circ \eta X = \overline{id}_X$ et $\theta \circ \mu X = \mu'X \circ T'\theta \circ \tilde{T}\theta = \theta \circ \tilde{T}\theta$, ou encore, moyennant le fait que la monade T est la restriction de la monade \tilde{T} à \mathbf{C} , elle-même considérée comme une sous-catégorie de $Kl(T')$, $\theta \circ \tilde{\eta}X = \overline{id}_X$ et $\theta \circ \tilde{\mu}X = \theta \circ \tilde{T}\theta$, qui ne sont autres que les axiomes (A_i) de \tilde{T} -algèbres rappelés dans App.l.3.

2.5. Ceci nous conduit à définir la catégorie $Alg(\tau)$ des τ -algèbres comme étant égale à la catégorie $Alg(\tilde{T})$ des \tilde{T} -algèbres; ses objets sont donc les τ -algèbres et ses morphismes les $u : (X, \theta) \dashrightarrow (X', \theta')$, i.e les $u : X \dashrightarrow X'$ vérifiant $u \circ \theta = \theta' \circ \tilde{T}u$ (ce qui s'écrit $T'f \circ \theta = \theta' \circ Tf$ dans le cas particulier où $f : X \longrightarrow X'$ est un morphisme de \mathbf{C}).

On a un foncteur $F : Alg(T) \longrightarrow Alg(\tau)$, défini par $F(X, \theta) = (X, \eta'X \circ \theta)$ et $F(f) = \eta'X' \circ f$ (où $f : (X, \theta) \longrightarrow (X', \theta')$) qui permet d'identifier $Alg(T)$ à une

sous-catégorie de $Alg(\tau)$; il admet un adjoint à droite $U : Alg(\tau) \longrightarrow Alg(T)$, défini par $U(X, \theta) = (T'X, \mu'X \circ T'\theta \circ \tau X)$ (voir 2.2) et $U(u) = \mu'X' \circ T'u$ (où $u : (X, \theta) \dashrightarrow (X', \theta')$). Ce couple d'adjoints (F, U) (c'est en fait un relèvement du couple d'adjoints $(F_{T'}, U_{T'})$ qui induit la monade T' sur \mathbf{C} (voir App.l.7)) induit lui-même la monade \widetilde{T}' sur $Alg(T)$, de sorte que l'on a un *foncteur de comparaison* plein et fidèle $Alg(\tau) \xrightarrow{\phi_\tau} Alg(\widetilde{T}')$, défini par $\phi_\tau(X, \theta) = ((T'X, \mu'X \circ T'\theta \circ \tau X), \mu'X)$ (voir 2.2 et App.l.6) et $\phi_\tau(u) = \mu'X' \circ T'u$ (où u est comme ci-dessus), qui vérifie les relations $\phi_\tau \circ F = F^{\widetilde{T}'}$ et $U^{\widetilde{T}'} \circ \phi_\tau = U$; ainsi la catégorie $Alg(\tau)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine $\phi_\tau(Alg(\tau))$ de $Alg(\widetilde{T}') \simeq Alg(\widehat{T})$ dont les objets sont les $((T'X, \theta), \mu'X)$ (voir 2.2 et App.l.6). Ce foncteur est un relèvement du foncteur de comparaison $Kl(T') \xrightarrow{\phi} Alg(T')$ rappelé dans App.l.7.

3. Automates non déterministes

3.1. Introduction : Les automates non déterministes constituent une première variante du cas déterministe. Soit Σ un ensemble fini; dans un *automate non déterministe* sur l'alphabet Σ , l'action d'un mot sur un état a pour résultat, non pas un nouvel état (comme dans le cas déterministe), mais un ensemble d'états "possibles" (voir App.ll.2); la *loi de transition* de cet automate est donc une application de la forme $\Sigma^* \times X \longrightarrow \mathcal{P}X$, où $\mathcal{P}X$ est l'ensemble des parties de X . Précisément, on peut redéfinir les automates non déterministes sur un alphabet Σ comme les algèbres d'une loi distributive entre la monade associée au monoïde Σ^* et la "monade des parties". Nous généralisons en prenant un monoïde M quelconque au lieu de Σ^* (voir [Bu' 74]), et nous appellerons *M-automate non déterministe*, une τ -algèbre, où $\tau : T_M/T_{\mathcal{P}}$ est la loi distributive que nous allons maintenant définir.

3.2. Précisément, considérons, comme dans le paragraphe 1, la monade T_M sur \mathbf{Ens} associée à un monoïde $M = (M, e, m)$ donné; considérons aussi la monade des parties $T_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \eta', \mu')$ sur \mathbf{Ens} , où l'endofoncteur $\mathcal{P} : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ associe à tout ensemble X l'ensemble $\mathcal{P}X$ de ses parties, et à toute application $f : X \longrightarrow Y$ l'application $\mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}Y$ qui, à toute partie A de X , associe son image $f(A)$ dans Y ; de plus, $\eta'X : X \longrightarrow \mathcal{P}X$ et $\mu'X : \mathcal{P}\mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ sont respectivement les applications singleton et réunion. On montre facilement que l'application $\tau X : M \times \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}(M \times X)$, définie, pour tout $(a, A) \in M \times \mathcal{P}X$, par $\tau X(a, A) = \{a\} \times A$, est la transformation naturelle d'une loi distributive $\tau : T_M/T_{\mathcal{P}}$. Une τ -algèbre est donc ici la donnée d'un ensemble X muni d'une application $\theta : M \times X \longrightarrow \mathcal{P}X$ vérifiant les axiomes (A'_i) ci-dessus, i.e tels que, pour tout $a, b \in M$ et tout $x \in X$, on ait :

$$\theta(e, x) = \{x\} \quad \text{et} \quad \theta(ab, x) = \cup_{y \in \theta(b, x)} \theta(a, y)$$

Se reportant à App.ll.2, on obtient la proposition suivante :

Proposition 2 : Dans le cas où $M = \Sigma^*$ (et où Σ est un ensemble fini), une τ -algèbre est la donnée d'un automate non déterministe sur l'alphabet Σ .

3.3. La donnée d'une τ -algèbre $M \times X \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}X$ est équivalente (voir 2.2 ci-dessus) à la donnée d'une T_M -algèbre $M \times \mathcal{P}X \xrightarrow{\tilde{\theta}} \mathcal{P}X$ qui est τ -compatible avec la multiplication $\mu'X$, i.e telle que, pour tout $a \in M$, l'opérateur $\tilde{\theta}(a, -) : \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}X$ vérifie, pour tout $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}\mathcal{P}X$, $\tilde{\theta}(a, \cup_{A \in \mathfrak{A}} A) = \cup_{A \in \mathfrak{A}} \tilde{\theta}(a, A)$. Plus précisément, la T_M -algèbre $\tilde{\theta}$ associée à la τ -algèbre θ est définie par $\tilde{\theta}(a, A) = \bigcup_{x \in A} \theta(a, x)$ (ainsi l'automate non déterministe sur les états se transforme en un automate déterministe sur les parties d'états, avec une condition de commutation aux réunions).

3.4. La catégorie de Kleisli de la monade $T_{\mathcal{P}}$ des parties est (plus précisément : est équivalente à) la catégorie **Rel** des relations entre ensembles; en effet, un morphisme $u : X \dashrightarrow Y$ dans cette catégorie de Kleisli (voir la convention sur la notation des morphismes de Kleisli et leur composition dans App.1.7), i.e une application $u : X \rightarrow \mathcal{P}Y$ dans **Ens** équivaut à la donnée de la relation $R_u \subset X \times Y$ définie par $(x, y) \in R_u$ ssi $y \in u(x)$; on dira donc que $u : X \dashrightarrow Y$ est une relation. Si maintenant $v : Y \dashrightarrow Z$ est une autre relation, alors, d'après App.1.7, $(v \circ u)(x) = (\mu'Z \circ \mathcal{P}v \circ u)(x) = \bigcup_{y \in u(x)} v(y)$; par suite $(x, z) \in R_{v \circ u}$ ssi il existe $y \in Y$ vérifiant $(x, y) \in R_u$ et $(y, z) \in R_v$; on obtient donc la proposition suivante :

Proposition 3 : la composition \circ dans la catégorie de Kleisli **Rel** est la composition habituelle des relations.

D'après 2.3, on a un prolongement $\widetilde{T}_M : \mathbf{Rel} \rightarrow \mathbf{Rel}$ qui, à toute relation $u : X \dashrightarrow Y$, associe la relation $\widetilde{T}_M u = \tau Y \circ (M \times u) : M \times X \dashrightarrow M \times Y$: $(a, x) \mapsto \{a\} \times u(x)$. En particulier, pour $\theta : M \times X \dashrightarrow X$, la relation $\widetilde{T}_M \theta = \tau X \circ (M \times \theta) : M \times M \times X \dashrightarrow M \times X$ est définie par $(\widetilde{T}_M \theta)(a, b, x) = \{a\} \times \theta(b, x)$.

De plus, se référant à 2.4, une τ -algèbre $\theta : M \times X \rightarrow \mathcal{P}X$ dans **Ens** est aussi une \widetilde{T}_M -algèbre $\theta : M \times X \dashrightarrow X$ dans **Rel**.

4. Automates stochastiques

4.1. Introduction : Soit Σ un ensemble fini; un *automate stochastique* sur l'alphabet Σ , lorsqu'il lit un mot, donne une probabilité sur les états (voir App.111.5); sa loi de transition (appelée *probabilité de transition*) est donc une application de la forme $\Sigma^* \times X \rightarrow \mathbb{P}X$, où $\mathbb{P}X$ est l'ensemble des probabilités sur X (on doit donc supposer que X est un espace mesurable). On obtient alors les automates stochastiques sur un alphabet Σ comme les algèbres d'une loi distributive entre la monade associée au monoïde Σ^* et la "monade des probabilités", ces monades

étant définies, non pas sur **Ens**, mais sur la catégorie des espaces mesurables. Nous généralisons en prenant un monoïde M quelconque au lieu de Σ^* .

4.2. Considérons la catégorie **Mes** des applications mesurables entre espaces mesurables. C'est une catégorie monoïdale (voir App.I.1) d'unité 1 et de loi monoïdale le produit d'espaces mesurables. Dans cette catégorie monoïdale, fixons un monoïde $M = (M, e, m)$ (M est un espace mesurable, son unité et sa multiplication sont des applications mesurables ; voir App.I.2) et considérons la monade $T_M = (T_M, \eta, \mu)$ qui lui est associée sur **Mes** (voir App.I.4 ; cette monade est similaire à celle que nous avons définie sur **Ens** dans le paragraphe 1, sauf qu'ici, les applications ηX et μX sont mesurables pour tout espace mesurable X).

4.3. Décrivons la monade des probabilités $T_{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \eta'', \mu'')$ sur **Mes** (voir [Tull 71], [Giry 81], et App.IV où nous donnons une preuve détaillée du fait que c'est une monade).

Son endofoncteur $\mathbb{P} : \mathbf{Mes} \rightarrow \mathbf{Mes}$ associe à tout espace mesurable X l'ensemble $\mathbb{P}X$ des probabilités sur X , que l'on munit de la plus petite tribu rendant mesurables les évaluations $e_A : \mathbb{P}X \rightarrow [0, 1] : p \mapsto p(A)$, lorsque A parcourt la tribu donnée sur X ($[0, 1]$ étant muni de sa tribu borélienne). De plus, si $f : X \rightarrow Y$ est une application mesurable, $\mathbb{P}f : \mathbb{P}X \rightarrow \mathbb{P}Y$ est l'application définie, pour tout $p \in \mathbb{P}X$, par $\mathbb{P}f(p) = f_*(p)$, la p -loi de f sur Y (voir App.III.2).

L'unité et la multiplication de cette monade sont définies comme suit :

- $\eta'' X : X \rightarrow \mathbb{P}X$ est l'application qui associe la probabilité de Dirac δ_x à l'élément $x \in X$;

- $\mu'' X : \mathbb{P}\mathbb{P}X \rightarrow \mathbb{P}X$ est l'application qui, à toute probabilité \hat{p} sur $\mathbb{P}X$, associe la probabilité $\mu'' X(\hat{p})$ sur X ainsi définie : pour toute partie mesurable A de X , $(\mu'' X(\hat{p}))(A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d\hat{p} = \int_{\mathbb{P}X} e_A(p) \hat{p}(dp) = \int_{\mathbb{P}X} p(A) \hat{p}(dp)$ (c'est donc la \hat{p} -moyenne des $p(A)$ lorsque p parcourt $\mathbb{P}X$; voir App.III.2 pour la notation des intégrales).

Bien entendu, les applications $\mathbb{P}f = f_*$, $\eta'' X$ et $\mu'' X$ sont mesurables (car leurs composés avec chaque évaluation e_A sont mesurables ... voir App.III.1 et App.IV).

4.4. On définit une loi distributive $\tau : T_M/T_{\mathbb{P}}$ de la manière suivante : pour tout espace mesurable X , l'application $\tau X : M \times \mathbb{P}X \rightarrow \mathbb{P}(M \times X)$ est définie, pour tout $(a, p) \in M \times \mathbb{P}X$, par $\tau X(a, p) = \delta_a \otimes p$ (produit des probabilités δ_a et p) ; on vérifie (voir App.V pour une preuve détaillée) que c'est une application mesurable pour tout espace mesurable X et que cela définit une transformation naturelle $\tau : T_M \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}T_M$ qui vérifie les axiomes (B_i) des lois distributives (voir App.I.5). On obtient ainsi une loi distributive $\tau : T_M/T_{\mathbb{P}}$.

4.5. Proposition 4 : *Soit $\tau : T_M/T_{\mathbb{P}}$ la loi distributive décrite dans 4.4 ci-dessus. Une τ -algèbre est la donnée d'un M -automate stochastique, i.e (voir App.III.5), c'est la donnée d'un espace mesurable X et d'une application mesurable $\theta : M \times X \rightarrow \mathbb{P}X$ tels que, pour tout $a, b \in M$, tout $x \in X$ et toute partie*

mesurable A de X , on ait :

$$\theta(e, x) = \delta_x \quad \text{et} \quad (\theta(ab, x))(A) \stackrel{*}{=} \int_X (\theta(a, y))(A)(\theta(b, x))(dy)$$

Dans le cas où $M = \Sigma^*$ (et où Σ est un ensemble fini), une τ -algèbre est la donnée d'un automate stochastique sur l'alphabet Σ .

Preuve : Il s'agit donc de comparer les axiomes (A'_i) de τ -algèbre (voir 2.1) avec les axiomes ci-dessus. L'axiome (A'_1) donne immédiatement $\theta(e, x) = \delta_x$ pour tout $x \in X$. Pour l'axiome (A'_2) , soit $a, b \in M$, $x \in X$ et A une partie mesurable de X ; on obtient alors d'une part $((\theta \circ \mu X)(a, b, x))(A) = (\theta(ab, x))(A)$ et, d'autre part $((\mu'' X \circ \mathbb{P}\theta \circ \tau X \circ (M \times \theta))(a, b, x))(A) = (\mu'' X(\theta_*(\delta_a \otimes \theta(b, x))))(A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d(\theta_*(\delta_a \otimes \theta(b, x))) = \iint_{M \times X} e_A \circ \theta d(\delta_a \otimes \theta(b, x)) = \iint_{M \times X} (\theta(c, y))(A)(\delta_a \otimes \theta(b, x))(dc dy) = \int_X (\theta(a, y))(A)(\theta(b, x))(dy)$. D'où l'égalité $\stackrel{*}{=}$ cherchée. \square

4.6. La donnée d'une τ -algèbre $M \times X \xrightarrow{\theta} \mathbb{P}X$ est équivalente (d'après 2.2 ci-dessus) à la donnée d'une T_M -algèbre $M \times \mathbb{P}X \xrightarrow{\tilde{\theta}} \mathbb{P}X$, τ -compatible avec la multiplication $\mu'' X$ (ainsi l'espace des probabilités d'un automate stochastique est un automate déterministe τ -compatible avec la multiplication de la monade $T_{\mathbb{P}}$ des probabilités), i.e telle que, pour tout $a \in M$ et tout $\hat{p} \in \mathbb{P}\mathbb{P}X$, on ait l'égalité : $\tilde{\theta}(a, \mu'' X(\hat{p})) = \mu'' X(\tilde{\theta}_*(\delta_a \otimes \hat{p}))$. Plus précisément, la T_M -algèbre $\tilde{\theta}$ associée à la τ -algèbre θ est définie par $(\tilde{\theta}(a, p))(A) = (\mu'' X(\theta_*(\delta_a \otimes p)))(A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d(\theta_*(\delta_a \otimes p)) = \iint_{M \times X} e_A \circ \theta d(\delta_a \otimes p) = \iint_{M \times X} (\theta(b, x))(A)(\delta_a \otimes p)(db dx) = \int_X \theta(a, x)(A)p(dx)$ pour toute partie mesurable A de X .

4.7. La catégorie de Kleisli de la monade $T_{\mathbb{P}}$ des probabilités est la catégorie, notée **Stoch**, dont les objets sont les espaces mesurables et les morphismes les probabilités de transition, puisqu'un morphisme de Kleisli $u : X \dashrightarrow Y$ est une application mesurable $u : X \rightarrow \mathbb{P}Y$ (voir App.I.7 et App.III.4). De plus, si $u : X \dashrightarrow Y$ et $v : Y \dashrightarrow Z$ sont deux probabilités de transition, leur composé $v \circ u$ dans la catégorie de Kleisli **Stoch** est ainsi défini (voir App.I.7) : si $x \in X$ et si \hat{p} est la probabilité image $v_*(u(x))$ sur $\mathbb{P}Z$ (c'est donc un élément de $\mathbb{P}\mathbb{P}Z$), alors $(v \circ u)(x) = \mu'' Z(\hat{p})$ est la probabilité sur Z qui, à toute partie mesurable C de Z , associe le réel $(\mu'' Z(\hat{p}))(C) = \int_{\mathbb{P}Z} e_C d\hat{p} = \int_Y e_C \circ v d(u(x)) = \int_Y e_C(v(y))(u(x))(dy) = \int_Y (v(y))(C)(u(x))(dy)$. On a donc obtenu l'égalité :

$$((v \circ u)(x))(C) = \int_Y (v(y))(C)(u(x))(dy)$$

pour tout x de X et toute partie mesurable C de Z ; d'où la proposition suivante :

Proposition 5 [Giry 81] : la composition \circ dans la catégorie de Kleisli **Stoch** est exactement la composition habituelle des probabilités de transition appelée dans App.III.4 : $v \circ u = vu$.

D'après 2.3 ci-dessus, on a un prolongement $\widetilde{T}_M : \mathbf{Stoch} \rightarrow \mathbf{Stoch}$ qui, à toute probabilité de transition $u : X \dashrightarrow Y$ associe la probabilité de transition $\widetilde{T}_M u = \tau Y \circ (M \times u) : M \times X \dashrightarrow M \times Y : (a, x) \mapsto \delta_a \otimes u(x)$. En particulier,

pour $\theta : M \times X \dashrightarrow X$, la probabilité de transition $\widetilde{T}_M \theta = \tau X \circ (M \times \theta) : M \times M \times X \dashrightarrow M \times X$ est définie par $(\widetilde{T}_M \theta)(a, b, x) = \delta_a \otimes \theta(b, x)$.

De plus, se référant à 2.4, une τ -algèbre $\theta : M \times X \longrightarrow \mathbb{P}X$ dans **Mes** est aussi une \widetilde{T}_M -algèbre $\theta : M \times X \dashrightarrow X$ dans **Stoch**.

5. Processus et chaînes de Markov homogènes

On conserve ici la loi distributive $\tau : T_M/T_{\mathbb{P}}$ du paragraphe 4.

5.1. Se référant aux App.III.6 et App.III.7, on obtient les corollaires suivants de la proposition 4 :

Corollaire 1 : *Dans le cas où le monoïde M est \mathbf{R}_+ (avec l'addition usuelle), que l'on munit de la tribu borélienne, une τ -algèbre étant un \mathbf{R}_+ -automate stochastique, c'est donc un processus Markovien homogène.*

Corollaire 2 : *Dans le cas où le monoïde M est \mathbf{N} (toujours pour l'addition usuelle), muni de la tribu discrète, une τ -algèbre étant un \mathbf{N} -automate stochastique (le monoïde \mathbf{N} est librement engendré par $\Sigma = 1$), c'est donc une chaîne de Markov homogène.*

5.2. Dans la catégorie de Kleisli **Stoch**, on a un *objet des entiers naturels* (i.e un NNO ... voir App.I.8) : c'est simplement l'ensemble \mathbf{N} des entiers naturels muni de sa tribu discrète et des deux applications $z : 1 \longrightarrow \mathbf{N} : 0 \mapsto 0$ et $s : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} : n \mapsto n + 1$ (c'est un NNO dans **Ens**, donc dans **Mes** (car \mathbf{N} est discret), et donc aussi dans **Stoch**, puisque le foncteur $F_{T_{\mathbb{P}}} : \mathbf{Mes} \longrightarrow \mathbf{Stoch}$ possède un adjoint à droite $U_{T_{\mathbb{P}}}$ (voir App.I.7, App.I.8 et [Bu 86])). Plus concrètement, si $1 \dashrightarrow^{\nu} X$ et $X \dashrightarrow^{\pi} X$ sont deux probabilités de transition, il existe une unique probabilité de transition $\varphi : \mathbf{N} \dashrightarrow X$ définie par la récurrence $\varphi(0) = \nu$ et $\varphi(n+1) = (\pi \circ \varphi)(n)$, i.e rendant les diagrammes ci-dessous commutatifs dans la catégorie **Stoch** :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{z} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N} \\ & \searrow \nu & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ & & X & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Ceci traduit de manière catégorique le fait, rappelé dans App.III.6, que la donnée d'une probabilité ν sur X et d'une probabilité de transition $\pi : X \dashrightarrow X$ détermine entièrement les lois d'une chaîne de Markov homogène (elles s'écrivent,

rappelons-le, $\pi_n \bar{\circ} \nu = \pi_n \nu$, où $\pi_n = \overbrace{\pi \circ \dots \circ \pi}^{n \text{ fois}} = \overbrace{\pi \dots \pi}^{n \text{ fois}}$). En effet, par définition de φ , ces lois s'écrivent ici $\pi_0 \bar{\circ} \nu = \nu = \varphi(0)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\pi_n \bar{\circ} \nu = \pi_n \bar{\circ} \varphi(0) = \pi_{n-1} \bar{\circ} (\pi \bar{\circ} \varphi(0)) = \pi_{n-1} \bar{\circ} \varphi(1) = \dots = \pi \bar{\circ} \varphi(n-1) = \varphi(n)$.

APPENDICES

App.I. Rappels en théorie des catégories

App.I.1. Une *catégorie monoïdale* est définie par un 6-uplet $(\mathbf{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$, où \mathbf{V} est une catégorie, I un objet de \mathbf{V} , $\otimes : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ un foncteur (appelés, respectivement, unité et loi monoïdale de \mathbf{V}) et α, λ et ρ sont des isomorphismes naturels de la forme (où X, Y, Z sont des objets de \mathbf{V}) :

$\alpha_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z$, $\lambda_X : I \otimes X \simeq X$ $\rho_X : X \otimes I \simeq X$,
vérifiant les axiomes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes (I \otimes Y) & \xrightarrow{\alpha} & (X \otimes I) \otimes Y \\
 \searrow^{X \otimes \lambda} & & \swarrow^{\rho \otimes Y} \\
 & X \otimes Y &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) & \xrightarrow{\alpha} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) & \xrightarrow{\alpha} & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \\
 \downarrow^{X \otimes \alpha} & & & & \uparrow^{\alpha \otimes T} \\
 X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) & \xrightarrow{\alpha} & & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T
 \end{array}$$

($\lambda_I = \rho_I : I \otimes I \longrightarrow I$ est une conséquence). On sait que toute catégorie monoïdale est équivalente à une catégorie monoïdale stricte, i.e. une catégorie monoïdale dans laquelle les isomorphismes α, λ et ρ sont des identités (la loi monoïdale est associative et l'unité est neutre), voir [McL 72]. Cela permet de supposer que la catégorie monoïdale dans laquelle on travaille est stricte et donc qu'on peut la noter par un triplet (\mathbf{V}, \otimes, I) .

Exemples : La catégorie des ensembles, munie des produits cartésiens et de l'ensemble 1, est une catégorie monoïdale $(\mathbf{Ens}, \times, 1)$.

Pour toute catégorie \mathbf{C} , on a une catégorie monoïdale $(\mathbf{C}^{\mathbf{C}}, \cdot, \text{id}_{\mathbf{C}})$ (notation multiplicative de la loi monoïdale, c'est-à-dire par une absence de symbole !). Les objets de $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ sont les endofoncteurs de \mathbf{C} et les morphismes, dont la composition est notée par « \circ », sont les transformations naturelles.

App.I.2. Un *monoïde* (ou, une *monade*, au sens premier donné par Benabou [Ben 67]) dans une catégorie monoïdale (\mathbf{V}, \otimes, I) est défini par un triplet (M, e, m) , où M est un objet de \mathbf{V} , $e : I \longrightarrow M$ et $m : M \otimes M \longrightarrow M$ (resp. unité et multiplication du monoïde) sont des morphismes de \mathbf{V} vérifiant $m \circ (e \otimes M) = M = m \circ (M \otimes e)$ et $m \circ (m \otimes M) = m \circ (M \otimes m)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 I & \xrightarrow{e} & M & \begin{array}{c} \xrightarrow{e \otimes M} \\ \xleftarrow{m} \\ \xrightarrow{M \otimes e} \end{array} & M \otimes M & \begin{array}{c} \xleftarrow{m \otimes M} \\ \xrightarrow{M \otimes m} \end{array} & M \otimes M \otimes M
 \end{array}$$

App.I.3. Une *monade* sur une catégorie \mathbf{C} est un monoïde dans la catégorie monoïdale $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$ mentionnée plus haut ; c'est donc la donnée d'un triplet $T = (T, \eta, \mu)$, où $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est un foncteur, $\eta : id_{\mathbf{C}} \rightarrow T$ et $\mu : TT \rightarrow T$ (l'unité et la multiplication de la monade) des transformations naturelles vérifiant $\mu \circ \eta T = T = \mu \circ T\eta$ et $\mu \circ \mu T = \mu \circ T\mu$.

$$id_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\eta} T \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta T} \\ \xleftarrow{\mu} \\ \xrightarrow{T\eta} \end{array} TT \begin{array}{c} \xleftarrow{\mu T} \\ \xleftarrow{T\mu} \end{array} TTT$$

Etant donné une monade $T = (T, \eta, \mu)$ sur une catégorie \mathbf{C} , une *T-algèbre* est la donnée d'un couple (X, θ) , où X est un objet de \mathbf{C} et $\theta : TX \rightarrow X$ un morphisme de \mathbf{C} rendant commutatifs les diagrammes suivants dans \mathbf{C} :

$$(A_1) \quad \begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{\theta} & X \\ & \eta X \swarrow & \nearrow id_X \\ & X & \end{array} \quad (A_2) \quad \begin{array}{ccc} TTX & \xrightarrow{T\theta} & TX \\ \mu X \downarrow & & \downarrow \theta \\ TX & \xrightarrow{\theta} & X \end{array}$$

Toutes les structures libres définissent des monades : par exemple, la monade «monoïdes libres», la monade «groupes abéliens libres», etc ... ont pour algèbres respectives les monoïdes, les groupes abéliens, etc ...

On définit la catégorie $Alg(T)$ des *T-algèbres* comme étant la catégorie dont les objets sont les *T-algèbres* et les morphismes les $f : (X, \theta) \rightarrow (X', \theta')$, où $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme de \mathbf{C} vérifiant $f \circ \theta = \theta' \circ Tf$. On a un foncteur d'oubli $U^T : Alg(T) \rightarrow \mathbf{C}$ défini par $U^T(X, \theta) = X$ et $U^T(f) = f : X \rightarrow X'$ si $f : (X, \theta) \rightarrow (X', \theta')$; ce foncteur admet un adjoint $F^T : \mathbf{C} \rightarrow Alg(T)$ qui, à tout objet X de \mathbf{C} , associe la *T-algèbre libre* $(TX, \mu X)$ associée à X (ou engendrée par X) et, à tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathbf{C} , le morphisme $Tf : (TX, \mu X) \rightarrow (TX', \mu X')$ de $Alg(T)$.

Le couple d'adjoints (F^T, U^T) , décrit ci-dessus, induit la monade T sur \mathbf{C} .

App.I.4. Fixons-nous un monoïde (M, e, m) dans une catégorie monoïdale (\mathbf{V}, \otimes, I) ; on lui associe naturellement une monade $T_M = (T_M, \eta, \mu)$ sur \mathbf{V} , où l'endofoncteur T_M associe l'objet $M \otimes X$ (resp. le morphisme $M \otimes f : M \otimes X \rightarrow M \otimes Y$) à tout objet X (resp. à tout morphisme $f : X \rightarrow Y$) de \mathbf{V} ; de plus, pour tout objet X de \mathbf{V} , les morphismes $\eta X : X \rightarrow M \otimes X$ et $\mu X : M \otimes M \otimes X \rightarrow M \otimes X$ sont respectivement égaux à $e \otimes X$ et $m \otimes X$.

App.I.5. Soit $T = (T, \eta, \mu)$ et $T' = (T', \eta', \mu')$ deux monades sur une même catégorie \mathbf{C} . Une *loi distributive* τ de T sur T' (ce que l'on notera $\tau : T/T'$ (voir [Beck 69])) est la donnée d'un triplet $\tau = (\tau, T, T')$, où $\tau : TT' \rightarrow T'T$ est une transformation naturelle rendant commutatifs les diagrammes suivants dans $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$:

$$(B_1) \quad \begin{array}{ccc} TT' & \xrightarrow{\tau} & T'T \\ & T\eta' \swarrow & \nearrow \eta'T \\ & T & \end{array} \quad (B_2) \quad \begin{array}{ccc} TT' & \xrightarrow{\tau} & T'T \\ & \eta T' \swarrow & \nearrow T'\eta \\ & T' & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 (B_3) & TT'T' & \xrightarrow{\tau T'} & T'TT' & \xrightarrow{T'\tau} & T'T'T \\
 & \searrow^{T\mu'} & & & & \swarrow^{\mu'T} \\
 & & TT' & \xrightarrow{\tau} & T'T & \\
 \\
 (B_4) & TTT' & \xrightarrow{T\tau} & TT'T & \xrightarrow{\tau T} & T'TT \\
 & \searrow^{\mu T'} & & & & \swarrow^{T'\mu} \\
 & & TT' & \xrightarrow{\tau} & T'T &
 \end{array}$$

On démontre qu'une loi distributive est une monade dans la 2-catégorie des monades (c'est une des manifestations du caractère ubiquitaire des monades !)

Exemple original : La loi distributive "modèle" relie la monade "monoïdes libres" à la monade "groupes abéliens libres". En effet, le schéma d'origine des lois distributives est donné par la distributivité, dans un anneau, de la multiplication par rapport à l'addition, qui fait passer d'un mot de combinaisons linéaires à une combinaison linéaire de mots ; autrement dit, cette distributivité est décrite par une application de la forme $\tau X : (\mathbf{Z}^{(X)})^* \longrightarrow \mathbf{Z}^{(X^*)}$, soumise à des conditions du type des (B_i) ci-dessus (où X^* et $\mathbf{Z}^{(X)}$ sont respectivement le monoïde libre et le groupe abélien libre engendrés par l'ensemble X).

App.I.6. Les équivalences de J.Beck.

a) Le fait que le groupe abélien libre engendré par un monoïde M soit encore un monoïde (qui est l'anneau libre des polynômes sur X quand $M = X^*$) a conduit J.Beck à établir que la donnée d'une loi distributive $\tau : T/T'$ est équivalente :

- d'une part à la donnée d'un relèvement de la monade T' sur \mathbf{C} en une monade $\tilde{T}' = (\tilde{T}', \tilde{\eta}', \tilde{\mu}')$ sur la catégorie $Alg(T)$ des T -algèbres, ce qui signifie que les diagrammes suivants commutent si, pour le second, on remplace le couple (\Downarrow, \Uparrow) par chacun des couples $(\eta', \tilde{\eta}')$ et $(\mu', \tilde{\mu}')$:

$$\begin{array}{ccc}
 Alg(T) & \xrightarrow{\tilde{T}'} & Alg(T) \\
 U^T \downarrow & & \downarrow U^T \\
 \mathbf{C} & \xrightarrow{T'} & \mathbf{C}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Alg(T) & \xrightarrow{\Uparrow} & Alg(T) \\
 U^T \downarrow & & \downarrow U^T \\
 \mathbf{C} & \xrightarrow{\Downarrow} & \mathbf{C}
 \end{array}$$

En bref, si $\tau : T/T'$ est une loi distributive, le premier diagramme signifie que l'image, par le foncteur \tilde{T}' , d'une T -algèbre sur X est une T -algèbre sur $T'X$ (plus précisément, $\tilde{T}'(X, \theta) = (T'X, T'\theta \circ \tau X)$), et le second diagramme que $\eta' = \eta$ et $\mu' = \mu$ (plus précisément, $\tilde{\eta}'(X, \theta) = \eta'X$ et $\tilde{\mu}'(X, \theta) = \mu'X$).

- d'autre part, à la donnée d'une monade composée $\hat{T} = (\hat{T}, \hat{\eta}, \hat{\mu})$ sur \mathbf{C} , où $\hat{T} = T'T$ (plus précisément, $\hat{\eta} = \eta'\eta$ et $\hat{\mu} = (\mu'\mu) \circ (T'\tau T)$).

b) S'inspirant du fait que la donnée d'une structure d'anneau est équivalente à la donnée de deux opérations \times et $+$ telles que la première soit distributive

par rapport à la seconde, J.Beck a aussi prouvé que, s'il existe une loi distributive $\tau : T/T'$, alors la donnée d'une \widehat{T} -algèbre $(X, \widehat{\theta})$ dans \mathbf{C} est équivalente à la donnée d'une \widehat{T}' -algèbre $((X, \theta), \theta')$ dans $Alg(T)$ (avec $\widehat{\theta} = \theta' \circ T'\theta$; $\theta = \widehat{\theta} \circ \eta'TX$ et $\theta' = \widehat{\theta} \circ T'\eta X$), i.e à la donnée d'une T -algèbre (X, θ) et d'une T' -algèbre (X, θ') qui sont τ -compatibles, i.e telles que le diagramme suivant commute dans \mathbf{C} :

$$\begin{array}{ccc}
 & TT'X & \xrightarrow{\tau X} & T'TX & \\
 & \swarrow T\theta' & & \searrow T'\theta & \\
 TX & & & & T'X \\
 & \searrow \theta & & \swarrow \theta' & \\
 & X & \xrightarrow{id} & X &
 \end{array}$$

Ce que l'on peut exprimer en disant que les catégories d'algèbres $Alg(\widehat{T})$ et $Alg(\widehat{T}')$ sont équivalentes.

App.I.7. Catégorie de Kleisli d'une monade.

Soit $T = (T, \eta, \mu)$ une monade sur une catégorie \mathbf{C} . La *catégorie de Kleisli* de T , notée $Kl(T)$, est la catégorie suivante : ses objets sont les mêmes que ceux de \mathbf{C} ; un morphisme, noté $u : X \dashrightarrow Y$, dans $Kl(T)$ est un morphisme de \mathbf{C} de la forme $u : X \longrightarrow TY$. Le composé $v \circ u : X \dashrightarrow Z$ dans $Kl(T)$, de deux morphismes $u : X \dashrightarrow Y$ et $v : Y \dashrightarrow Z$, est défini par $v \circ u = \mu Z \circ Tv \circ u$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & TTZ \\
 & & & & \downarrow \mu Z \\
 & & & & TZ \\
 & & & & \uparrow v \\
 & & TY & \xrightarrow{Tv} & \\
 & & \uparrow u & & \\
 X & \dashrightarrow & Y & \dashrightarrow & Z \\
 & \text{---} u \text{---} & & \text{---} v \text{---} &
 \end{array}$$

L'identité, dans $Kl(T)$, associée à un objet X , est notée \overline{id}_X et est définie par $\overline{id}_X = \eta X : X \dashrightarrow X$.

Entre les catégories \mathbf{C} et $Kl(T)$, on a un foncteur $U_T : Kl(T) \longrightarrow \mathbf{C}$ défini, pour tout objet X de $Kl(T)$, par $U_T(X) = TX$ et, pour tout $u : X \dashrightarrow Y$, par $U_T(u) = \mu Y \circ Tu : TX \longrightarrow TY$. Ce foncteur a un adjoint à gauche $F_T : \mathbf{C} \longrightarrow Kl(T)$ défini, pour tout objet X , par $F_T(X) = X$ et, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de \mathbf{C} , par $F_T(f) = \eta Y \circ f : X \dashrightarrow Y$ (le foncteur F_T permet souvent d'identifier \mathbf{C} à la sous-catégorie $F_T(\mathbf{C})$ de $Kl(T)$).

Le couple d'adjoints (F_T, U_T) , décrit ci-dessus, induit la monade T sur \mathbf{C} .

On a un foncteur plein et fidèle (dit *foncteur de comparaison*) $Kl(T) \xrightarrow{\phi} Alg(T)$ qui vérifie les relations (voir l.3 ci-dessus pour les foncteurs U^T et F^T) : $\phi \circ F_T = F^T$ et $U^T \circ \phi = U_T$ (il est défini par $\phi(X) = (TX, \mu X)$ et $\phi(u) = \mu Y \circ Tu$ (où $u : X \dashrightarrow Y$)); ainsi, la catégorie $Kl(T)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine $\phi(Kl(T))$ de $Alg(T)$ dont les objets sont les T -algèbres libres $(TX, \mu X)$.

En fait, $Alg(T)$ est une complétion de $\phi(Kl(T)) \simeq Kl(T)$ par conoyaux ; plus précisément, si (X, θ) est une T -algèbre, le morphisme $(TX, \mu X) \xrightarrow{\theta} (X, \theta)$ est un conoyau dans $Alg(T)$ du couple de morphismes de $\phi(Kl(T))$:

$$(TTX, \mu T X) \begin{array}{c} \xrightarrow{T\theta} \\ \xrightarrow{\mu X} \end{array} (TX, \mu X)$$

Autrement dit, la T -algèbre (X, θ) est un quotient de la T -algèbre libre $(TX, \mu X)$.

App.I.8. Un *objet des entiers naturels* (ou NNO), dans une catégorie \mathbf{C} avec objet final 1 , est la donnée d'un objet N , muni de deux morphismes $1 \xrightarrow{z} N \xrightarrow{s} N$ assujettis à la propriété universelle suivante : pour tout objet X de \mathbf{C} , muni de deux morphismes $1 \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X$, il existe un unique morphisme $\varphi : N \rightarrow X$ rendant les diagrammes suivants commutatifs dans \mathbf{C} :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{z} & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \searrow f & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ & & X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Exemple : L'ensemble \mathbf{N} des entiers naturels, muni des deux applications : $1 \xrightarrow{z} \mathbf{N} \xrightarrow{s} \mathbf{N}$, définies par $z(0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $s(n) = n + 1$, est évidemment un NNO dans la catégorie **Ens**.

Proposition 6 (A.Burroni [Bu 86]) : *Tout foncteur admettant un adjoint à droite commute aux NNO (en fait, il commute aux extensions de Kan indexées par des graphes).*

App.II. Rappels en théorie des automates déterministes et non déterministes

On fixe un ensemble fini Σ qu'on appelle *alphabet* et dont les éléments sont appelés *symboles*. On note Σ^* le monoïde libre engendré par Σ . Les éléments de Σ^* s'appellent des *mots*. Un mot $a \in \Sigma^*$ est une suite finie $a = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ de symboles ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Sigma$). L'entier n est la longueur de a . En particulier, pour $n = 0$, on a le *mot vide*, qu'on notera e , et qui est l'unité du monoïde Σ^* . Pour les deux définitions qui suivent, voir [Star 72].

App.II.1. Un *automate déterministe* sur l'alphabet Σ est la donnée d'un couple (X, δ) , où X est un ensemble et $\delta : \Sigma \times X \rightarrow X$ une application appelée *fonction de transition*. Elle s'étend (par induction sur la longueur des mots) en une application $\theta : \Sigma^* \times X \rightarrow X$ (appelée *loi de transition* de l'automate déterministe) vérifiant, pour tout $a, b \in \Sigma^*$ et tout $x \in X$, les deux axiomes suivants :

$$\theta(e, x) = x \quad \text{et} \quad \theta(ab, x) = \theta(a, \theta(b, x))$$

Les éléments de X sont appelés les *états* de l'automate. L'égalité $\theta(a, x) = y$ s'interprète en disant que, lisant a , l'automate passe de l'état x à l'état y . Les deux axiomes ci-dessus reviennent à dire, d'une part que le mot vide ne fait pas changer d'état l'automate et, d'autre part que les mots agissent *séquentiellement* (i.e symbole après symbole) sur les états.

App.II.2. Un *automate non déterministe* sur l'alphabet Σ est encore la donnée d'un couple (X, δ) , mais où la fonction de transition est cette fois de la forme $\delta : \Sigma \times X \longrightarrow \mathcal{P}X$ (où $\mathcal{P}X$ est l'ensemble des parties de X). Comme précédemment, l'application δ s'étend par induction en une application $\theta : \Sigma^* \times X \longrightarrow \mathcal{P}X$ (encore appelée *loi de transition* de l'automate non déterministe) vérifiant, pour tout $a, b \in \Sigma^*$ et tout $x \in X$, les deux axiomes suivants :

$$\theta(e, x) = \{x\} \quad \text{et} \quad \theta(ab, x) = \bigcup_{y \in \theta(b, x)} \theta(a, y)$$

Ici encore, les éléments de X sont appelés les *états* de l'automate. L'égalité $\theta(a, x) = A$ s'interprète en disant que A est l'ensemble des états "possibles" dans lesquels l'automate peut se mettre, partant de l'état x , quand il lit a ; les deux axiomes ci-dessus traduisent encore le fait que le mot vide n'a aucune action sur l'automate et que les mots agissent séquentiellement.

App.III. Rappels en théorie des probabilités et en théorie des automates stochastiques

Si X, Y, Z , etc ... sont des espaces mesurables, on désignera par $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$, etc ... leurs tribus respectives. On considère l'ensemble \mathbf{R} (ainsi que toutes ses parties) muni de la tribu borélienne.

App.III.1. Une probabilité sur l'espace mesurable X est une mesure positive p vérifiant $p(X) = 1$. Pour tout espace mesurable X , on désigne par $\mathbb{P}X$ l'ensemble des probabilités sur X ; dans tout cet article, l'ensemble $\mathbb{P}X$ sera considéré comme un espace mesurable en le munissant de la plus petite tribu rendant mesurables les évaluations $e_A : \mathbb{P}X \longrightarrow [0, 1] : p \mapsto p(A)$, où A parcourt la tribu \mathcal{X} sur X . Ce qui équivaut à dire que, pour tout espace mesurable Y , une application $u : Y \longrightarrow \mathbb{P}X$ est mesurable ssi tous les composés $e_A \circ u$ sont mesurables, lorsque A parcourt la tribu \mathcal{X} sur X .

App.III.2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application mesurable (appelée aussi *variable aléatoire* en théorie des probabilités) et p une probabilité sur X . On définit une probabilité image $f_*(p)$ sur Y en posant $(f_*(p))(B) = p(\overset{-1}{f}(B))$ pour toute partie mesurable B de Y ; on appelle habituellement *p-loi* de f cette probabilité image $f_*(p)$, et on note $p(f \in B)$ l'expression $p(\overset{-1}{f}(B))$ interprétée comme étant la

probabilité que f soit dans B . Dans le cas où l'on a $p(f \in B) = 1$, on dit que f est p -presque sûrement dans B .

Dans le cas où $Y = \mathbf{R}$ et où f est mesurable positive, l'intégrale de f par rapport à p a un sens (elle peut être infinie) et se note $\int_X f dp = \int_X f(x)p(dx)$; si f est mesurable bornée, elle est p -intégrable (i.e son intégrale par rapport à p existe et est finie).

App.III.3. Soit X et Y deux espaces mesurables. On appelle *probabilité de transition* de X vers Y ([Nev 64]) une application $\pi : X \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$ telle que, d'une part, pour tout $x \in X$, l'application $\pi(x, -) : \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur Y , et, d'autre part, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, l'application $\pi(-, B) : X \rightarrow [0, 1]$ est mesurable.

Soit donc π une telle probabilité de transition de X vers Y , $f : Y \rightarrow \mathbf{R}$ une application mesurable (positive ou bornée) et $x \in X$; on note $\int_Y f(y)\pi(x, dy)$ l'intégrale de f par rapport à la probabilité $\pi(x, -)$ sur Y .

Si π' est une autre probabilité de transition de Y vers Z , on définit une nouvelle probabilité de transition de X vers Z , appelée produit (ou composition) des probabilités de transition π et π' , en posant, pour tout $x \in X$ et tout $C \in \mathcal{Z}$:

$$(\pi'\pi)(x, C) \stackrel{(1)}{=} \int_Y \pi'(y, C)\pi(x, dy)$$

Enfin, les probabilités de transition opèrent sur les probabilités de la manière suivante : si ν est une probabilité sur X , π une probabilité de transition de X vers Y , on définit une probabilité $\pi\nu$ sur Y en posant, pour tout $B \in \mathcal{Y}$:

$$(\pi\nu)(B) \stackrel{(2)}{=} \int_X \pi(x, B)\nu(dx)$$

En fait, la formule (2) est un cas particulier de la formule (1) en faisant $X = 1$ dans (1).

App.III.4. Considérons maintenant une application mesurable $u : X \rightarrow \mathbb{P}Y$; une telle donnée équivaut au fait que, pour tout $x \in X$, $u(x)$ est une probabilité sur Y et que, par définition même de la tribu sur $\mathbb{P}Y$ (voir III.1 ci-dessus), pour toute partie mesurable B de Y , l'application $e_B \circ u : X \rightarrow [0, 1] : x \mapsto (u(x))(B)$ est mesurable; ainsi, la donnée d'une application mesurable $u : X \rightarrow \mathbb{P}Y$ est équivalente à la donnée de la probabilité de transition π de X vers Y définie par $\pi(x, B) = (u(x))(B)$ pour tout $x \in X$ et tout $B \in \mathcal{Y}$ ([Giry 81]).

Définition 1 : On appellera dorénavant *probabilité de transition* une application mesurable de la forme $u : X \rightarrow \mathbb{P}Y$; en particulier, toute probabilité ν sur X s'identifie (en posant $\nu(0) = \nu$) à une probabilité de transition $\nu : 1 \rightarrow \mathbb{P}X$.

Les formules (1) et (2) données dans III.3 ci-dessus se traduisent donc ici par :

$$((vu)(x))(C) \stackrel{(1')}{=} \int_Y (v(y))(C)(u(x))(dy) \quad \text{et} \quad (u\nu)(B) \stackrel{(2')}{=} \int_X (u(x))(B)\nu(dx)$$

pour tout $x \in X$, tout $C \in \mathcal{Z}$, toute probabilité ν sur X , et toutes probabilités de transition $u : X \rightarrow \mathbb{P}Y$ et $v : Y \rightarrow \mathbb{P}Z$.

App.III.5. Soit Σ un ensemble fini. Un *automate stochastique* sur l'alphabet Σ (voir [Star 72]) est la donnée d'un couple (X, θ) , où X est un ensemble et $\theta : \Sigma^* \times X \longrightarrow \mathbb{P}X$ une application mesurable vérifiant les deux axiomes suivants :

$$\theta(e, x) = \delta_x \quad \text{et} \quad \theta(ab, x)(A) \stackrel{(1'')}{=} \int_X (\theta(a, y))(A) (\theta(b, x))(dy)$$

(où δ_x est la probabilité de Dirac au point x) pour tout $a, b \in \Sigma^*$, tout $x \in X$ et tout $A \in \mathcal{X}$. Les éléments de X sont appelés les *états* de l'automate et θ sa *probabilité de transition* (ce qui est bien naturel, d'après III.4 ci-dessus). L'égalité $\theta(a, x) = p$ s'interprète en disant que, pour toute partie mesurable A de X , $p(A)$ est la probabilité que l'automate, partant de l'état x et lisant a , aille dans A ; les deux axiomes ci-dessus signifient, d'une part que, partant d'un état x et lisant le mot vide, l'automate reste presque-sûrement dans toute partie mesurable de X contenant x et, d'autre part que cet automate fonctionne encore de façon séquentielle.

La similitude entre les formules (1') et (1'') n'a rien de fortuit : en effet, remarquant que, pour tout $a \in \Sigma^*$, l'application partielle $\pi_a = \theta(a, -)$ est aussi une probabilité de transition $X \longrightarrow \mathbb{P}X$, la formule (1'') peut encore s'écrire, pour tout $a, b \in \Sigma^*$, tout $x \in X$ et tout $A \in \mathcal{X}$:

$$(\pi_{ab}(x))(A) = \int_X (\pi_a(y))(A) (\pi_b(x))(dy) = ((\pi_a \pi_b)(x))(A)$$

On obtient ainsi la *relation de Chapman-Kolmogoroff* (généralisée) des automates stochastiques sur un alphabet Σ (qui est en fait équivalente à la formule (1''), i.e. au second axiome des automates stochastiques) :

$$\pi_{ab} = \pi_a \pi_b \quad \text{pour tout} \quad a, b \in \Sigma^*$$

Définition 2 : On appelle *M-automate stochastique* (où M est un monoïde quelconque) la donnée d'un couple (X, θ) , où X est un espace mesurable et $\theta : M \times X \longrightarrow \mathbb{P}X$ une probabilité de transition vérifiant les mêmes propriétés formelles que ci-dessus, i.e. avec les notations adoptées précédemment, vérifiant, pour tout $a, b \in M$ et tout $x \in X$, les axiomes :

$$\pi_e(x) = \delta_x \quad \text{et} \quad \pi_{ab} = \pi_a \pi_b$$

Utilisant la formule (2') de III.4, on a une probabilité $\pi_a \nu$ sur X pour toute probabilité ν sur X qui est définie par $(\pi_a \nu)(A) = \int_X (\pi_a(x))(A) \nu(dx)$ pour toute partie mesurable A de X ; en particulier $\pi_a \delta_x = \pi_a(x)$ et $(\pi_e \nu)(A) = \int_X (\pi_e(x))(A) \nu(dx) = \int_X \delta_x(A) \nu(dx) = \int_X 1_A(x) \nu(dx) = \nu(A)$; ainsi $\pi_e \nu = \nu$.

App.III.6. Une *chaîne de Markov homogène* est un automate stochastique sur l'alphabet $\Sigma = 1$ (on identifie donc Σ^* à \mathbf{N} , avec son addition usuelle, que l'on munit de sa tribu discrète). Soit $\theta : \mathbf{N} \times X \longrightarrow \mathbb{P}X$ une telle chaîne de Markov, et notons encore $\pi_n(x) = \theta(n, x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in X$ ($(\pi_n(x))(A)$ étant la probabilité de passer de x dans A en n pas). La mesurabilité de θ étant équivalente à celle de tous les $\pi_n : X \longrightarrow \mathbb{P}X$, cette chaîne de Markov

est équivalente à la donnée de la suite (π_n) de probabilités de transition vérifiant, pour tout $n, m \in \mathbf{N}$ et tout $x \in X$, les axiomes :

$$\pi_0(x) = \delta_x \quad \text{et} \quad \pi_{n+m} = \pi_n \pi_m$$

On dit que $\pi_n(x) = \pi_n \delta_x$ est la loi de la chaîne au temps n , lorsqu'elle part de x , et, plus généralement, si ν est une probabilité sur X , que $\pi_n \nu$ est la loi de la chaîne au temps n , pour la loi initiale ν .

En fait, grâce à la relation de Chapman-Kolmogoroff $\pi_{n+m} = \pi_n \pi_m$, les π_n avec $n \in \mathbf{N}^*$ sont entièrement déterminés par la probabilité de transition $\pi_1 : X \rightarrow \mathbb{P}X$, de sorte que les lois d'une chaîne de Markov homogène sont entièrement déterminées par la donnée d'une probabilité de transition $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}X$ (appelée encore *probabilité de transition* de la chaîne de Markov; alors $\pi_n = \overbrace{\pi \dots \pi}^{n \text{ fois}}$) et d'une probabilité ν sur X (on obtient donc toutes les lois $\pi_n \nu$ de la chaîne, et en particulier sa loi initiale $\pi_0 \nu$ qui n'est autre que ν , d'après III.5).

Les probabilistes ont coutume d'appeler plutôt chaîne de Markov homogène la donnée d'une suite de variables aléatoires dont les lois (voir III.2 ci-dessus) sont du type des $\pi_n \nu$ ci-dessus. Il est bien connu des probabilistes que l'on peut toujours construire, a posteriori, une telle chaîne de Markov homogène dont la probabilité de transition $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}X$ et la loi initiale ν sont données a priori : on considère l'espace $X^{\mathbf{N}}$, muni de la tribu produit; on peut alors construire une unique probabilité P_ν (l'indice ν étant là pour "symboliser" le fait que l'on part avec la loi ν) sur cet espace produit, telle que la suite (\mathbf{q}_n) des projections canoniques $X^{\mathbf{N}} \rightarrow X$ réponde à la question. En effet, la tribu produit étant la plus petite tribu rendant mesurables les \mathbf{q}_n , P_ν est entièrement déterminée par les $P_\nu(\mathbf{q}_n \in A)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et toute partie mesurable A de X (i.e par les P_ν -lois des \mathbf{q}_n pour tout $n \in \mathbf{N}$; voir III.2 ci-dessus) : on pose d'abord $P_\nu(\mathbf{q}_n \in A) = (\pi_n \nu)(A) = \int_X (\pi_n(x))(A) \nu(dx)$, où $\pi_n = \overbrace{\pi \dots \pi}^{n \text{ fois}}$; on prolonge ensuite P_ν aux pavés mesurables (i.e aux intersections finies de $\mathbf{q}_{n_i}^{-1}(A_i)$) en posant $P_\nu(\mathbf{q}_0 \in A_0 \text{ et } \mathbf{q}_{n_1} \in A_1 \text{ et } \dots \mathbf{q}_{n_k} \in A_k) = \int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} \pi_{n_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} \pi_{n_2-n_1}(x_1, dx_2) \dots \int_{A_k} \pi_{n_k-n_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k)$; un théorème de prolongement nous permet alors de prolonger P_ν à tous les mesurables de $X^{\mathbf{N}}$. Cette définition de P_ν est ad hoc pour que $\pi_n \nu$ soit la P_ν -loi de \mathbf{q}_n pour tout $n \in \mathbf{N}$, i.e la loi de la chaîne (\mathbf{q}_n) au temps n , pour la loi initiale ν . En particulier, $\pi_0 \nu = \nu$ (voir III.5 ci-dessus) est la loi initiale de la chaîne (\mathbf{q}_n) ; et, en notant P_x la probabilité P_{δ_x} , $P_x(\mathbf{q}_n \in A) = (\pi_n \delta_x)(A) = (\pi_n(x))(A)$, i.e $\pi_n(x)$ est la loi de la chaîne (\mathbf{q}_n) au temps n , quand elle part de x .

App.III.7. Un *Processus de Markov homogène* (ou *processus Markovien homogène*) est un \mathbf{R}_+ -automate stochastique (le monoïde \mathbf{R}_+ n'est ni libre ni finiment engendré; on le munit de l'addition usuelle et de la tribu borélienne); c'est donc la donnée d'un espace mesurable X et d'une probabilité de transition $\theta : \mathbf{R}_+ \times X \rightarrow \mathbb{P}X$ qui vérifie les axiomes (en notant $\pi_t(x)$ la probabilité $\theta(t, x)$)

pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et tout $x \in X$) :

$$\pi_0(x) = \delta_x \quad \text{et} \quad \pi_{s+t} = \pi_s \pi_t$$

pour tout $s, t \in \mathbf{R}_+$ et tout $x \in X$ (attention, ici, a priori, la mesurabilité de tous les $\pi_t : X \rightarrow \mathbb{P}X$ n'est pas une condition suffisante pour que $\theta : \mathbf{R}_+ \times X \rightarrow \mathbb{P}X$ soit mesurable; d'ailleurs, ici, on obtient plutôt les *processus Markoviens homogènes mesurables*, la mesurabilité de θ étant utile dans certains problèmes spécifiques d'intégration). $(\pi_t(x))(A)$ est la probabilité d'aller, en un temps t , de x dans A ; $\pi_t(x) = \pi_t \delta_x$ est la *loi du processus au temps t quand il part de x* ; plus généralement, si ν est une probabilité sur X , $\pi_t \nu$ est la *loi du processus au temps t , pour la loi initiale ν* .

Le problème de la construction, a posteriori, d'une famille de variables aléatoires dont les lois sont du type des $\pi_t \nu$ ci-dessus, i.e données, a priori, par une probabilité ν sur X et une famille (π_t) de probabilités de transition $X \rightarrow \mathbb{P}X$, indexée par \mathbf{R}_+ , et vérifiant la relation de Chapman-Kolmogoroff $\pi_{t+s} = \pi_t \pi_s$) est ici plus délicat. En effet, se référant à III.6 ci-dessus, on considère l'espace produit $X^{\mathbf{R}_+}$ (muni de sa tribu produit, i.e de la plus petite tribu rendant mesurables les projections canoniques $\mathbf{q}_t : X^{\mathbf{R}_+} \rightarrow X$). Bien que l'on puisse toujours poser $P_\nu(\mathbf{q}_t \in A) = (\pi_t \nu)(A)$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et pour toute partie mesurable A de X (et donc définir P_ν sur les pavés mesurables de l'espace produit $X^{\mathbf{R}_+}$), on ne peut pas toujours prolonger P_ν en une probabilité sur tous les mesurables de $X^{\mathbf{R}_+}$; c'est cependant possible avec de bonnes hypothèses sur X (par exemple, si X est un espace de Borel, i.e isomorphe à un borélien de $[0, 1]$). Dans ce cas, la famille (\mathbf{q}_t) forme un processus Markovien homogène dont les P_ν -lois sont, par définition de P_ν , les $\pi_t \nu$.

App.IV. La monade des probabilités

La monade $T_{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \eta'', \mu'')$ des probabilités sur la catégorie **Mes** des applications mesurables entre espaces mesurables a été publiée pour la première fois par M.Giry [Giry 81]¹; elle a donné une preuve complète mais succincte du fait que c'est une monade. Nous en donnons ici une preuve détaillée pour rendre ce travail plus accessible aux catégoriciens et aux probabilistes. Nous l'avons décrite rapidement dans la partie 4.3 de cet article. On reprend les notations fixées dans App.III.

App.IV.1. Rappelons que, pour définir une tribu sur l'ensemble $\mathbb{P}X$ des probabilités sur un espace mesurable X donné, nous avons utilisé les évaluations $e_A : \mathbb{P}X \rightarrow [0, 1] : p \mapsto p(A)$ (où A est une partie mesurable de X (i.e $A \in \mathcal{X}$)) qui sont mesurables par définition même de cette tribu. En fait, pour toute application mesurable bornée $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, on considère l'évaluation $e_f : \mathbb{P}X \rightarrow \mathbf{R}$

¹Ollivier de la Tullaye [Tull 71] avait fait cette construction antérieurement dans un manuscrit récemment retrouvé.

définie par $e_f(p) = \int_X f dp$. Notons, pour tout espace mesurable X , $\mathcal{M}es(X)$ (resp. $\mathcal{M}es_b(X)$) l'espace vectoriel des applications mesurables (resp. mesurables bornées) de X dans \mathbf{R} , où \mathbf{R} (tout comme $[0, 1]$ ci-dessus) est muni de sa tribu borélienne.

Lemme 1 : L'application $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{M}es_b(\mathbb{P}X) : A \longrightarrow e_A$ se prolonge en une application $Eval : \mathcal{M}es_b(X) \longrightarrow \mathcal{M}es(\mathbb{P}X) : f \longrightarrow e_f$ qui est linéaire et qui commute aux \sup_n^\uparrow (i.e aux sup dénombrables et croissants) de $\mathcal{M}es_b(X)$.

Preuve : Par définition de l'application e_f , on a $e_{1_A} = e_A$ pour tout $A \in \mathcal{X}$. En utilisant la linéarité de l'intégrale et le théorème de convergence monotone, on obtient, selon que $f \in \mathcal{M}es_b(X)$ s'écrit $\sum_i \alpha_i f_i$ (où les α_i sont des réels et les f_i des applications mesurables bornées sur X ; il s'agit bien sûr de sommes finies ici) ou $f = \sup_n^\uparrow f_n$ (où les f_n forment une suite croissante d'applications mesurables bornées sur X) :

- d'une part $e_f(p) = \int_X \sum_i \alpha_i f_i dp = \sum_i \alpha_i \int_X f_i dp = \sum_i \alpha_i e_{f_i}(p)$ pour tout $p \in \mathbb{P}X$, i.e $e_{\sum_i \alpha_i f_i} = \sum_i \alpha_i e_{f_i}$;
 - d'autre part $e_f(p) = \int_X \sup_n^\uparrow f_n dp = \sup_n^\uparrow \int_X f_n dp = \sup_n^\uparrow e_{f_n}(p)$ pour tout $p \in \mathbb{P}X$, i.e $e_{\sup_n^\uparrow f_n} = \sup_n^\uparrow e_{f_n}$.

Il en résulte immédiatement que l'application $Eval$ proposée est linéaire et commute aux \sup_n^\uparrow . On en déduit aussi que l'application e_f est mesurable lorsque, d'abord f est étagée sur X (en se limitant à des f_i de la forme 1_{A_i} , on obtient $e_{\sum_i \alpha_i 1_{A_i}} = \sum_i \alpha_i e_{A_i}$, de sorte que $e_{\sum_i \alpha_i 1_{A_i}}$ est mesurable); puis lorsque f est une fonction mesurable bornée positive sur X (elle s'écrit alors $f = \sup_n^\uparrow f_n$, où les f_n forment une suite croissante d'applications étagées sur X , de sorte que $e_{\sup_n^\uparrow f_n} = \sup_n^\uparrow e_{f_n}$ est mesurable); puis enfin lorsque f est simplement mesurable bornée (on écrit $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- mesurables bornées positives, de sorte que $e_f = e_{f^+} - e_{f^-}$ est mesurable). \square

App.IV.2. L'endofoncteur $\mathbb{P} : \mathbf{Mes} \longrightarrow \mathbf{Mes}$ est défini ainsi : à tout espace mesurable X , il associe l'ensemble $\mathbb{P}X$ des probabilités sur X , muni de la plus petite tribu rendant mesurables les évaluations e_A , lorsque A parcourt la tribu \mathcal{X} sur X ; à toute application mesurable $f : X \longrightarrow Y$, il associe l'application $f_* : \mathbb{P}X \longrightarrow \mathbb{P}Y : p \mapsto f_*(p)$, (voir App.III.2). La functorialité de \mathbb{P} résulte de l'égalité $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Pour vérifier que \mathbb{P} est bien un endofoncteur sur \mathbf{Mes} , Il faut juste s'assurer que, pour toute application mesurable f , l'application f_* est mesurable, i.e, par définition même de la tribu sur $\mathbb{P}Y$, que, pour tout $B \in \mathcal{Y}$, l'application $e_B \circ f_*$ est mesurable. Mais ceci est immédiat, puisque, pour toute probabilité p sur X , on a $(e_B \circ f_*)(p) = e_B(f_*(p)) = (f_*(p))(B) = p(\overset{-1}{f}(B)) = e_A(p)$, i.e $e_B \circ f_* = e_A$, où $A = \overset{-1}{f}(B)$; or e_A est mesurable puisque A l'est (car B et f sont supposés mesurables).

Remarquons en passant que, pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a $\mathbb{P}1_A = (1_A)_* = e_A$; en effet, a priori $(1_A)_* : \mathbb{P}X \longrightarrow \mathbb{P}\mathbf{2} : p \mapsto (1_A)_*(p)$, mais en identifiant $\mathbb{P}\mathbf{2}$ à $[0, 1]$ (toute probabilité $p \in \mathbb{P}\mathbf{2}$ s'identifiant à sa valeur $p(\{1\}) \in [0, 1]$ qui la détermine

entièrement), $(1_A)_*(p)$ s'identifie à $((1_A)_*(p))(\{1\}) = p(\overset{-1}{1_A}(\{1\})) = p(A) = e_A(p)$. On peut alors retrouver que $e_B \circ f_*$ est mesurable en écrivant $e_B \circ f_* = (1_B)_* \circ f_* = (1_B \circ f)_* = (1_A)_* = e_A$, où $A = \overset{-1}{f}(B)$.

App.IV.3. L'unité de la monade des probabilités est définie par $\eta''X : X \rightarrow \mathbb{P}X : x \mapsto \delta_x$; La naturalité de η'' résulte du fait que, pour tout $x \in X$ et tout $B \in \mathcal{Y}$, on a $(f_*(\delta_x))(B) = \delta_x(\overset{-1}{f}(B)) = 1$ ou 0 (selon que $x \in \overset{-1}{f}(B)$ ou non) $= 1$ ou 0 (selon que $f(x) \in B$ ou non) $= \delta_{f(x)}(B)$, i.e $f_*(\delta_x) = \delta_{f(x)}$.

La mesurabilité de $\eta''X$ résulte de celle des $e_A \circ \eta''X$, lorsque A parcourt \mathcal{X} . Or, pour tout $x \in X$, $(e_A \circ \eta''X)(x) = e_A(\eta''X(x)) = e_A(\delta_x) = \delta_x(A) = 1_A(x)$, i.e $e_A \circ \eta''X = 1_A$ qui est mesurable, puisque A l'est.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}X & \xrightarrow{f_*} & \mathbb{P}Y \\ \eta''X \uparrow & & \uparrow \eta''Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{P}\mathbb{P}X & \xrightarrow{(f_*)_*} & \mathbb{P}\mathbb{P}Y \\ \mu''X \downarrow & & \downarrow \mu''Y \\ \mathbb{P}X & \xrightarrow{f_*} & \mathbb{P}Y \end{array}$$

App.IV.4. La multiplication de la monade des probabilités est ainsi définie : $\mu''X : \mathbb{P}\mathbb{P}X \rightarrow \mathbb{P}X$ est l'application qui, à toute probabilité \hat{p} sur $\mathbb{P}X$, associe la probabilité $\mu''X(\hat{p})$ sur X qui, à toute partie mesurable A de X , associe $(\mu''X(\hat{p}))(A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d\hat{p} = \int_{\mathbb{P}X} e_A(p) \hat{p}(dp) = \int_{\mathbb{P}X} p(A) \hat{p}(dp)$.

Vérifions que, pour tout $\hat{p} \in \mathbb{P}\mathbb{P}X$, on a bien $\mu''X(\hat{p}) \in \mathbb{P}X$. Soit donc \hat{p} une probabilité sur $\mathbb{P}X$; d'abord $\mu''X(\hat{p})$ est positive (car e_A l'est) et $(\mu''X(\hat{p}))(X) = 1$ (car $e_X(p) = p(X) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{P}X$). Soit maintenant (A_n) une suite de parties mesurables de X , 2 à 2 disjointes et telles que $\bigcup A_n$ soit aussi mesurable; alors, utilisant le lemme 1 ci-dessus et le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1_{\bigcup_{k=0}^n A_k} = \sum_{k=0}^n 1_{A_k}$, on peut écrire $e_{\bigcup A_n} = e_{\sup_n \uparrow \bigcup_{k=0}^n A_k} = \sup_n \uparrow e_{\bigcup_{k=0}^n A_k} = \sup_n \uparrow e_{\sum_{k=0}^n 1_{A_k}} = \sup_n \uparrow \sum_{k=0}^n e_{A_k}$, de sorte que $(\mu''X(\hat{p}))(\bigcup A_n) = \int_{\mathbb{P}X} e_{\bigcup A_n} d\hat{p} = \int_{\mathbb{P}X} \sup_n \uparrow \sum_{k=0}^n e_{A_k} d\hat{p} = \sup_n \uparrow \sum_{k=0}^n \int_{\mathbb{P}X} e_{A_k} d\hat{p} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu''X(\hat{p}))(A_k)$, ce qui prouve la σ -additivité de $\mu''X(\hat{p})$.

Pour prouver la naturalité de μ'' , on doit vérifier l'égalité $f_* \circ \mu''X = \mu''Y \circ (f_*)_*$ pour toute application mesurable $f : X \rightarrow Y$. Soit donc $\hat{p} \in \mathbb{P}\mathbb{P}X$ et $B \in \mathcal{Y}$; alors $((f_* \circ \mu''X)(\hat{p}))(B) = (\mu''X(\hat{p}))(\overset{-1}{f}(B)) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d\hat{p}$ où $A = \overset{-1}{f}(B)$, et $((\mu''Y \circ (f_*)_*)(\hat{p}))(B) = \int_{\mathbb{P}Y} e_B d(f_*)_*(\hat{p}) = \int_{\mathbb{P}X} e_B \circ f_* d\hat{p}$; il suffit donc d'utiliser l'égalité $e_B \circ f_* = e_A$ établie ci-dessus dans IV.2.

Reste donc à prouver la mesurabilité de $\mu''X$ pour tout espace mesurable X ; par définition de la tribu sur $\mathbb{P}X$, cela revient à la mesurabilité des $e_A \circ \mu''X$, lorsque A parcourt la tribu \mathcal{X} donnée sur X . Or, pour tout $\hat{p} \in \mathbb{P}\mathbb{P}X$, on a $(e_A \circ \mu''X)(\hat{p}) = e_A(\mu''X(\hat{p})) = (\mu''X(\hat{p}))(A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d\hat{p} = e_{e_A}(\hat{p})$ (voir IV.1 ci-dessus pour la définition des e_f), de sorte que $e_A \circ \mu''X = e_{e_A}$; ceci prouve la mesurabilité de $e_A \circ \mu''X$, puisque e_A est mesurable (par définition de la tribu sur $\mathbb{P}X$) et bornée (voir le lemme 1).

Avant de quitter ce paragraphe, établissons le lemme suivant dont on se servira dans IV.5 :

Lemme 2 : *Pour tout $f \in \mathcal{M}es_b(X)$ et tout $\hat{p} \in \mathbb{P}\mathbb{P}X$, l'application e_f est \hat{p} -intégrable et l'on a l'égalité :*

$$\int_X f d(\mu''X(\hat{p})) \stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{P}X} e_f d\hat{p}$$

Preuve : Par le lemme 1, on sait que l'application $e_f : \mathbb{P}X \longrightarrow \mathbf{R}$ est mesurable. De plus, par définition même de la probabilité $\mu''X(\hat{p})$, l'égalité $\stackrel{*}{=}$ est vraie lorsque $f = 1_A$, où $A \in \mathcal{X}$ (puisque $e_{1_A} = e_A$). Il en résulte immédiatement, par linéarité de l'intégrale, que l'égalité $\stackrel{*}{=}$ est vraie lorsque f est étagée. Elle est donc encore vraie lorsque f est mesurable bornée positive, puisqu'elle s'écrit alors $f = \sup_n^\dagger f_n$, où les f_n sont étagées (on utilise le théorème de convergence monotone). Le passage au cas où f est seulement mesurable bornée n'est qu'une formalité en écrivant $f = f^+ - f^-$ (on a bien sûr exploité les propriétés de l'application *Eval* du lemme 1). D'où le résultat. \square

App.IV.5. Prouvons maintenant que $T_{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \eta'', \mu'')$ est bien une monade.

- L'égalité $\mu''X \circ \eta''\mathbb{P}X = id_{\mathbb{P}X}$ résulte du fait que, pour tout $p \in \mathbb{P}X$, on a $\mu''X(\eta''\mathbb{P}X(p)) = p$; en effet, pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a $(\mu''X(\eta''\mathbb{P}X(p)))(A) = (\mu''X(\delta_p))(A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d\delta_p = e_A(p) = p(A)$.

- L'égalité $\mu''X \circ \mathbb{P}\eta''X = id_{\mathbb{P}X}$ résulte du fait que, pour tout $p \in \mathbb{P}X$, on a $\mu''X((\eta''X)_*(p)) = p$; en effet, pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a $(\mu''X((\eta''X)_*(p)))(A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d(\eta''X)_*(p) = \int_X e_A \circ \eta''X dp = p(A)$, puisque $e_A \circ \eta''X = 1_A$ (voir IV.3 ci-dessus).

- L'égalité $\mu''X \circ \mu''\mathbb{P}X = \mu''X \circ \mathbb{P}\mu''X$ résulte du fait que, pour tout $\hat{p} \in \mathbb{P}\mathbb{P}X$, on a $\mu''X(\mu''\mathbb{P}X(\hat{p})) = \mu''X((\mu''X)_*(\hat{p}))$; en effet, pour tout $A \in \mathcal{X}$, on a :

- d'une part $(\mu''X(\mu''\mathbb{P}X(\hat{p}))) (A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d(\mu''\mathbb{P}X(\hat{p})) \stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{P}\mathbb{P}X} e_{e_A} d\hat{p} = \int_{\mathbb{P}\mathbb{P}X} e_{e_A}(\hat{p}) \hat{p}(d\hat{p}) = \int_{\mathbb{P}\mathbb{P}X} (\int_{\mathbb{P}X} e_A d\hat{p}) \hat{p}(d\hat{p})$ (la dernière égalité résultant de la définition des e_f , et l'égalité $\stackrel{*}{=}$ du lemme 2 ci-dessus) ;

- d'autre part $(\mu''X((\mu''X)_*(\hat{p}))) (A) = \int_{\mathbb{P}X} e_A d(\mu''X)_*(\hat{p}) = \int_{\mathbb{P}\mathbb{P}X} e_A \circ \mu''X d\hat{p} = \int_{\mathbb{P}\mathbb{P}X} e_A(\mu''X(\hat{p})) \hat{p}(d\hat{p}) = \int_{\mathbb{P}\mathbb{P}X} (\mu''X(\hat{p}))(A) \hat{p}(d\hat{p}) = \int_{\mathbb{P}\mathbb{P}X} (\int_{\mathbb{P}X} e_A d\hat{p}) \hat{p}(d\hat{p})$.

App.V. La loi distributive $\tau : T_M/T_{\mathbb{P}}$

Elle est définie par les $\tau X : M \times \mathbb{P}X \longrightarrow \mathbb{P}(M \times X) : (a, p) \mapsto \delta_a \otimes p$, pour tout espace mesurable X .

App.V.1. Pour la naturalité de τ , on vérifie la commutativité du diagramme suivant pour toute application mesurable $f : X \rightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{P}Y & \xrightarrow{\tau Y} & \mathbb{P}(M \times Y) \\ M \times f_* \uparrow & & \uparrow (M \times f)_* \\ M \times \mathbb{P}X & \xrightarrow{\tau X} & \mathbb{P}(M \times X) \end{array}$$

On doit donc vérifier que, pour tout $(a, p) \in M \times \mathbb{P}X$, on a $\delta_a \otimes f_*(p) = (M \times f)_*(\delta_a \otimes p)$. Or, pour tout pavé mesurable $A \times B$ de $M \times Y$, on a, d'une part $(\delta_a \otimes f_*(p))(A \times B) = \delta_a(A)(f_*(p))(B) = \delta_a(A)p(f^{-1}(B))$, et, d'autre part $((M \times f)_*(\delta_a \otimes p))(A \times B) = (\delta_a \otimes p)((M \times f)(A \times B)) = (\delta_a \otimes p)(A \times f^{-1}(B)) = \delta_a(A)p(f^{-1}(B))$.

La mesurabilité de τX résulte de celle des $e_{A \times B} \circ \tau X$, pour tout pavé mesurable $A \times B$ de $M \times X$. Or, pour tout $(a, p) \in M \times \mathbb{P}X$, on a $(e_{A \times B} \circ \tau X)(a, p) = e_{A \times B}(\delta_a \otimes p) = (\delta_a \otimes p)(A \times B) = \delta_a(A)p(B) = 1_A(a)e_B(p)$; la mesurabilité de $e_{A \times B} \circ \tau X$ résulte donc directement de celle de A et de B .

App.V.2. Reste à vérifier les axiomes (B_i) (voir App.l.5).

(B_1) : L'égalité $\tau X \circ (M \times \eta'' X) = \eta''(M \times X)$ résulte du fait que, pour tout $(a, x) \in M \times X$, on a $\delta_a \otimes \delta_x = \delta_{(a,x)}$.

(B_2) : L'égalité $\tau X \circ \eta \mathbb{P}X = \mathbb{P} \eta X$ résulte du fait que, pour toute probabilité p sur X et tout pavé mesurable $A \times B$ de $M \times X$, on a $((\eta X)_*(p))(A \times B) = p(\eta X^{-1}(A \times B)) = 1_A(e)p(B) = \delta_e(A)p(B) = (\delta_e \otimes p)(A \times B)$, la seconde égalité résultant du fait que $(\eta X)(A \times B) = \{x \in X \mid (e, x) \in A \times B\} = B$ ou \emptyset , selon que $e \in A$ ou non.

(B_3) : L'égalité $\tau X \circ (M \times \mu'' X) = \mu''(M \times X) \circ \mathbb{P} \tau X \circ \tau \mathbb{P}X$ résulte du fait que, pour tout $(a, \hat{p}) \in M \times \mathbb{P} \mathbb{P}X$ et tout pavé mesurable $A \times B$ de $M \times X$, on a, en posant $p = \mu'' X(\hat{p})$:

- d'une part $(\tau X((M \times \mu'' X)(a, \hat{p}))) (A \times B) = (\delta_a \otimes p)(A \times B) = \delta_a(A)p(B)$;

- d'autre part $(\mu''(M \times X)((\tau X)_*(\tau(\mathbb{P}X)(a, \hat{p})))) (A \times B) = (\mu''(M \times X)((\tau X)_*(\delta_a \otimes \hat{p}))) (A \times B) = \int_{\mathbb{P}(M \times X)} e_{A \times B} d(\tau X)_*(\delta_a \otimes \hat{p}) = \iint_{M \times \mathbb{P}X} e_{A \times B} \circ \tau X d(\delta_a \otimes \hat{p}) = \iint_{M \times \mathbb{P}X} (e_{A \times B}(\delta_b \otimes q))(\delta_a \otimes \hat{p})(dbdq) = \iint_{M \times \mathbb{P}X} ((\delta_b \otimes q)(A \times B))(\delta_a \otimes \hat{p})(dbdq) = \iint_{M \times \mathbb{P}X} \delta_b(A)q(B)(\delta_a \otimes \hat{p})(dbdq) = \int_{\mathbb{P}X} \delta_a(A)q(B)\hat{p}(dq) = \delta_a(A) \int_{\mathbb{P}X} q(B)\hat{p}(dq) = \delta_a(A) \int_{\mathbb{P}X} e_B(q)\hat{p}(dq) = \delta_a(A)p(B)$.

(B_4) : L'égalité $\tau X \circ \mu \mathbb{P}X = \mathbb{P} \mu X \circ \tau(M \times X) \circ (M \times \tau X)$ résulte du fait que, pour tout $(a, b, p) \in M \times M \times \mathbb{P}X$ et tout pavé mesurable $A \times B$ de $M \times X$, on a $((\mu X)_*(\tau(M \times X)((M \times \tau X)(a, b, p)))) (A \times B) = ((\mu X)_*(\tau(M \times X)(a, \delta_b \otimes p))) (A \times B) = ((\mu X)_*(\delta_a \otimes (\delta_b \otimes p))) (A \times B) = (\delta_{(a,b)} \otimes p)(\mu X^{-1}(A \times B)) \stackrel{**}{=} \delta_{ab}(A)p(B) = (\delta_{ab} \otimes p)(A \times B) = (\tau X(\mu \mathbb{P}X(a, b, p))) (A \times B)$, l'égalité

** résultant du fait que $\mu_X^{-1}(A \times B) = \{(c, d, x) \in M \times M \times X \mid cd \in A \text{ et } x \in B\} = \{(c, d) \in M \times M \mid cd \in A\} \times B$.

Remerciements : Je tiens à remercier Jacques Penon pour les nombreuses discussions stimulantes que j'ai eues avec lui au cours de la rédaction de ce texte, ainsi que Philippe Bougerol pour m'avoir accordé du temps en répondant avec précision à toutes mes questions sur des points délicats de la théorie des probabilités.

Bibliographie

[Beck 69] J.BECK : Distributive laws, in Seminar on triples and categorical homology theory.119-140. LNM 80. Springer. 1969.

[Ben 67] J.BENABOU : Introduction to bicategories, in Report of the Midwest category seminar. 1-77. LNM 47, Springer 1967.

[Bu 86] A.BURRONI : Récursivité graphique (1ère partie) : catégorie des fonctions récursives formelles. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*. 49-79. Vol XXVII-1, 1986.

[Bu' 74] E.BURRONI : Algèbres non déterministes et D -catégories. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*. 417-475. Vol XIV-4, 1973.

[Giry 81] M.GIRY : A categorical approach to probability theory, in Categorical aspects of topology and analysis. 68-85, LNM 915. 1981.

[McL 72] S.MAC LANE : Categories for the working mathematician. GMT 5, Springer. 1972.

[Nev 64] J.NEVEU : Calcul des probabilités. Masson. 1964.

[Star 72] P.H.STARKE : Abstract automata. North-Holland. 1972.

[Tull 71] O.DE LA TULLAYE : L'intégration considérée comme l'algèbre d'un triple. Rapport de Stage de D.E.A. Manuscrit. 1971.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UNIVERSITÉ PARIS 7, CASE 7012, 2, PLACE JUSSIEU, 75251 PARIS CEDEX 05 FRANCE.

E-mail address: eburroni@math.jussieu.fr

L'Algèbre Généralisée

J. M. E. Hyland

January 25, 2007

En hommage à Albert Burroni en reconnaissance de son influence.

1 Introduction

On peut commencer avec une question peut être stupide.

L'algèbre: qu'est-ce que c'est?

Ou une meilleure question.

Quel genre de choses est une théorie algébrique?

Le point de vue des esquisses, qui a été beaucoup étudié en France, concerne la logique générale; et des esquisses 'avec produits' correspondent aux théories algébriques. On a donc une réponse moderne.

L'algèbre, c'est donnée par les théories de Lawvere.

Mais on peut trouver des points de vue plus raffinés en variant les deux éléments suivants : les arités (et comment combiner les arités), et les arènes d'où les théories algébriques tirent leurs modèles. On peut penser par exemple aux théories en catégories symétriques monoïdales.

2 Une réponse d'après Burroni

La réponse, avec laquelle nous commençons, vient d'un texte important de Burroni [3], qui est devenu essentiel pour les catégories de dimension plus haute. C'est peut être un texte paru avant son heure. Il vient juste d'être découvert (ou redécouvert) dans le monde anglophone.

On ne peut exagérer la richesse de ce texte qui contient entre autres beaucoup de nouveautés mathématiques, les fondements d'une théorie moderne des catégories de dimension supérieure (voir par exemple Leinster [9] et [10]).

2.1 La réponse de T -catégories

Dans [3], Burroni introduit la notion de la T -catégorie. Il présente de nombreux points de vue, et ici, je décris seulement celui qui est le plus important pour l'algèbre généralisée.

Burroni prends une monade sur une catégorie \mathcal{E} admettant des produits fibrés finis (et munie d'un choix de ces produits finis). Il construit une structure $\text{Sp}(T)$ qui a

pour objects les objects de \mathcal{E} ;
pour 1-morphismes les T -spans $(TA \longleftarrow R \longrightarrow B)$ dans \mathcal{E} ;
pour 2-morphismes les morphismes naturelles entre les T -spans.

Il montre que cette structure est une 2-catégorie lax. (Burroni [3] dit 'pseudo-catégorie', mais je préfère utiliser une terminologie qui se conforme à la terminologie de Blackwell-Kelly-Power [2].) (Si T est une monade cartésienne, $\text{Sp}(T)$ est donc une bicatégorie de Benabou [1], et ce cas est très important pour les catégories de dimension supérieure.)

Pour une 2-catégorie lax, on a la notion d'une monoïde (ou peut être monade, parce que les nomades sont les monoïdes dans la 2-catégorie des catégories); et les monoïdes sont exactement les théories algébriques structurées par T , (les T -théories).

Si

$$(TA \xleftarrow{s} R \xrightarrow{t} A)$$

est une T -théorie, c'est-à-dire une monoïde dans la 2-catégorie lax, R est donc l'objet des termes de la théorie; s donne la source (ou domaine) et t le but (ou co-domaine) des termes. Les identités sont données par l'unité de T

et les compositions des termes par la multiplication de T (voir Leinster [9] pour les détails).

2.2 Problèmes avec les niveaux

La réponse des T -catégories paraît étrange. Comme Kelly-Power l'explique dans [8], les théories de Lawvere généralisées d'une sorte seulement sont équivalentes aux monades (finitaires). Donc pour comprendre cette notion d'algèbre, il faut déjà comprendre une autre notion d'algèbre.

Considérons les cas plus simples des T -algèbres. Si on prend pour T la monade des listes (la monade pour la théorie des monoïdes) puis une T -algèbre est une opérade simple (sans les actions des groupes symétriques) ou plaine. On dit plaine parce qu'on peut représenter les compositions des opérations d'une telle opérade par un arbre qui se situe dans la plaine avec les arêtes incidentes à chaque sommet dans l'ordre indexé. Soit

$$(\mathbb{N} = T(1) \longleftarrow P \longrightarrow 1)$$

une opérade. On obtient donc une monade T_P où

$$T_P(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} X^n \times P(n),$$

est tel que la catégorie $T_P\text{-Alg}$, des algèbres pour la monade T_P , s'identifie à la catégorie des algèbres pour l'opérade P .

Rappelons maintenant la notion de 'slicing' de Baez et Dolan [0] (voir aussi Cheng [4]). Il y a une monade T^a (des arborescences) sur Ens/\mathbb{N} , la catégorie des ensembles \mathbb{N} -indexés, tel que $T^a\text{-Alg}$ s'identifie à la catégories des opérades plaines. Mais la monade T^a n'est pas aussi simple que T_p : c'est à dire, T^a est donné par une opérade usuelle, mais pas par une opérade plaine.

Pour trouver une bonne théorie, il faut considérer les multicatégories symétriques. Nous utiliserons encore les idées de Burroni [3]. Soit Prof la bicatégorie des profoncteurs de Benabou [1]. On prend sur Prof une pseudo-co-monade Σ , qui vient de la notion d'une catégorie symétrique strictement monoïdale. (La notion d'une pseudo-co-monade est déjà dans l'article de Burroni [3]!). Puis on a la bicatégorie Prof_Σ de Kleisli pour Σ . Une monoïde sur

un objet discret (un ensemble) est une multicatégorie symétrique. Donc une multicatégorie symétrique \mathcal{M} a

objets A, B, C, \dots ;
ensembles de multiflèches (multimorphismes) $\mathcal{M}(A_1, \dots, A_n; B)$
 avec les actions des symmétries manifestes (par exemple, S_2
 acte sur $\mathcal{M}(A, A, B; C)$);
identités et compositions.

Elles sont utilisées par Cheng [5] pour unifier les théories des opétopes.

3 Une autre vision d’algèbre

La réponse de(s) T -catégorie(s) démontre qu’il est possible d’avoir de nombreuses notions d’arité en algèbre. Ici, nous prendrons un point de vue plus abstrait et nous trouverons des notions d’algèbre encore plus subtiles.

Soit \mathcal{M} une multi-catégorie symétrique. On doit penser que les objets de \mathcal{M} sont les arités généralisées et les flèches de \mathcal{M} sont les moyennes des compositions des arités diverses. Soit $\text{Alg}(\mathcal{M})$ la catégorie de \mathcal{M} -algèbres (models de \mathcal{M}) soit en **Ens** (la catégorie des ensembles), soit en **Vec** (la catégorie des espaces vectoriels), soit en une catégorie symétrique monoïdale. $\text{Alg}(\mathcal{M})$ est donc la catégorie des opérades (ou si on veut des multi-catégories) généralisées [12].

Donnons des exemples. (Il faut rappeler la signification de la notion ‘plainaire’ pour les arbres ou arborescences: dans tous les exemples, les arêtes incidentes à chaque sommet sont indexées.)

\mathcal{M}	$\text{Alg}(\mathcal{M})$
Arborescences plainaires	Opérades simples
Arborescences	Opérades symétriques
Arbres plainaires	Opérades simples cycliques
Arbres	Opérades cycliques
Graphes connexés	Opérades modulaires
Graphes	Opérades (encore plus) modulaires.

De nombreuses notions d’algèbre ont donc des représentations graphiques. (= peuvent se représenter graphiquement). Ces notions sont très importantes

dans le cas additif, c'est-à-dire enrichies dans les groupes abéliens. Par exemple, on peut très facilement montrer que les algèbres de Lie (en Vec sont données par une opérade cyclique. (Getzler et Kapranov [6] ont montré que les algèbres de Poisson sont aussi données par une opérade cyclique: ceci est beaucoup plus subtile.)

On a donc une relation très intéressante entre les opérades cycliques et les opérades modulaires; relation qui permet de mieux comprendre la signification de l'algèbre des "chord diagrams" et des "chinese character diagrams" [7]. D'un autre côté, on peut préciser la preuve diagrammatique de Rost [11] qui donne les dimensions 1, 2, 4, 8 pour les 'compositions algèbres' (Théorème de Hurwitz).

Conclusion

J'espère avoir donné une impression de la richesse des intuitions concernant l'algèbre qu'on trouve dans le texte ancien de Burroni [3]. Je connais bien sûr d'autres oeuvres plus récentes d'Albert Burroni qui concernent les catégories de dimension supérieure; mais je ne les comprends pas très bien. Peut-être un de ces jours prochains? Pour le moment présent, je ai parlé de quelque chose de remarquable que je comprends un peu.

References

- [0] J. C. Baez and J Dolan. Higher-dimensional algebra III: n-categories and the algebra of opetopes. *Advances in Math.* **135**, 1998, 145-206.
- [1] J. Benabou. Introduction to bicategories. *Reports of the Midwest Category Seminar*, Lecture Notes in Mathematics **47**, Springer, 1967, 1-77.
- [2] R. Blackwell, G. M. Kelly and A. J. Power. Two-dimensional monad theory. *J. Pure Appl. Alg.* **59**, 1989, 1-41.
- [3] A. Burroni. T -catégories (Catégories dans un triple). *Cah. Top. Geom. Diff.* **12**, 1971, 215-321.
- [4] E. Cheng. Weak n -categories: opetopic and multitopic foundations. To appear in *J. Pure Appl. Alg.*

- [5] E. Cheng. Weak n -categories: comparing opetopic foundations. To appear in *J. Pure Appl. Alg.*
- [6] E. Getzler and M.M. Kapranov. Cyclic operads and cyclic homology. In *Geometry, topology and physics*. International Press, 1995, 167-201.
- [7] V. Hinich and A. Vaintrob. Cyclic operads and algebras of chord diagrams. Math. QA/0005197.
- [8] G. M. Kelly and A. J. Power. Adjunctions whose counits are coequalizers, and presentations of finitary enriched monads. *J. Pure Appl. Alg.* **89**, 1993,163-179.
- [9] T. Leinster. Operads in Higher-dimensional category theory. Math. CT/00111106.
- [10] T. Leinster. A survey of definitions of n -category. *TACS*, **10**, 2002, 1-70.
- [11] M. Rost. On the dimension of a composition algebra. *Doc. math.* **1**, 1996, 209-214.
- [12] J. Templeton. Self-dualities, graphs and operads. PhD. Dissertation, Cambridge, 2003.

Le Formel et l'Insignifiant

Vincent Danos
CNRS & Université Paris VII

La logique mathématique s'attache à comprendre dans quels langages se font les raisonnements et les constructions mathématiques. Bien qu'on trouve les mathématiques impliquées dans une grande variété de scénarios scientifiques, en un certain sens, celles-ci se résument à une suite de formules écrites dans un symbolisme très simple et suivant des règles bien spécifiées.

C'est ce qui a permis de construire des systèmes de règles pour l'arithmétique et la géométrie euclidienne, ainsi que des formalismes à vocation universelle comme la théorie des ensembles. On s'est mis à comparer ces systèmes et à en discuter les axiomes. Dans un travail progressif d'exploration, la logique a rendu visible le langage mathématique. Mais du même coup elle a ouvert une possibilité encore largement inexplorée: celle de la formalisation en fait des mathématiques.¹

Cependant, et bien que l'ingénierie des systèmes de preuves formelles se développe rapidement pour répondre à la demande de logiciel certifié dans les applications informatiques, force est de constater que seule une infime partie de la bibliothèque mathématique a été effectivement formalisée et encore ne s'agit-il que de débuts de théories mathématiques élémentaires.

Une raison qu'on peut avancer pour expliquer ce désintérêt apparent des mathématiciens est que la formalisation prend beaucoup de temps et n'apprend en général pas grand chose de plus que la démonstration informelle. On y trouve une garantie de la correction de la preuve, mais c'est au prix de beaucoup de détails qui n'enrichissent pas vraiment la compréhension d'ensemble. Thom a une formule cinglante: "tout ce qui est formel est insignifiant".

L'accueil fait à la solution du fameux problème des quatre couleurs illustre bien cette méfiance à l'égard du formel. La question est de savoir si quatre couleurs suffisent pour colorier une carte de sorte que deux pays limitrophes aient des couleurs distinctes. Cette question combinatoire d'apparence anodine, va conduire après des années de recherches à un objet mathématique très particulier.

La preuve due à Appel et Haken procède en deux étapes. On commence par identifier un ensemble de 1400 configurations qui apparaissent dans tout problème de coloriage. Ensuite on montre qu'elles sont si "faciles" à colorier qu'elles permettent de se ramener à une question plus simple. On dit que ces configurations sont réductibles. Mais la seule méthode connue pour prouver la réductibilité est de faire complètement le calcul. Sur les ordinateurs de l'époque,

¹Quelques symboles pour représenter les opérateurs logiques du langage ordinaire, "et", "ou", "non", "quelque soit", "il existe", notés ci-dessous \wedge , \vee , \neg , \forall et \exists suffisent au discours mathématique. On peut par exemple écrire la formule $div(x, y) = \exists d(x = d \times y)$, qui correspond à la phrase familière "y est un diviseur de x". De même $prem(x) = \forall y(y = 1 \vee y = x \vee \neg div(x, y))$ dit que x n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même, autrement dit que "x est premier". Le langage utilisé par la théorie des ensembles, outre les opérateurs logiques ci-dessus, introduit l'égalité et l'appartenance; il est suffisant en principe pour retranscrire toutes les mathématiques. Dans la notation devenue traditionnelle on écrit $x \in y$ pour "x appartient à y". L'un des axiomes fondamentaux de cette théorie dit que deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments: $(x = y) \vee \exists z(\neg(z \in x \wedge z \in y) \wedge (z \in x \vee z \in y))$.

en 1976, Appel et Haken durent attendre quatre-vingt-dix jours pour obtenir la réponse.

Les critiques de cette preuve s'attardent finalement assez peu sur le fait que l'usage de l'ordinateur pourrait rendre la preuve douteuse. C'est l'intelligibilité de la preuve qui est mise en question plus que sa correction. Un spécialiste du sujet avait déclaré quelques années plus tôt, à propos d'une éventuelle solution par ordinateur, qu'il préférerait "ne pas voir ça". Et en effet, on ne peut pas comprendre l'argument complet, parce qu'on ne peut même pas le lire. Et d'ailleurs, on n'écrit jamais cette preuve, on se contente de vérifier par des calculs qu'elle existe. En fait, les mathématiciens entretiennent un rapport ambivalent avec le calcul: trop de calcul et on risque la perte d'intelligibilité, trop peu et on n'avance plus.

Ici, il est utile de préciser deux points: par calcul, on entend calcul exact ou symbolique, par opposition au calcul numérique qui ne donne que des résultats approchés; d'autre part, même lorsqu'un calcul est possible, il n'est pas forcément faisable parce que l'espace de recherche peut être trop grand. Quand on a le choix, on préfère toujours une démonstration qui fait moins de calculs et qui a recours à des abstractions. C'est une stratégie efficace qui permet de résoudre le problème avec plus de concision et plus de généralité. Le théorème des quatre couleurs marque les limites de cette stratégie.

Lorsqu'Euler montre que $2^{32} + 1$ n'est pas premier, il écrit $5 \cdot 2^7 + 1 = 641 = 5^4 + 2^4$ et on se contente de le vérifier.² Pourtant on pourrait taxer ce calcul d'insignifiance. Et si la "signifiance" de ce calcul est à chercher dans le reste de la preuve dont il est la cheville ouvrière, alors on ne voit plus pourquoi ne pas justifier aussi les très longs calculs du théorème des quatre couleurs.

Le fait est que notre appréhension de la démarcation entre l'évident et l'incompréhensible est en rapport avec nos facultés de calcul. On est très tenté, en l'absence de définition objective de cette démarcation, de ne voir dans la réfutation philosophique de l'intérêt du théorème des quatre couleurs, qu'une crispation sur un point de vue particulier sur "ce qui est évident".

On touche là à une raison subtile qui pourrait décider le mathématicien à la formalisation: lui montrer qu'il peut domestiquer un espace plus grand d'évidence. La mise au point d'environnements de démonstration et de calcul formel posent de nombreuses questions logiques et algorithmiques qui sont au

²Fermat s'intéresse à la suite des nombres entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$ dont les cinq premiers sont 3, 5, 17, 257 et 65537. En remarquant que ces cinq entiers sont premiers et que tous les F_n sont premiers entre eux, Fermat s'hardit à conjecturer que tous les F_n sont premiers. Quelques cent ans plus tard Euler, en 1732, remarque que:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 5 \cdot 2^7 + 1 = 641 \\ &= 5^4 + 2^4 = y \end{aligned}$$

divise à la fois $5^4 \cdot 2^{28} - 1 = x^4 - 1$ et $5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32} = y \cdot 2^{28}$ et donc leur différence, soit F_5 le sixième nombre de Fermat. Il s'ensuit que $F_5 = 2^{32} + 1$ n'est pas premier.

Pour l'anecdote, l'état actuel de nos connaissances est qu'on connaît 187 nombres de Fermat non-premiers et toujours seulement 5 premiers. Il faut s'attarder un moment sur l'argument d'Euler pour comprendre qu'il n'est *pas* un pur calcul: en fait la seule partie calculatoire est l'équation centrale $5 \cdot 2^7 + 1 = 641 = 5^4 + 2^4$ et le reste est une manipulation symbolique agrémentée d'un lemme élémentaire de divisibilité. À l'époque de Fermat, et encore à l'époque d'Euler, le calcul systématique des éventuels diviseurs de $2^{32} + 1$ (soit 4.294.967.297) est hors de portée. Euler et ses contemporains n'ont d'autre choix que l'élégance et on ne peut s'empêcher de penser à la définition de l'intelligence selon Piaget: "ce à quoi on a recours quand on ne sait plus quoi faire d'autre". Notre horizon de calcul a prodigieusement reculé depuis, mais aussi loin qu'il aille il y aura des nombres de Fermat au-delà.

centre d'un développement moderne de la logique que les anglo-saxons appellent "Logic in Computer Science" et tous ces problèmes ne sont pas résolus tant s'en faut. Ces outils promettent cependant déjà de requalifier complètement le niveau d'évidence que la preuve mathématique pourra se permettre.

Le moment crucial de la preuve du théorème des quatre couleurs, où celle-ci va basculer dans le calcul, donne une bonne occasion de saisir à quoi pourrait ressembler ce nouveau type de pratique mathématique. À cet instant de la preuve, on sait qu'il ne reste plus qu'à vérifier la réductibilité d'un certain nombre de configurations. Pour ce faire on associe à la propriété de réductibilité $R(x)$ une fonction r qui va décider la propriété R , c'est-à-dire telle que pour toute configuration c , si $r(c) = 0$ alors $R(c)$. Le problème de *démontrer* $R(c)$ pour nos configurations n'est plus maintenant que de *calculer* $r(c)$ pour chacune d'elle et de vérifier que la réponse est toujours 0. Pour conclure, il faut aussi démontrer que l'"oracle" r donne des réponses correctes, c'est-à-dire que la fonction r décide bien la propriété au sens particulier qu'on vient de définir ci-dessus.

On a remplacé de la démonstration par du calcul. Et pour ce faire, la seule rigueur n'est plus suffisante, il faut complètement formaliser le problème dont on veut faire une vérification par le calcul. Le formel agit ici comme un langage qui permet d'étendre nos capacités naturelles de calcul. Et ce qu'on doit penser de cette preuve de réductibilité n'est plus si clair. Dira-t-on toujours qu'elle est incompréhensible ou bien plutôt qu'elle est évidente, puisqu'après tout elle n'est qu'un simple calcul !

Reste quand même le second énoncé qui concerne la correction de notre oracle r , et celui-ci n'est pas de nature habituelle, car r n'est pas un entier ou un réel et ce n'est pas non plus une fonction contrairement à ce qu'on a laissé entendre. Ce n'est pas un objet mathématique ordinaire, c'est un *programme*. Il faut donc pour faire place dans un environnement formel à ces raisonnements se munir d'une logique dans laquelle on puisse prouver des propriétés de programmes.

Puissance de calcul, théorie de la preuve de programme et ingénierie des systèmes de démonstrations formelles renouvellent les enjeux de la logique en rendant visible non plus seulement le langage traditionnel des mathématiques, mais celui de sa part inavouée, le calcul. Cette nouvelle sorte de logique pourrait conduire à une extension de la pratique mathématique par la programmation et la preuve de programme. Si tel est le cas, la preuve pour l'instant si singulière du théorème des quatre couleurs en aura été un signe avant-coureur.

Homotopie et catégories

Georges Maltsiniotis

Albert Burroni a participé au groupe de travail “Algèbre et topologie homotopiques” depuis sa création, en intervenant régulièrement de façon pertinente. Ceci n’est pas un hasard. En effet, la théorie de l’homotopie peut être fondée en termes de la théorie des catégories. Le rapport entre la théorie de l’homotopie et les ∞ -groupoïdes non stricts, conjecturé par Grothendieck, est bien connu, quoique pas entièrement élucidé. Ce n’est pas cet aspect qui va nous intéresser ici. Ce sera un autre point de vue, également initié par Grothendieck, mais aussi par Quillen, basé uniquement sur les catégories ordinaires, les 1-catégories.

On note Δ_m l’ensemble

$$\Delta_m = \{0, 1, \dots, m\} \quad , \quad m \geq 0 \quad ,$$

ordonné par l’ordre naturel, ainsi que la catégorie correspondante. On désigne par Δ la sous-catégorie pleine de la catégorie Cat des petites catégories, dont les objets sont les Δ_m , $m \geq 0$, et par $\widehat{\Delta}$ la catégorie des *ensembles simpliciaux*, préfaisceaux sur Δ :

$$\widehat{\Delta} = \underline{\text{Hom}}(\Delta^\circ, \text{Ens}) \quad .$$

On rappelle qu’on a un foncteur pleinement fidèle, le foncteur *nerf*

$$N : Cat \longrightarrow \widehat{\Delta} \quad , \quad C \longmapsto (\Delta_m \mapsto \text{Hom}_{Cat}(\Delta_m, C)) \quad .$$

D’autre part, on a un foncteur *simplexe standard*, à valeurs dans la catégorie des espaces topologiques

$$\Delta \longrightarrow Top \quad , \quad \Delta_m \longmapsto \Delta_m = \{(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum x_i = 1\} \quad ,$$

d’où un unique foncteur (à isomorphisme unique près) le prolongeant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Delta} & \xrightarrow{|\cdot|} & Top \\ \text{Yoneda} \uparrow & \nearrow \text{simplexe standard} & \\ \Delta & & \end{array}$$

et commutant aux limites inductives. On note

$$\mathbf{B} : Cat \longrightarrow Top \quad ,$$

et on appelle foncteur *espace classifiant*, le foncteur composé

$$Cat \xrightarrow{N} \widehat{\Delta} \xrightarrow{|\cdot|} Top \quad , \quad \mathbf{B}(A) = |N(A)| \quad , \quad A \in \text{Ob } Cat \quad .$$

On dit qu'un foncteur $u : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}at$ est une *équivalence faible* si $\mathbf{B}(u)$ est une équivalence d'homotopie, et on note \mathcal{W}_∞ la classe des équivalences faibles. On montre que le foncteur espace classifiant induit une équivalence de catégories de la catégorie localisée $\mathcal{C}at[\mathcal{W}_\infty^{-1}]$ (obtenue de $\mathcal{C}at$ en inversant formellement les équivalences faibles) avec la catégorie homotopique des CW-complexes. Ainsi, il suffit de donner une caractérisation purement catégorique de \mathcal{W}_∞ , pour obtenir une définition catégorique de la catégorie homotopique des CW-complexes.

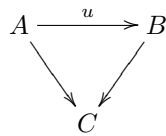
Quillen démontre deux théorèmes importants relatifs à la classe des flèches \mathcal{W}_∞ , qu'il appelle théorème A et théorème B [Qu].

Théorème A (de Quillen). *Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Si pour tout objet b de B , le foncteur induit $u/b : A/b \rightarrow B/b$ est une équivalence faible, il en est de même de u .*

Ici A/b désigne la comma catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : u(a) \rightarrow b)$, $a \in \text{Ob } A$, $p \in \text{Fl } B$.

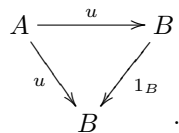
Ce théorème admet une version relative démontrée par D.-C. Cisinski [Ci2], en généralisant la preuve de Quillen.

Théorème A (relatif). *Soit*



un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$. Si pour tout objet c de C , le foncteur induit $u/c : A/c \rightarrow B/c$ est une équivalence faible, alors il en est de même de u .

Le théorème A de Quillen correspond au cas particulier du triangle commutatif



Grothendieck définit la notion de *localisateur fondamental* comme étant une classe \mathcal{W} de flèches de $\mathcal{C}at$ satisfaisant aux conditions suivantes [PS].

L1) La classe \mathcal{W} est faiblement saturée :

- a) les identités sont dans \mathcal{W} ;
- b) si dans un triangle commutatif deux des trois flèches sont dans \mathcal{W} , il en est de même de la troisième;
- c) si $i : X' \rightarrow X$ et $r : X \rightarrow X'$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}at$ tels que $ri = 1_{X'}$, et si ir est dans \mathcal{W} , alors r est aussi dans \mathcal{W} .

L2) Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors l'unique foncteur $A \rightarrow e$ de A vers la catégorie ponctuelle e est dans \mathcal{W} .

L3) La classe \mathcal{W} satisfait au théorème A relatif : si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ & \searrow & \swarrow \\ & C & \end{array}$$

est un triangle commutatif, et si pour tout objet c de C le foncteur induit par u , $u/c : A/c \rightarrow B/c$ est dans \mathcal{W} , alors u est aussi dans \mathcal{W} .

EXEMPLE. La classe $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$ est un localisateur fondamental (la condition L1 est évidente, la condition L2 résulte de l'observation qu'un morphisme de foncteurs entre petites catégories

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \Downarrow \alpha & \\ & v & \end{array}$$

définit une homotopie de $\mathbf{B}(u)$ vers $\mathbf{B}(v)$, et la condition L3 est le théorème A relatif).

Grothendieck a conjecturé l'assertion suivante [PS], démontrée par D.-C. Cisinski [Ci2].

Théorème. *La classe \mathcal{W}_∞ est le plus petit localisateur fondamental.*

Ce théorème fournit une caractérisation purement catégorique de \mathcal{W}_∞ d'une merveilleuse simplicité.

Une autre conjecture de Grothendieck [PS] démontrée par D.-C. Cisinski [Ci1] est l'énoncé suivant.

Théorème. *Tout localisateur fondamental est fortement saturé.*

Cela signifie que si \mathcal{W} est un localisateur fondamental et si on désigne par $\gamma : \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{C}at[\mathcal{W}^{-1}]$ le foncteur canonique de localisation, alors u appartient à \mathcal{W} si et seulement si $\gamma(u)$ est un isomorphisme.

Une autre caractérisation de \mathcal{W}_∞ peut être obtenue moyennant le théorème B de Quillen.

Pour expliquer cela, on a besoin de la notion de carré homotopiquement cartésien. Formulons d'abord une caractérisation des carrés cartésiens dans une catégorie \mathcal{C} . Pour toute petite catégorie I , on note \mathcal{C}^I la catégorie $\mathbf{Hom}(I, \mathcal{C})$ des foncteurs de I vers \mathcal{C} . On pose

$$\square = \Delta_1 \times \Delta_1 = \begin{array}{ccc} (0, 0) & \longrightarrow & (0, 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (1, 0) & \longrightarrow & (1, 1) \end{array} ,$$

et on note \lrcorner la sous-catégorie pleine de \square

$$\lrcorner = \begin{array}{ccc} & (0, 1) & \\ & \downarrow & \\ (1, 0) & \longrightarrow & (1, 1) \end{array} .$$

Un carré commutatif de \mathcal{C} n'est rien d'autre qu'un objet X de \mathcal{C}^\square , et on vérifie facilement qu'il est cartésien si et seulement si pour tout objet T de \mathcal{C}^\square , l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\square}(T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\lrcorner}(T|_\lrcorner, X|_\lrcorner)$$

est bijective. Soit \mathcal{W} une partie de $\mathrm{Fl} \mathcal{C}$. On pose

$$\mathcal{W}^I = \{f \in \mathrm{Fl} \mathcal{C} \mid \forall i \in \mathrm{Ob} I \ f_i \in \mathcal{W}\}$$

et

$$\mathbb{D}(I) = \mathcal{C}^I[(\mathcal{W}^I)^{-1}] \quad .$$

Il est immédiat que le foncteur de restriction

$$\mathcal{C}^\square \longrightarrow \mathcal{C}^\lrcorner \quad , \quad X \longmapsto X|_\lrcorner$$

induit un foncteur

$$\mathbb{D}(\square) \longrightarrow \mathbb{D}(\lrcorner) \quad , \quad \text{noté aussi} \quad X \longmapsto X|_\lrcorner \quad .$$

On dit qu'un carré commutatif X de \mathcal{C} est \mathcal{W} -homotopiquement cartésien si pour tout carré commutatif T de \mathcal{C} , l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\square)}(T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\lrcorner)}(T|_\lrcorner, X|_\lrcorner)$$

est bijective. Si \mathcal{W} est la classe des identités (ou des isomorphismes) de \mathcal{C} , on retrouve la notion de carré cartésien.

Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental. On dit qu'un foncteur $u : A \longrightarrow B$ est \mathcal{W} -localement constant, si pour toute flèche $f : b \rightarrow b'$ de B , le foncteur

$$A/b \longrightarrow A/b' \quad , \quad (a, p : u(a) \rightarrow b) \longmapsto (a, fp : u(a) \rightarrow b')$$

est dans \mathcal{W} .

Théorème B (de Quillen). *Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur \mathcal{W}_∞ -localement constant entre petites catégories. Alors pour tout objet b de B , le carré commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ u/b \downarrow & & \downarrow u \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array}$$

est \mathcal{W}_∞ -homotopiquement cartésien.

Corollaire. *Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur \mathcal{W}_∞ -localement constant dans Cat . Si u est dans \mathcal{W}_∞ , alors pour tout objet b de B , le foncteur $u/b : A/b \rightarrow B/b$ est dans \mathcal{W}_∞ (on dit que u est \mathcal{W}_∞ -asphérique).*

Ce corollaire est une réciproque partielle du théorème A. Il résulte du théorème B et du fait que si

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

est un carré \mathcal{W}_∞ -homotopiquement cartésien, alors si u est dans \mathcal{W}_∞ , il en est de même de u' .

On dit qu'un localisateur fondamental \mathcal{W} est *géométrique* si tout foncteur $u : A \rightarrow B$ appartenant à \mathcal{W} induit une bijection $\pi_0 A \rightarrow \pi_0 B$. D.-C. Cisinski montre que cette condition n'est pas réellement restrictive : il n'y a que deux localisateurs fondamentaux non géométriques :

$$\mathcal{W}_{tr} = \text{Fl Cat} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{gr} = \{A \rightarrow B \in \text{Fl Cat} \mid A = B = \emptyset \text{ ou } A \neq \emptyset\}$$

le *localisateur trivial*, et le *localisateur grossier* [Ci1]. Il obtient le théorème suivant [Ci2].

Théorème. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental géométrique. Si tout foncteur \mathcal{W} -localement constant $u : A \rightarrow B$ appartenant à \mathcal{W} est \mathcal{W} -asphérique (pour tout objet b de B , $u/b : A/b \rightarrow B/b$ est dans \mathcal{W}), alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$.*

Corollaire. *Soit \mathcal{W} un localisateur fondamental géométrique. Si pour tout foncteur \mathcal{W} -localement constant $u : A \rightarrow B$, et tout objet b de B , le carré*

$$\begin{array}{ccc} A/b & \longrightarrow & A \\ u/b \downarrow & & \downarrow u \\ B/b & \longrightarrow & B \end{array}$$

est \mathcal{W} -homotopiquement cartésien, alors $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\infty$. Autrement dit, \mathcal{W}_∞ est l'unique localisateur fondamental géométrique satisfaisant au théorème B de Quillen.

On obtient ainsi deux nouvelles descriptions purement catégoriques de \mathcal{W}_∞ . Dans un manuscrit en cours d'édition [Der], Grothendieck donne encore d'autres caractérisations de \mathcal{W}_∞ .

Pour démontrer que le théorème ci-dessus implique le corollaire, il suffit de prouver que si

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & A \\ u' \downarrow & & \downarrow u \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

est un carré \mathcal{W} -homotopiquement cartésien, alors si u est dans \mathcal{W} , il en est de même de u' . Par un argument purement formel, on remarque que pour cela il suffit de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{v} & B \\ 1_{B'} \downarrow & & \downarrow 1_B \\ B' & \xrightarrow{v} & B \end{array}$$

est \mathcal{W} -homotopiquement cartésien. Si le localisateur fondamental \mathcal{W} est *accessible* (s'il est le plus petit localisateur fondamental contenant un *ensemble* de flèches de Cat), D.-C. Cisinski démontre (généralisant un théorème de Thomason [Th]) que Cat admet une structure de catégorie de modèles fermée de Quillen, dont les équivalences faibles sont les flèches appartenant à \mathcal{W} [Ci1], et dans ce cas l'assertion est bien connue et triviale. Le cas général s'en déduit facilement, en remarquant que tout localisateur fondamental est réunion filtrante des localisateurs fondamentaux accessibles qu'il contient.

RÉFÉRENCES

- [**Ci1**] D.-C. Cisinski, *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*, thèse (2002), à paraître dans Astérisque.
- [**Ci2**] D.-C. Cisinski, *Le localisateur fondamental minimal*, à paraître dans les Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques.
- [**PS**] A. Grothendieck, "Pursuing Stacks", manuscrit (1983).
- [**Der**] A. Grothendieck, "Les dérivateurs", manuscrit (~1990), édité par M. Künzer, J. Malgoire, G. Maltsiniotis, <http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/groth/Derivateurs.html>.
- [**Qu**] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory: I*, dans "Higher K-Theories" H. Bass Editor, LNM 341, Springer-Verlag (1973).
- [**Th**] R. W. Thomason, *Cat as a closed model category*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Vol. XXX-3, pp. 305-324, (1980).

Toute théorie est algébrique

René GUITART

En hommage amical à Albert Burroni¹

Mon intention, sous le le titre proposé, est d'évoquer, à ma façon seulement, un thème où Albert Burroni et moi-même nous sommes rencontrés souventes fois.

Je suggérerai quelques questions et constructions de portée générale, et notamment la présentation des théories comme *figurations* $Q : \text{Ens}^S \rightarrow K$, et j'indiquerai pour finir, une solution spéciale, à savoir l'expression de la continuité par les fonctions *bouts*, mettant ainsi en évidence l'ambiguïté du caractère strictement algébrique des théories. D'où une approche du projet de *La Théorie Algébrique*, qui consisterait, sur le thème du *Théorique*, à reprendre l'entreprise de *La Géométrie Algébrique* conduite par Grothendieck sur le thème du *Géométrique*.

Il ne s'agit donc ni d'une analyse de l'ensemble des travaux d'Albert, ou de mes propres travaux, ni d'une comparaison, ni d'un historique complet ou partiel du thème. Disons que la question plus précise — celle qui m'est venue à l'esprit quand j'ai pensé à parler ici, devant Albert, le plus clairement possible à propos de ce que je pouvais comprendre à ses travaux — est en réalité celle-ci :

Comment croire que la topologie soit une théorie algébrique ?

On observera que l'existence de la locution "Topologie Algébrique" fait signe d'une toute autre question... qu'il faudrait combiner à la considération ici de la Géométrie Algébrique ; mais nous laissons cela pour une autre occasion.

1 Toute théorie ...

Pour Lagrange, le but de l'Algèbre "n'est pas de trouver les valeurs mêmes des quantités cherchées, mais le systèmes d'opérations à faire sur les quantités données pour en déduire les valeurs des quantités qu'on cherche, d'après les conditions du problème". Dans la suite, au début du XIXème siècle, Poincot ou Serret affirment encore que "toute l'Algèbre se réduit, au fond, à l'analyse des équations". Une conception plus large se dégagera après la prise en compte des travaux de Galois, quand, suivant l'expression de Dirichlet, il faudra "substituer les idées

¹ *Journée mathématique en l'honneur d'Albert Burroni: Catégories, théories algébriques et informatique*, le Vendredi 20 septembre 2002, à l'Université Paris 7. Institut de mathématique de Jussieu, Prépublication 368, Avril 2004, p. 79-102.

aux calculs”. Et cette exigence sera, progressivement jusqu’à nos jours, ressaisie par la mathématique comme objet, de sorte que l’on puisse in fine considérer que l’algèbre soit un *calcul des idées*, trouvant le système d’idées à faire opérer sur telle situation mathématique ...

George Peacock est probablement le premier, vers 1830, à réclamer explicitement et très-fermement le droit à l’*“arbitraire a priori”* dans le choix des axiomes des lois de compositions binaires, dans le cadre d’une algèbre symbolique générale des opérations. Pour le calcul général, Hankel affirme en 1867 l’importance de la pureté formelle, c’est-à-dire de l’indépendance par rapport à la *“substance des objets”*. Ce dont, en 1898, le livre de Whitehead [*A Treatise on Universal Algebra, with Applications I*] constitue une très-sustantielle suite naturelle... Mais pour commencer il faut souligner cet événement que fut l’attitude de Peacock, attitude véritablement fondatrice de la théorie du *théorique opératoire* — alias le *calcul d’idées* — et marquant pour le coup un début de la recherche et du développement d’un sens mathématique précis pour l’expression : *“toute théorie...”*.

Entre 1960 et 1970, les travaux de Lawvere, Bénabou, Chevalley, Ehresmann, Linton, Eilenberg et Moore, Gabriel et Ulmer, notamment, ont permis de comprendre l’idée de *théorie algébrique* — telle que manipulée d’abord par la théorie des modèles et l’algèbre universelle à la manière des Birkhoff, Tarski, etc., et disons, bien après Whitehead, Peirce, et quelques autres, telle qu’achevée dans le livre de 1965 de Cohn [*Universal Algebra*] — en des termes nouveaux, à savoir en termes de problèmes universels dans les catégories, ou encore en termes d’adjonctions. Les catégories avaient vu le jour dans l’esprit d’Eilenberg et Mac Lane vers 1942 — pour donner un sens à l’idée de *construction naturelle* en cohomologie de Čech — et la notion indispensable de foncteur adjoint avait été introduite par Kan en 1957, également pour un motif de topologie algébrique, notamment pour traduire la relation entre cylindre et espace des lacets. Lawvere fut le premier à réinvestir systématiquement ces outils construits pour la topologie algébrique dans le champ de la théorie des théories et modèles. Les modèles d’une théorie algébrique s’avérèrent donc spécifiables — pour le dire maintenant en les termes *“diagrammatiques”* d’Ehresmann — comme *réalisations* d’une *esquisse projective* σ_{proj} , c’est-à-dire comme les foncteurs R d’une catégorie petite (voire d’un petit graphe multiplicatif) S , dite base de l’esquisse σ_{proj} , vers la grosse catégorie Ens des ensembles, transformant certains cônes projectifs $p = (p_k : \Pi \rightarrow B_k)_{k \in K}$, avec K petite, spécifiés dans S , et dont la collection forme un ensemble P , en des limites projectives dans Ens . Ce qui fait que toute flèche $\omega : \Pi \rightarrow B$ de S devient, dans la réalisation R , une ‘composition’ ω_R dite ‘en R ’. Ce que l’on écrit ainsi :

$$R : S \rightarrow \text{Ens}, \quad \omega : \Pi \rightarrow B,$$

$$R(\Pi) \simeq \lim_{\leftarrow k \in K} R(B_k), \quad \omega_R = R\omega.(\simeq^{-1}) : \lim_{\leftarrow k \in K} R(B_k) \rightarrow R(B).$$

Ainsi par $\omega_R = R\omega.(\simeq^{-1})$ des éléments $x_k \in R(B_k)$, $k \in K$, dits donc de types B_k , supposés compatibles entre eux c’est-à-dire bien agencés — soit tels que pour toute flèche $t : B_k \rightarrow B_{k'}$ dans S on a $x_{k'} = R(t)(x_k)$ –, peuvent être *“composés”*

pour former un élément x de type B , ce qui est noté :

$$\omega_R((x_k)_{k \in K}) = x.$$

Et bien sûr, très particulièrement, on rencontre la situation élémentaire d'origine: lorsque K est un ensemble à deux éléments vu comme catégorie discrète, disons $K = \{1, 2\}$, alors il n'y a pas de condition de compatibilité, et $\omega_R((x_k)_{k \in \{1,2\}}) = x$ est noté simplement

$$x_1 \cdot_\omega x_2 = x.$$

Formellement, l'esquisse est donc le couple $\sigma_{\text{proj}} = (S, P)$, où S est sa base et où P est l'ensemble de cônes projectifs p qui y sont spécifiés. Une catégorie est dite *algébrique au sens des esquisses* ou *projectivement esquissable* si elle est équivalente à la catégorie, notée

$$\text{Real}(\sigma_{\text{proj}}) = \text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}},$$

des réalisations d'une esquisse projective σ_{proj} . Au plan technique, on insiste dans la définition sur la question de *taille*, soit le fait que S et les K et la collection P des p sont petites (c'est-à-dire des ensembles); sinon, on parle à la rigueur de "grosse" esquisse projective.

▷ Un cas important est donc celui d'une théorie de Lawvere, c'est-à-dire celui d'une théorie algébrique unisorte à arités finies — spécifiable donc par une esquisse projective de catégorie S où, avec un objet particulier \star , ne sont spécifiés que des cônes projectifs finis discrets destinés à décrire, pour toute réalisation R , des puissances n -ièmes finies quelconques de l'ensemble $R(\star) = X$, et où tout objet est sommet d'un tel cône, et noté \star^n , et ceci de sorte donc qu'une réalisation soit décrit par un ensemble X et des opérations $R\omega$ sur X d'arités les n finis, associées aux flèches $\star^n \xrightarrow{\omega} \star$ dans S , ce qui est noté :

$$R : S \rightarrow \text{Ens}, \quad \omega : \star^n \rightarrow \star,$$

$$R(\star) = X, \quad R(\star^n) \simeq R(\star)^n, \quad \omega_R = R\omega \cdot (\simeq^{-1}) : X^n \rightarrow X,$$

les opérations $R\omega$ ou ω_R , ou simplement notées ω_X , étant soumises aux équations données par les diagrammes commutatifs de S . La spécification sur un ensemble d'une ou plusieurs lois binaires \cdot_ω envisagée ci-dessus rentre dans ce cas. On obtient ainsi les structures algébriques usuelles : monoïdes, groupes, anneaux. En revanche, les corps ne sont pas même projectivement esquissables, à cause de l'opération d'inversion non définie sur 0. En fait, pour toute théorie équationnelle (Ω, Φ) spécifiée par un domaine d'opérateurs Ω et par un ensemble Φ de relations de définition équationnelles, il existe donc une esquisse projective $\tau(\Omega, \Phi)$ telle que les algèbres de (Ω, Φ) soient les réalisations de $\tau(\Omega, \Phi)$:

$$\text{Alg}(\Omega, \Phi) \simeq \text{Ens}^{\tau(\Omega, \Phi)}.$$

Les théories de Bénabou sont plus générales que celles de Lawvere, admettant une famille $(\star_t)_{t \in T}$ de types d'objets, et les spécifications de produits $\prod_{i \in I} \star_{t(i)}^{n(i)}$ pour des fonctions $t : I \rightarrow T$. Il s'agit donc des esquisses projectives où les

cônes spécifiés sont discrets. On décrit donc ainsi les algèbres multisortes à lois partout définies. Du point de vue des arités, elles ne sont plus de simples entiers, et Bénabou les rapporte à un calcul d'entiers "non-associatifs". On écrit encore $\tau(\Omega, \Phi)$ les esquisses projectives en question, quoique maintenant on autorise dans Ω des types ou sortes diverses, et des arités hétérogènes quelconques.

▷ Un autre cas important est constitué par la théorie des faisceaux d'ensemble sur un espace topologique. Par exemple, si X est un espace topologique et si $\Phi = (U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X , on forme une catégorie $I^{(2)}$ dont l'ensemble des objets est $I \cup I^2$, et où, pour tout (i_1, i_2) , l'on met deux flèches $(i_1, i_2) \rightarrow i_1$ et $(i_1, i_2) \rightarrow i_2$. Dans le dual $\text{Ouv}(X)^{\text{op}}$ de l'ensemble ordonné par inclusion $\text{Ouv}(X)$ des ouverts de X , on considère le diagramme $\Phi^{(2)} = (U_w)_{w \in I^{(2)}}$ donné par $U_i = U_i$ et $U_{(i_1, i_2)} = U_{i_1} \cap U_{i_2}$. Il forme la base d'un cône projectif p_Φ de sommet $\cup_{i \in I} U_i$. Associée à l'espace X , on détermine donc une esquisse projective notée $\omega(X) = (\text{Ouv}(X)^{\text{op}}, \{p_\Phi; I \subset \mathcal{P}(X)\})$.

Un faisceau F sur X est alors une réalisation de l'esquisse projective $\omega(X)$, soit un foncteur $F : \text{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ tel que, pour toute famille d'ouvert Φ , avec disons $\cup_{i \in I} U_i = W$, et donc $\cup_{w \in I^{(2)}} U_w = W$, on ait

$$F(\cup_{i \in I} U_i) \simeq \lim_{\leftarrow w \in I^{(2)}} F(U_w),$$

ce que l'on nomme la condition de "recollement des données locales"; soit, pour le spécifier à la façon des esquisses projectives, en parallèle au cas ci-avant des théories de Lawvere :

$$F : \text{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}, \quad \text{Id} : \cup_{i \in I} U_i = W,$$

$$F(W) \simeq \lim_{\leftarrow w \in I^{(2)}} F(U_w), \quad F(\text{Id}) \cdot (\simeq^{-1}) : \lim_{\leftarrow w \in I^{(2)}} F(U_w) \simeq F(W).$$

On a donc :

$$\text{Fais}(X) \simeq \text{Ens}^{\omega(X)}.$$

À l'origine, la notion de faisceau est due à Leray, qui la formulait un peu différemment de ce que nous venons d'énoncer. Grothendieck a élargi cette notion en remplaçant les espaces topologiques par les topologies J sur un site S , dites depuis "topologies de Grothendieck" $X = (S, J)$, construisant de même les catégories de faisceaux sur ces sites, $\text{Fais}(X)$. Les esquisses correspondantes, analogues aux $\omega(X)$ données ci-dessus pour X espace topologique, seront notées encore $\omega(X)$, avec maintenant X une topologie de Grothendieck.

Puis, en mêlant les cas à la Lawvere-Bénabou et les cas à la Leray-Grothendieck — qui sont en quelque sorte les deux extrêmes de l'idée unifiante d'esquisse projective —, le premier ayant un minimum de limites projectives, le second ayant un minimum de lois, on obtient, comme exemple nouveau, le cas de la théorie des faisceaux d'un type de structure algébrique déterminé sur un site déterminé, dont l'esquisse s'écrit

$$\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi),$$

et l'on est alors dans le cadre algébrique de base suffisamment souple pour les développements de la géométrie algébrique à la manière de Grothendieck. Nous

laissons en exercice à l'auditeur de préciser si toute esquisse projective σ_{proj} a pour modèles dans Ens les modèles d'une esquisse composé $\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi)$, c'est-à-dire de dire si

$$\text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}} \sim \text{Ens}^{\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi)}.$$

En fait, pour la géométrie algébrique, il y a un autre outil indispensable, qui rend manipulable comme objet mathématique l'idée de variété, c'est le calcul des *pro-objets*. On navigue alors, par exemple, dans des catégories telles que $[\text{pro} - (\text{Ens}_{\text{fin}}^{\tau(\Omega, \Phi)})]^{\omega(X)}$, soit des catégories de faisceaux d'algèbres pro-finis. Nous appellerons cela l'*empyrie grothendieckienne*. En réalité cette empyrie est plus complexe, et comporte, notamment avec les *champs*, le passage à une deuxième dimension. On peut alors suggérer, en complément à la question ci-avant sur la composition tensorielle $\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi)$, que l'ajout à ces esquisses-là de l'usage des pro-objets soit suffisant pour 'tout' décrire ; autrement dit demander si l'empyrie grothendieckienne est complète. Ce n'est pas impossible, car le calcul des pro-objets déborde le cadre du strictement algébrique : on doit plutôt le rattacher au calcul des *esquisses mixtes* et *esquisses concrètes* que nous envisageons plus loin. Et comme on sait qu'avec les esquisses mixtes grosses on peut décrire toutes les catégories dont les idempotents scindent, la question sur la complétude de l'empyrie n'est pas déraisonnable. Il s'agirait en détail de construire les esquisses mixtes dont les réalisations soient les catégories du genre des catégories $[\text{pro} - (\text{Ens}_{\text{fin}}^{\tau(\Omega, \Phi)})]^{\omega(X)}$ ou du moins du genre $[\text{Proj}(\text{Ens}^{\tau(\Omega, \Phi)})]^{\omega(X)}$, et surtout, réciproquement, de représenter ainsi les catégories de modèles d'esquisses mixtes a priori quelconque. Autrement dit, il faudrait donc comparer systématiquement la théorie des esquisses mixtes et la théorie des schémas.

Mais, si l'on reste encore un moment au stade des esquisses projectives, le théorème-clé est celui de l'existence d'un adjoint à gauche L pour le foncteur d'inclusion canonique $\text{Cano}_{\text{proj}}$ de $\text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}}$ dans Ens^S , ce que l'on note

$$(L : \text{Ens}^S \longrightarrow \text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}}) \dashv (\text{Cano}_{\text{proj}} : \text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}} \longrightarrow \text{Ens}^S),$$

et ce qui signifie que, naturellement en R et en X , on a

$$\text{Hom}_{\text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}}}(L(X), R) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(X, \text{Cano}_{\text{proj}}(R)).$$

Ce théorème, dans le cas des théories de Lawvere, revient au théorème de construction des algèbres libres, et, dans le cas des faisceaux de Grothendieck, est le théorème du faisceau associé. Au stade des esquisses mixtes ou des pro-objets, la clé sera le théorème d'existence de petits diagrammes localement libres ; nous y revenons tantôt.

Le recours à Ens — bâtie sur la donnée d'un univers ou modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fränkel — comme sémantique i.e. comme réceptacle universel des théories, comme lieu des supports des modèles, n'a rien de nécessaire a priori. Car on peut considérer, au lieu des réalisations $R : (S, P) \longrightarrow \text{Ens}$, des $R : (S, P) \longrightarrow (S', P')$, réalisations entre esquisses projectives, soit des foncteurs $R : S \longrightarrow S'$ tels que

$$\forall p (p \in P \Rightarrow R \circ p \in P').$$

Ehresmann s'était d'emblée placé sur ce terrain — y compris d'ailleurs pour les esquisses mixtes. De telles réalisations sont vues comme des modèles d'une esquisse dans une autre. Du reste c'est ce désengagement de la version ensembliste de la question qui permet librement de concevoir la question de la construction du *type* d'une esquisse, c'est-à-dire du développement propre des preuves dans une esquisse donnée. Le cours de troisième cycle d'Ehresmann en 1968 — auquel j'assistais, en compagnie d'Albert et Élisabeth Burroni et de Christian Lair, notamment — développait cette perspective.

On arrive ainsi à une conception purement diagrammatique des théories *et* des modèles *et* des preuves. Au point que ne sont plus nécessaires dans leurs détails ni la théorie des ensembles comme fond, ni la logique du premier ordre comme régime démonstratif. Ce sont les cônes qui remplacent les formules, et les enchaînements de factorisations dans des diagrammes sont les démonstrations. On appréciera le déplacement de la question de l'*algébricité*, depuis l'*équationnel formel* de Peacock — avant la théorie des ensembles bien sûr —, via l'*algèbre universelle ensembliste* de Tarski, et jusqu'au *diagrammatique pur* d'Ehresmann — déjà dans l'après coup de l'ensemblisme.

De plus, à côté de ce qui s'unifie ainsi en terme d'esquisses projectives et très-diagrammatiquement, nous savions aussi, à la fin des années 60 — en particulier par les travaux d'Eilenberg et Moore et de Linton — qu'une théorie algébrique unisorte, d'arités non nécessairement finies, se trouve spécifiable aussi par la donnée d'une *monade* $T = (T, \eta, \mu)$ sur Ens — c'est-à-dire d'un foncteur $T : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ équipé de deux transformations naturelles $\eta : Id \rightarrow T$, l'unité, et $\mu : TT \rightarrow T$, la multiplication, avec $\mu \cdot \eta_T = Id_T = \mu \cdot T\eta$ et $\mu \cdot T\mu = \mu \cdot \mu_T$ — de sorte que chaque modèle apparaissant comme une *algèbre* (X, θ) de la monade T , c'est-à-dire la donnée d'un ensemble *support* X et d'une *loi* θ satisfaisant à deux équations :

$$\theta : TX \rightarrow X, \quad \theta \cdot \eta_X = Id_X, \quad \theta \cdot T\theta = \theta \cdot \mu_X.$$

Une catégorie est dite *algébrique au sens des monades* si elle est équivalente à la catégorie des algèbres d'une monade T sur Ens , catégorie notée

$$\text{Alg}(T) = \text{Ens}^T.$$

En réalité TX équipé de μ_X est le modèle libre engendré par X de la théorie définie par T , soit l'algèbre des termes de la théorie à constantes dans X . Autrement dit, le point de vue des monades consiste certes à se limiter au cas unisorte, mais aussi à ne retenir primitivement, dans les théories projectivement esquissables, que le fait de l'existence de l'adjonction $F \dashv \text{Cano}_{\text{proj}}$. Du coup, nombre de situations qui ne sont atteignables que par grosses esquisses projectives peuvent être directement considérées. On peut spécifier une théorie en indiquant par avance ce que l'on veut avoir comme structures libres de ladite théorie, charge à nous ensuite d'en analyser diagrammatiquement la composition. Donc $LX = (TX, \mu_X)$ définit un foncteur $L : \text{Ens} \rightarrow \text{Alg}(T)$ adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : \text{Alg}(T) \rightarrow \text{Ens}$ défini par $U(X, \theta) = X$. Si l'on écrit T comme limite inductive de foncteurs représentables, soit $T \simeq \lim_{\rightarrow (\alpha; j)} \text{Hom}(\alpha, -)$ ou $TX \simeq \lim_{\rightarrow (\alpha; j)} X^\alpha$, avec $j : \text{Hom}(\alpha, -) \rightarrow T$ transformation naturelle, alors,

avec $R(\star) = X$, on retrouve les opérations ω_R d'arité α sous la forme

$$\omega_R = \theta.j_X : X^\alpha \xrightarrow{j_X} TX \xrightarrow{\theta} X.$$

Et dans l'autre sens, θ est la 'réunion' de toutes les lois $R\omega$ en une seule flèche. La beauté de ce procédé synthétique réside alors dans le fait qu'en réunissant ainsi les lois $R\omega$, on réunisse aussi, spontanément, toutes les équations que l'on aura imposées dans la définition de la théorie fixée, et que cela s'exprimera toujours sous la forme canonique : $\theta.\eta_X = Id_X$ et $\theta.T\theta = \theta.\mu_X$.

Si dans ce procédé il est possible de se limiter à des $\alpha = n$ finis, on dit que la monade est de rang fini, et l'algébricité correspondante équivaut à celle par une théorie de Lawvere. On a alors une parfaite coïncidence entre l'équationnalité et l'existence de structures libres. On observera bien que, quand on part d'une théorie de Lawvere de base S , évidemment, la monade associée T change avec la nature de S , mais les deux équations d'algèbre ne changent pas de forme quand S change — tout en prenant dans chaque cas la signification algébrique de la circonstance. En ce sens on peut dire qu'elles constituent un *format intrinsèque synthétique* de la spécification algébrique (ou *fissa*, de l'argot "faire fissa" : faire vite. En arabe *fissa* signifie: "à l'heure même"). Et ces deux axiomes du fissa des T -algèbres sont en effet une *unitarité* et une *associativité*, ce qui permet de comprendre, comme le soutiennent plusieurs, dont Burroni, que *tout est monoïde*.

Sinon, si T n'est pas de rang fini, on peut encore décrire la théorie par une esquisse projective petite si l'on peut se limiter à des ordinaux α tels que $\alpha < \rho$, c'est-à-dire si T est de rang $< \rho$. Mais il existe de nombreuses monades sans rang limité, et dans ces cas là il faudrait en effet des esquisses projectives grosses.

Un bel exemple, construit par Manes, est la théorie des compacts : pour \mathcal{U} la monade des ultrafiltres sur Ens , les algèbres de \mathcal{U} sont les espaces topologiques compacts. Ainsi, si X est un espace compact, se trouve définie $\theta : \mathcal{U}X \rightarrow X$ en posant $\theta(W) = \lim W$, pour tout ultrafiltre W sur X . On trouve les opérations correspondantes $\lambda_U : X^A \rightarrow X$ d'arité un ensemble A , en considérant, pour chaque ultrafiltre U sur A , et, pour chaque fonction $f : A \rightarrow X$, l'ultrafiltre $f(U)$ sur X image de U , puis en posant $\lambda_U(f) = \theta(f(U))$. L'union de ces opérations, lorsque A et U varient, redonne θ .

Un autre exemple, plus fondamental encore je pense, est celui de la monade notée $\Pi = (2^{2^{(-)}, \eta, 2^{\eta_2-})$, dont d'ailleurs la monade des parties \mathcal{P} et la monade des ultrafiltres \mathcal{U} sont en fait deux sous-monades. Les propriétés formelles de cette monade m'ont conduit, entre 1970 et 1976, à l'introduction des *univers algébriques*, un cadre équationnel pour la topologie générale comme calcul des relations continues. J'ai montré que dans l'univers algébrique des ensembles, toutes les théories du premier ordre sont équationnelles, et donc 'algébriques'.

Mais n'oublions pas d'ajouter, pour les monades et leurs algèbres, que tout est formulable, et effectivement formulé par les inventeurs, en fait d'emblée *de façon relative à une catégorie quelconque C* servant de base, en lieu et place de Ens : une monade sur C est un foncteur $T : C \rightarrow C$, deux transformations naturelles, etc., une T -algèbre est un objet $X \in C$, etc. la catégorie des T -algèbres est notée $\text{Alg}(T)$ et aussi C^T , et encore, puisque ce sont Eilenberg et

Moore qui l'on introduite, $EM(\mathbb{T})$. Alors $LX = (TX, \mu_X)$ définit un foncteur $L : C \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{T})$ adjoint à gauche au foncteur d'oubli $U : \text{Alg}(\mathbb{T}) \rightarrow C$ défini par $U(X, \theta) = X$. Si l'on note $\text{Alg}(\mathbb{T})_L$ la sous-catégorie pleine de $\text{Alg}(\mathbb{T})$ par laquelle L factorise — catégorie considérée par Kleisli, et souvent noté aussi $\text{Kl}(\mathbb{T})$ — et si $\backslash L : C \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{T})_L$ est la factorisation en question, définie donc par L , la donnée d'une algèbre équivaut — d'après Linton — à celle d'un (X, A) où $A : \text{Alg}(\mathbb{T})_L^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ est un foncteur tel que

$$A \circ \backslash L^{\text{op}} = \text{Hom}_C(-, X).$$

En notant $\bar{1}_{TX} : LTX \rightarrow LX$ le morphisme d'algèbres libres déterminé par l'identité $1_{TX} : TX \rightarrow TX$, on retrouve la loi $\theta : TX \rightarrow X$ par : $\theta = A(\bar{1}_{TX})(1_X)$. Aussi le point de vue des monades est non seulement un fissa, mais, mieux, est un *fissa relatif*.

À la suite des *relational algebra* de Barr, Burroni a, vers 1971, élargi la veine indiquée ci-avant des théories vues en termes de monades, en complétant l'idée d'algèbre d'une monade \mathbb{T} par celle de \mathbb{T} -catégorie. Cela lui permettait d'obtenir, avec la monade de Manes des ultrafiltres décrivant les espaces compacts, une description des topologies, en l'occurrence comme \mathcal{U} -catégories.

Une \mathbb{T} -catégorie est d'abord (voir le dessin sur l'affiche de cette journée !) un \mathbb{T} -graphe, soit la donnée $TX \xleftarrow{a} \pi \xrightarrow{b} X$ — une \mathbb{T} -algèbre correspondant au cas où $a = 1_{TX}$ et $b = \theta$ — soumis à des 'analogues' des équations caractérisant les \mathbb{T} -algèbres. En fait un \mathbb{T} -graphe détermine un graphe dans les algèbres libres de \mathbb{T} , soit dans $\text{Alg}(\mathbb{T})_L$, soit $(TX, \mu_X) \xleftarrow{\mu_X \cdot Ta} (T\pi, \mu_\pi) \xrightarrow{Tb} (TX, \mu_X)$; et, a fortiori il s'agit d'un graphe dans les algèbres de \mathbb{T} , soit un élément de $\text{Alg}(\mathbb{T})^{(\overleftarrow{\quad})}$. On serait donc conduit à étudier, en parallèle avec les \mathbb{T} -catégories, les graphes dans $\text{Alg}(\mathbb{T})$, soit la catégorie $\text{Alg}(\mathbb{T})^{(\overleftarrow{\quad})}$, puis les catégories dans $\text{Alg}(\mathbb{T})$, soit la catégorie $\text{Alg}(\mathbb{T})^{\sigma_{\text{cat}}}$, où σ_{cat} est l'esquisse projective de la structure de catégorie. Burroni n'a pas développé les choses dans cette direction, bien que, plus tard, le lien entre les monades et les graphes l'ait bien inspiré — mais en quelque sorte dans le sens inverse — dans ses études sur les algèbres graphiques et l'algébricité au-dessus des graphes, c'est-à-dire dans la considération des catégories du type $(\text{Ens}^{(\overleftarrow{\quad})})^{\mathbb{T}'}$, pour \mathbb{T}' une monade sur $\text{Ens}^{(\overleftarrow{\quad})} = \text{Graph}$. Il est alors ici trivial mais utile de préciser qu'évidemment pour toute monade \mathbb{T} sur Ens il existe une monade \mathbb{T}' sur $\text{Ens}^{(\overleftarrow{\quad})}$ telle que

$$\text{Alg}(\mathbb{T})^{(\overleftarrow{\quad})} \simeq (\text{Ens}^{(\overleftarrow{\quad})})^{\mathbb{T}'}$$

Le croisement ainsi suggéré entre \mathbb{T} -catégories et algèbres graphiques pourrait être approfondi, et en particulier pour la monade des ultrafiltres \mathcal{U} .

Une suggestion complémentaire ici serait de reconsidérer le fait que j'indiquais plus haut, que \mathcal{U} est une sous-monade de Π . En fait on peut considérer \mathcal{U} comme associée à une *monade virtuelle* — notion que j'ai détaillée jadis — de la forme $\Pi[\rho] = (2^{2^{(-)}}, \eta, \mu = 2^{\eta_2}, \rho)$, avec des idempotents $\rho_X : \Pi(X) \rightarrow \Pi(X)$, de sorte que les \mathcal{U} -algèbres s'identifient aux algèbres de $\Pi[\rho]$, qui sont les (X, λ) avec $\lambda : \Pi(X) = 2^{2^X} \rightarrow X$ satisfaisant

$$\lambda \cdot \rho_X = \lambda, \quad \lambda \cdot \eta = \lambda, \quad \lambda \cdot \Pi(\lambda) \cdot \rho_{\Pi(X)} \cdot \Pi(\rho_X) = \lambda \cdot \mu_X \cdot \rho_{\Pi(X)} \cdot \Pi(\rho_X).$$

Clairement, ici, comme Π est une vraie monade, la monade virtuelle $\Pi[\rho]$ détermine une monade sur la complétion idempotente de Ens , d'où la vraie monade \mathcal{U} , avec $\mathcal{U}(X) = \text{Im}(\rho_X)$. De même les \mathcal{U} -catégories sont déterminables comme des Π -graphes satisfaisant certaines équations dans $\Pi[\rho]$. Mais ce sont aussi des graphes dans $(\text{Alg}^\Pi) \simeq \text{Ens}^{\text{op}}$. De la sorte on arriverait à un plongement plein de Top , catégorie des espaces topologiques, dans la catégorie Graph^{op} , elle-même algébrique sur Graph ... Et, nonobstant cette question des topologies, en tout état de cause, le simple rapport entre les Π -catégories et les co-catégories mériterait le détour. Notamment, on sait qu'une catégorie et la catégorie duale ne peuvent être toutes deux petitement projectivement esquissables que s'il s'agit d'un treillis complet. Ainsi Ens étant projectivement esquissable, Ens^{op} ne l'est pas. Associée aux *univers algébriques*, la notion de Π -*esquisse mixte* où, en sus de cônes projectifs et inductifs — voir ci-après les esquisses mixtes — sont spécifiés des constructeurs d'objets jouant le rôle des $\Pi(X)$, rémédie à cette limitation.

Et maintenant nous devons justement élargir tant le point de vue des esquisses projectives que le point de vue des monades ; les *esquisses mixtes* et les *figurations* auxquelles on arrivera, peut-être trop générales pour mériter la spécificité du terme 'algébrique', constitueront en revanche la position mathématique en surplomb nécessaire pour interroger l'algébricité des situations. Une sorte de point de vue algébrique sur la question de l'algébricité..., un contexte algébrique dans lequel il reste à chercher la frontière entre l'algébrique et le non-algébrique — notamment aux alentours de la procédure grothendieckienne pour la Géométrie Algébrique — si tant est que du non-algébrique il en soit.

2 ... est algébrique, ...

Après les points de vue des esquisses projectives et des monades, venons-en à celui des esquisses mixtes. À la fin des années 70, Christian Lair et moi-même — prolongeant des travaux d'Andreka et Németi, et de Diers — avons montré que les théories du premier ordre pouvaient se décrire en terme d'*esquisses mixtes*, c'est-à-dire — suivant la définition originelle d'Ehresmann, qui donnait notamment l'exemple de l'esquisse mixte de corps — en ajoutant à une esquisse projective petite un ensemble I de spécifications dans S de cônes inductifs $(q_l : C_l \rightarrow \Sigma)_{l \in L}$, avec L petite, à transformer par les réalisations en limites inductives dans Ens , ce que l'on écrit :

$$R : S \rightarrow \text{Ens}, \quad \lim_{\rightarrow l \in L} R(C_l) \simeq R(\Sigma).$$

Formellement, l'esquisse mixte est donc le couple $\sigma = ((S, P), I) = (\sigma_{\text{proj}}, I)$, où $(S, P) = \sigma_{\text{proj}}$ est la composante projective de σ et où I est l'ensemble des cônes inductifs spécifiés dans la base S . Au plan technique, on insiste encore sur la question de *taille*. Une catégorie est dite *mixtément esquissable* si elle est équivalente à la catégorie des réalisations d'une esquisse mixte σ , catégorie notée

$$\text{Real}(\sigma) = \text{Ens}^\sigma.$$

Et, avec le théorème d'existence du *petit diagramme localement libre*, qui peut aussi se formuler comme un théorème d'existence de *proj-objet libre*, sorte de Lovenheim-Skolem catégorique gérant en quelque manière l'éclatement des structures libres que l'on pourrait tenter de construire dans les cas non-algébriques mais descriptibles en termes de petite esquisse mixte, nous avons pu véritablement entamer sérieusement l'étude générale des théories considérées comme ainsi décrites, par esquisses mixtes donc. Ce théorème affirme que le foncteur

$$\text{Proj}(\text{Ens}^\sigma) \longrightarrow \text{Proj}(\text{Ens}^S)$$

admet un adjoint à gauche, en notant donc $\text{Proj}(\mathcal{C})$ la catégories des *proj-objets* dans \mathcal{C} définie de même que la catégorie $\text{pro-}\mathcal{C}$ des pro-objets de \mathcal{C} , sauf qu'on enlève la condition de ce cas que les indexations soient des catégories filtrantes. Un objet de $\text{Proj}(\mathcal{C})$ est donc un petit diagramme dans \mathcal{C} , disons $(X_i)_{i \in I}$, et

$$\text{Hom}_{\text{Proj}(\mathcal{C})}((X_i)_{i \in I}, (Y_j)_{j \in J}) = \lim_{\leftarrow j \in J} \lim_{\rightarrow i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

En fait, l'existence du proj-adjoint en question est évidemment réductible au point de l'existence, pour tout $X : S \rightarrow \text{Ens}$ du petit diagramme localement libre engendré $L_X : I_X \rightarrow \text{Ens}^\sigma$, où donc I_X est une petite catégorie, et tel que soit fourni un cône projectif $((\phi_X)_i : X \rightarrow L_X(i))_{i \in I_X}$ avec $-$ Cano désignant l'inclusion canonique de Ens^σ dans Ens^S — la condition

$$\forall R \in \text{Ens}^\sigma \quad \lim_{\rightarrow i \in I_X} \text{Hom}_{\text{Ens}^\sigma}(L_X(i), R) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(X, \text{Cano}(R)).$$

On en tire donc, en prenant $X = \text{Hom}_S(\Sigma, -)$, que pour tout objet Σ de S et toute réalisation R de σ , $R(\Sigma)$ se décompose comme limite inductive en

$$\lim_{\rightarrow i \in I_{\text{Hom}_S(\Sigma, -)}} \text{Hom}_{\text{Ens}^\sigma}(L_{\text{Hom}_S(\Sigma, -)}(i), R) \simeq R(\Sigma). \quad (\star)$$

Si $j_{\mathcal{C}} : \text{Proj}(\mathcal{C}) \rightarrow (\text{Ens}^{\mathcal{C}})^{\text{op}}$ est le foncteur déterminé pour $X = (X_i)_{i \in I}$ par

$$j_{\mathcal{C}}(X)(C) = \lim_{\rightarrow i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, C),$$

pour $\Sigma \in S$ on pose $\bar{\Sigma} = j_{\text{Ens}^\sigma}(L_{\text{Hom}_S(\Sigma, -)})$, et on pose aussi, pour tout R , $\text{Eva}_\Sigma(R) = R(\Sigma)$. On a alors deux foncteurs $\text{Eva}_\Sigma, \bar{\Sigma} : \text{Ens}^S \rightarrow \text{Ens}$ et une transformation naturelle $t_\Sigma : \bar{\Sigma} \rightarrow \text{Eva}_\Sigma$. La condition (\star) de décomposition inductive de $R(\Sigma)$ pour R ci-avant s'écrit encore

$$\bar{\Sigma}(R) \simeq \text{Eva}_\Sigma(R).$$

Dans la catégorie $\mathcal{K} = \text{Ens}^{\text{Ens}^S}$ on a donc le morphisme $t_\Sigma : \bar{\Sigma} \rightarrow \text{Eva}_\Sigma$, l'objet $\hat{R} = \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(R, -)$, et la condition est devenue :

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, t_\Sigma) : \text{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, \bar{\Sigma}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, \text{Eva}_\Sigma),$$

soit — en notant $\hat{\hat{R}} = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(\hat{R}, -) = \text{Hom}_{\text{Ens}^{\text{Ens}^S}}(\text{Hom}_{\text{Ens}^S}(R, -), -) \in \text{Ens}^{\text{Ens}^{\text{Ens}^S}}$ — la condition 'algébrique' que $\hat{\hat{R}} : \text{Ens}^{\text{Ens}^S} \rightarrow \text{Ens}$ inverse $t_\Sigma \in \text{Ens}^{\text{Ens}^S}$, c'est-à-dire que $\hat{\hat{R}}(t_\Sigma)$ soit un isomorphisme :

$$\hat{\hat{R}}(t_\Sigma) : \hat{\hat{R}}(\bar{\Sigma}) \simeq \hat{\hat{R}}(\text{Eva}_\Sigma) \quad (\star\star).$$

Les $R : S \rightarrow \text{Ens}$ tels que (\star) sont donc équivalents aux R tels que $(\star\star)$, soit aux $Z : \text{Ens}^{\text{Ens}^S} \rightarrow \text{Ens}$ tels que $Z(t_\Sigma)$ soit un isomorphisme *et* que Z soit ‘très représentable’ c’est-à-dire isomorphe à un \hat{R} . Le passage de (\star) à $(\star\star)$ fait disparaître les ‘ $\lim_{\rightarrow i \in I}$ ’ et le prix à payer est l’apparition des \hat{R} . L’intérêt de la manœuvre est d’exprimer séparément, à partir de (\star) , une condition *équationnelle* $Z(t_\Sigma) : Z(\bar{\Sigma}) \simeq Z(\text{Eva}_\Sigma)$, et une condition *représentationnelle* $Z \simeq \hat{R}$. C’est en ce sens précis que l’on dira que tout est algébrique, à des représentabilités près...

Cette notion d’esquisse mixte paraît naturelle à quiconque a réalisé que, naturellement justement, de nombreux énoncés mathématiques signifient directement qu’une certaine limite inductive est isomorphe à une certaine limite projective, soit quelque chose que l’on note, à partir de données cohérentes de morphismes $m_{k,l} : C_l \rightarrow B_k$, en cette manière :

$$\lim_{\rightarrow l \in L} C_l \xrightarrow{\simeq} \lim_{\leftarrow k \in K} B_k.$$

Ainsi en est-il d’un énoncé comme : le collage de deux segments par leurs extrémités est topologiquement isomorphe au sous-ensemble du plan cartésien défini par l’équation $x^2 + y^2 = 1$. Les esquisses mixtes permettent de manipuler et tirer profit directement de tels énoncés, sans les traduire en termes logiques traditionnels.

Un exemple essentiel d’esquisse mixte ‘grosse’ a été construite par Burroni dès 1970, à savoir l’*esquisse mixte de la topologie*. Cet exemple m’a frappé à l’époque, et certainement, plus tard, il m’a motivé vers les esquisses mixtes. Et ce d’autant plus qu’il ne s’agissait pas d’un exemple isolé, mais que cela relevait du dégagement d’une méthode, qu’il appelait la *typification*, et qui, en substance consistait à décrire les foncteurs T utiles à la description de structures, comme par exemple le foncteur T d’une monade sur Ens , et notamment le foncteur \mathcal{U} , comme limite inductive de représentables (théorème de Yoneda-Grothendieck) et à inclure cette description dans l’esquisse.

On peut alors préciser la suggestion faite plus haut de la construction d’un principe de traduction entre esquisses mixtes et schémas.

D’abord, un *espace géométrique* ou *espace localement annelé* $E = (X, \mathcal{O}_X)$ est un espace topologique X muni d’un faisceau d’anneaux $\mathcal{O}_X : \text{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ tel que, pour tout $x \in X$, la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$, soit $\mathcal{O}_{X,x} = \lim_{\rightarrow U \ni x} \mathcal{O}_X(U)$, soit un anneau local c’est-à-dire avec un unique idéal maximal m_x . Par exemple, si A est un anneau, on considère $\text{Spec}(A)$ (lire ‘spectre premier de A ’) l’espace géométrique dont les points sont les idéaux premiers de A , avec la topologie de Zariski — ou une base d’ouvert est formée des $D(f) = \{p \in \text{Spec}(A); f \notin p\}$, f parcourant A , un ouvert quelconque pouvant s’écrire $D(I) = \{p \in \text{Spec}(A); I \not\subseteq p\}$, avec I un idéal de A — et dont le faisceau est donné par $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(D(f)) = \mathcal{O}_f = A[f^{-1}] = A[X]/(fX - 1)$, et, pour $U = D(I)$ ouvert quelconque, par $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(U) = \lim_{\leftarrow D(f) \subseteq U} \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}(D(f))$, et dont la fibre en p est donc $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A),p} = A[(A-p)^{-1}]$. On désigne par Ann la catégorie des anneaux, et par Esg la catégorie des espaces géométriques, où un morphisme $(\psi, \theta) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est une application continue $\psi : X \rightarrow Y$ avec un morphisme $\theta : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \circ \psi^{-1}$ tel que, pour

tout $x \in X$, l'homomorphisme induit $\theta_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,\psi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ soit local i.e. vérifie $\theta_x^\sharp(m_{\psi(x)}) \subseteq m_x$. Alors $\text{Spec} : \text{Ann}^{\text{op}} \rightarrow \text{Esg}$ est pleinement fidèle. Pour tout espace géométrique on note $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}_X(X) \simeq \text{Hom}_{\text{Esg}}(E, \text{Spec}(Z[T]))$ l'anneau des sections globales de E , ou 'fonctions' sur E , on a canoniquement $A \simeq \mathcal{O}(\text{Spec}(A))$, et on a l'adjonction

$$(\mathcal{O} : \text{Esg} \longrightarrow \text{Ann}^{\text{op}}) \dashv (\text{Spec} : \text{Ann}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Esg}),$$

c'est-à-dire que naturellement en A et en E , on a

$$\text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \mathcal{O}(E)) \simeq \text{Hom}_{\text{Esg}}(E, \text{Spec}(A)).$$

Ensuite, tout espace géométrique E détermine un foncteur

$$\mathcal{S}E = \text{Hom}_{\text{Esg}}(\text{Spec}(-), E) : \text{Ann} \rightarrow \text{Ens},$$

et notamment, si $E = \text{Spec}(A)$ alors $\mathcal{S}\text{Spec}(A) = \text{Hom}_{\text{Ann}}(A, -) =_{\text{def}} \text{Sp}(A)$. Et pour tout foncteur $\mathcal{X} : \text{Ann} \rightarrow \text{Ens}$ on détermine, par extension de Kan, une *réalisation géométrique* $r(\mathcal{X}) = \lim_{\rightarrow a \in \mathcal{X}(A)} \text{Spec}(A)$. On a l'adjonction :

$$(r : \text{Ens}^{\text{Ann}} \longrightarrow \text{Esg}) \dashv (\mathcal{S} : \text{Esg} \longrightarrow \text{Ens}^{\text{Ann}}),$$

c'est-à-dire que naturellement en E et en \mathcal{X} , on a

$$\text{Hom}_{\text{Esg}}(r(\mathcal{X}), E) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}^{\text{Ann}}}(\mathcal{X}, \mathcal{S}(E)).$$

On pose $\mathcal{O}(\mathcal{X}) =_{\text{def}} \mathcal{O}(r(\mathcal{X}))$. On a donc bien sûr l'adjonction composée

$$(\mathcal{O} : \text{Ens}^{\text{Ann}} \longrightarrow \text{Ann}^{\text{op}}) \dashv (\text{Sp} : \text{Ann}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ens}^{\text{Ann}}),$$

c'est-à-dire que naturellement en A et en \mathcal{X} , on a

$$\text{Hom}_{\text{Ann}}(A, \mathcal{O}(\mathcal{X})) \simeq \text{Hom}_{\text{Esg}}(\mathcal{X}, \text{Sp}(A)).$$

Alors un *schéma* — soit un *pré-schéma* dans l'ancienne terminologie, où les schémas étaient les pré-schémas séparés — peut se définir de deux façons équivalentes, l'une 'géométrique', l'autre 'fonctorielle'. Ou bien comme espace géométrique $E = (X, \mathcal{O}_X)$ dont tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert $V \subseteq X$ tel que $(V, \mathcal{O}_X[V])$ soit un schéma affine i.e. de la forme $\text{Spec}(A)$. Ou bien comme foncteur $\mathcal{X} : \text{Ann} \rightarrow \text{Ens}$ 'local' et possédant un 'recouvrement d'ouverts affines' (nous ne précisons pas le sens ici de ces derniers termes 'local' et 'recouvrement d'ouverts affines'). L'équivalence entre les deux manières est réalisée par $r \dashv \mathcal{S}$. Ainsi chaque anneau A , objet typiquement algébrique, est remplacé par son schéma affine $\text{Spec}(A)$, objet constituant en quelque sorte la pensée topologique de l'anneau en question — dont on constate qu'elle suffit à reconstituer l'anneau même — puis de tels objets sont collés entre eux pour constituer les objets fondamentaux du discours algébrico-géométrique. Tel est, pour la géométrie algébrique à la manière de Grothendieck, le premier pas de la formulation du rapport fondamental entre l'idée d'anneau et l'idée d'espace, la façon

dont les idées d'équation et de topologie se croisent pour constituer la géométrie algébrique.

Ceci rappelé, ce qui nous intéresse est le point suivant : en partant de l'esquisse de topologie introduite par Burroni, on peut effectivement continuer et obtenir une esquisse mixte dont les réalisations soient les schémas. Autrement dit, comme l'idée de topologie, tout ce qui figure dans la définition ci-dessus des schémas, les idées d'anneaux, d'anneaux locaux, de voisinages affines, tout cela donc s'esquisse, se spécifie en termes de limites projectives et inductives. Une variante intéressante serait de considérer à la base non pas l'esquisse de topologie mais l'esquisse d'esquisse projective, puis de caractériser, parmi les esquisses projectives celles de la forme $\omega(X)$, pour X espace topologique, etc. Et on peut même aussi esquisser la catégorie des schémas au-dessus d'un schéma fixé X , par une esquisse mixte $\sigma[X]$. On peut d'ailleurs procéder suivant la définition géométrique, ou suivant la définition fonctorielle. Notre suggestion se formule alors ainsi : examiner la généralité du genre $\sigma[X]$ au sein des esquisses mixtes quelconques, et notamment déterminer si en pratique en mathématiques on a besoin d'autres esquisses mixtes que celles-là. Si la réponse était négative, cela signifierait en effet la complétude de l'empyrie grothendieckienne dont nous parlions plus haut. Sinon, il serait intéressant de voir ce qui alors échapperait à la géométrie algébrique, ou si l'on veut ce qui ne serait pas 'algébrique'... au sens de Lagrange ... ou de Grothendieck.

On pourra aussi envisager parallèlement l'élaboration d'une discipline dite *La Théorie Algébrique* modelée sur le parangon de *La Géométrie Algébrique*, en remplaçant, au départ de la mise en place ci-dessus, la catégorie Ann des anneaux par la catégorie Esq des esquisses projectives. L'idée alors est de considérer que les théories de A -modules sont exemplaires au sein des théories algébriques. Ainsi, on pourra chercher une théorie spectrale des esquisses projectives, soit la construction d'un spectre $\text{Spec}(\sigma_{\text{Proj}})$ associé à toute esquisse projective et en constituant une suffisante pensée topologique. Ce à quoi le théorème du diagramme localement libre sera indispensable : il s'agira d'abord d'élaborer une bonne notion d'esquisse projective locale, puis de construire le diagramme localement libre associé à σ_{Proj} dans la catégorie des esquisses projectives locales en question. Les esquisses mixtes pertinentes seraient alors celles correspondantes à des faisceaux en esquisses projectives locales... et toute théorie serait localement algébrique. Ainsi encore, de même que Grothendieck considère que le cadre naturel de l'algèbre linéaire est la catégorie Mod des modules (A, M) , où $A \in \text{Ann}$ et $M \in A\text{-Mod}$, on posera que le cadre naturel des questions d'algébricité est la catégorie Real des réalisations $(\sigma_{\text{proj}}, R)$, avec $\sigma_{\text{proj}} \in \text{Esq}$ et $R \in \text{Ens}^{\sigma_{\text{proj}}}$. On pourrait faire de même sous l'angle des monades en considérant la catégorie Alg des algèbres de monades, ayant pour objets les $(C, T, (X, \theta))$ où C est une catégorie, T une monade sur C et (X, θ) une algèbre de T ; mais alors il y a deux notions naturelles de morphismes, suivant que l'on désire relever aux algèbres ou étendre aux algèbres libres un foncteur de C à C' . On pourrait aussi commencer avec les opérades ..., voire avec le cadre plus général encore de la catégorie Mon des monoïdes (C, M) ou *monoïdes M en des catégories monoïdales variables C* .

Mais restons avec la question des esquisses mixtes. Voici maintenant trois autres formulations utiles de ce qu'est une théorie 'en général' : les *initialisations*, les *axiomatisations*, et les *esquisses concrètes*. À travers ces trois notions, on peut en fait plus aisément développer concrètement les exemples de théories mixtément esquissables. Car en effet, comme observé dans l'article où j'introduisais les *algèbres figuratives* et sur lequel je reviendrai tout à l'heure, il se trouve que tout ce qui se spécifie avec l'une de ces notions se spécifie avec les autres, c'est-à-dire que *ces trois notions sont en un sens équivalentes entre elles et avec celle d'esquisse mixte*. Mais l'équivalence est faible, car, dans les traductions, les tailles des données spécificatrices ne sont pas conservées nécessairement.

Une *initialisation* — notion mise en relief par le groupe ADJ vers 1975 — consiste en la donnée d'une catégorie S et d'un ensemble de couples de sous-catégories emboîtées $D \subseteq C \subseteq S$, un modèle étant un élément R de Ens^S tel que

$$R \upharpoonright_C \simeq \text{Libre}_{\upharpoonright_D}(R \upharpoonright_D),$$

ce qui signifie que pour tout foncteur $\Gamma : C \rightarrow \text{Ens}$ on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\text{Ens}^C}(R \upharpoonright_C, \Gamma) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}^D}(R \upharpoonright_D, \Gamma \upharpoonright_D).$$

On comprend donc qu'ici il s'agit de *spécifier certains objets comme libres* sur d'autres, de même que, par exemple, l'ensemble des entiers est un monoïde libre sur 1. Bien sûr, cela revient à spécifier $R \upharpoonright_C$ comme une certaine extension de Kan, calculable par limites inductives, et donc peut s'exprimer par esquisse mixte.

Une *axiomatisation* — notion dégagée par Andreka et Nemeti vers 1978 — consiste en la donnée d'une catégorie S et d'une famille de cônes projectifs *discrets* $(q_e : V \rightarrow D_e)_{e \in E}$ dans la catégorie Ens^S , un modèle étant un élément R de Ens^S tel que

$$R : S \rightarrow \text{Ens}, \quad \prod_{e \in E} \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(D_e, R) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(V, R) \quad \text{soit surjectif.}$$

Ici, le style est celui des *modèles de sites* — qu'on ne confondra pas avec la description des *faisceaux sur un site* que nous avons envisagée plus haut — où l'on exprime des *conditions de recouvrements*, à ceci près qu'on n'impose aucune représentabilité.

Une *esquisse concrète* — notion introduite par Lair et moi-même vers 1979 — consiste en la donnée d'une catégorie S et d'une famille de cônes projectifs chacun du type $(q_k : V \rightarrow D_k)_{k \in K}$ dans la catégorie Ens^S . Un modèle est alors un élément R de Ens^S tel que

$$R : S \rightarrow \text{Ens}, \quad \lim_{\rightarrow k \in K} \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(D_k, R) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(V, R).$$

La donnée $d = (d_k : V \rightarrow D_k)_{k \in K}$ détermine un morphisme

$$t\langle d \rangle : j_{\text{Ens}^S}(D) \rightarrow \hat{V} \in \text{Ens}^{\text{Ens}^S},$$

que l'on appellera la formule de d , et alors la condition ci-dessus pour que R soit un modèle signifie que \hat{R} inverse la formule, et se réécrit :

$$\hat{R}(t\langle d \rangle) : \hat{R}(j_{\text{Ens}^S}(D)) \simeq \hat{R}(\hat{V}).$$

Par exemple, si $\text{Yon}_S : S^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}^S$ est le plongement de Yoneda relatif à S , avec, pour tout B de S , $\text{Yon}_S(B) = \text{Hom}_S(B, -)$, on a un tel cône dans Ens^S sous la forme $(\text{Yon}_S q_l : \text{Yon}_S \Sigma \rightarrow \text{Yon}_S C_l)_{l \in L}$, pour chaque cône inductif dans S , $(q_l : C_l \rightarrow \Sigma)_{l \in L}$. Et aussi, à chaque cône projectif $(p_k : \Pi \rightarrow B_k)_{k \in K}$ dans S est associé le cône projectif (à une seule jambe) dans Ens^S , qui est la flèche de factorisation $(\lim_{\rightarrow k \in K} \text{Yon}_S B_k \rightarrow \text{Yon}_S \Pi)$. Cette notion fait donc le pont entre les esquisses mixtes et les modèles de sites, entre l’approche par les esquisses et celles par les topos classifiants, et — comme on voit — au plus près de la notion de diagramme localement libre. Toutefois dans l’esquisse concrète on n’impose pas que les D_k soient des modèles. En fait, vu justement le théorème du diagramme localement libre, on ne nuirait pas à la généralité en le supposant ; et du coup, chaque $(D_k)_{k \in K}$ devient localement libre sur son V , et par limite inductive on associe alors à chaque objet X de $\text{Proj}(\text{Ens}^S)$ un autre objet $D(X)$ libre sur lui ... Ce que l’on spécifie ainsi détermine alors une monade sur la catégorie $\text{Proj}(\text{Ens}^S)$.

Et, que ce soit pour les axiomatisations ou les esquisses concrètes, on pourrait songer à remplacer la catégorie Ens^S par une catégorie quelconque C . En fait, en utilisant le plongement de Yoneda $\text{Yon}_{C^{\text{op}}} : C \rightarrow \text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ donné pour tout A de C par $\text{Yon}_{C^{\text{op}}}(A) = \text{Hom}_C(-, A)$, les cônes projectifs $(q_k : V \rightarrow D_k)_{k \in K}$ dans C donnent lieu à des cônes $(\text{Yon}_{C^{\text{op}}}(q_k) : \text{Yon}_{C^{\text{op}}}(V) \rightarrow \text{Yon}_{C^{\text{op}}}(D_k))_{k \in K}$ dans $\text{Ens}^{C^{\text{op}}}$, et les modèles R dans C des premiers s’identifient aux modèles X dans $\text{Ens}^{C^{\text{op}}}$ des seconds qui, de plus, sont représentables par un objet R de C , soit tels que : $X \simeq \text{Hom}_C(-, R)$.

En tous cas — nonobstant des précisions nouvelles possibles du genre de celle que je donnerai tantôt dans la dernière partie de cette conférence, pour les compacts numériques de dimension finie (ou cndf) et la continuité — il semblait acquis au début des années 80 que les théories en général, étaient, dans leur version analytique, exprimables via les esquisses mixtes ou leurs variantes ci-dessus, telles les conditions de structures libres et les conditions de recouvrements. Et acquis aussi que, pour les versions plus synthétiques, les monades restaient un horizon idéal. Nombre de praticiens s’arrangeaient ainsi de traiter la *théorie des théories* d’une façon bâtarde, par le couple de la théorie des monades d’un côté et de la théorie des esquisses projectives de l’autre. On fera le parallèle avec le couple de la géométrie synthétique euclidienne et de la géométrie analytique cartésienne. Sauf qu’à faire mâtiner ces idées par celle de pro-objet, on aboutit en effet, avec notamment les *esquisses concrètes*, à une théorisation où la question de la présentation par propriétés diagrammatiques universelles (le côté analytique et pragmatique des ‘esquisses’), et celle de la spécification des constructions localement libres (le côté synthétique et fissa des ‘monades’) finissent par fusionner, comme une accomplissement de la pulsation entre syntaxe et sémantique.

Un bon cadre pour mettre en forme cette pulsation, et notamment penser ensemble les deux façons d’être diagrammaticien — je veux dire l’ehresmannienne, analytique et élémentaire, où tout se spécifie syntaxiquement par cônes, et l’autre, à la manière des monades, où tout est dit, sémantiquement, par l’exhibition des structures libres, que l’on peut voir comme des diagrammes de termes — me paraît être celui des *algèbres figuratives*, dont je dirai quelques mots, sans réellement

prendre le temps de détailler.

On appelle *théorie figurative* ou *figuration* la donnée de deux catégories F et S — dites catégorie des figures (ou arités) et substitutions et catégorie des supports et transformations — la donnée d'une catégorie C dite des compositions, avec un foncteur $L : F \rightarrow C$ bijectif sur les objets, et la donnée d'un foncteur $D : F^{\text{op}} \times S \rightarrow \text{Ens}$. Pour chaque *figure* ou *arité* α , Le foncteur $D^b(\alpha) = D(\alpha, -) : S \rightarrow \text{Ens}$ est considéré comme une *figure concrète* à réaliser, et un élément d de $D^b(\alpha)(X) = D(\alpha, X)$, est considéré comme une réalisation concrète dans le support X de la figure α , il est éventuellement noté $d : \alpha \rightarrow X$, ou bien $\alpha \xrightarrow{d} X$ ou encore $X \xleftarrow{d} \alpha$, et dit simplement *dessin* de α dans X . Alors une *algèbre figurative* est un couple (X, A) où X est un objet de S et où $A : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ est un foncteur tel que

$$A \circ L^{\text{op}} = D(-, X).$$

Si $c : L(\beta) \rightarrow L(\alpha)$ est un morphisme de C alors

$$A(c) : D(\alpha, X) \rightarrow D(\beta, X) : d \mapsto A(c)(d) := dc$$

est pensée comme l'action de la loi c qui transforme un dessin d de figure ou arité α dans X , $\alpha \rightarrow X$, en un dessin dc de figure ou arité β dans X , $\beta \rightarrow X$, ce que nous explicitons par l'écriture : $(\alpha \xrightarrow{d} X) \xrightarrow{L(\beta) \xrightarrow{c} L(\alpha)} (\beta \xrightarrow{dc} X)$. Et pour mettre en même temps en évidence que les compositions sont des coefficients qui opèrent à droite sur les dessins nous écrivons simplement :

$$(X \xleftarrow{d} \alpha)(L(\alpha) \xleftarrow{c} L(\beta)) = (X \xleftarrow{dc} \beta).$$

Dans une figuration, on appelle *diagrammes de figures* un foncteur $\delta : I \rightarrow F$, et une figure ϕ est dite concaténée de δ suivant d si $d = (d_i : \delta_i \rightarrow \phi)_{i \in I}$ est un cône inductif tel que, pour tout S on ait $D(\phi, S) \simeq \lim_{\leftarrow i \in I} D(\delta_i, S)$. On exprime donc ainsi une condition de faisceau pour les foncteurs $D(-, S)$. On considère alors que ϕ est constituée d'un arrangement suivant I des fragments δ_i , et on dit que ϕ est *composée* ou *complexe* relativement à ses composants *simples* les δ_i , et on écrit : $\phi = \int_{i \in I}^D \delta_i$.

Lorsque, pour un α donné, $D^b(\alpha) = D(\alpha, -) : S \rightarrow \text{Ens}$ n'est pas représentable comme un $\text{Hom}_S(r(\alpha), -)$, on considère que α est une arité (ou figure) *paradoxe*, qui ne peut pas être conçue (représentée) comme un objet $r(\alpha)$ de S .

L'analyse d'une théorie figurée commence donc avec la considération de la complexité et de la paradoxalité des figures. Bien entendu, si l'on étend S^{op} en Ens^S , toute figure α devient non-paradoxe, puisqu'alors représentable par $D^b(\alpha)$. Alors la condition de recollement idéal $\phi = \int_{i \in I}^D \delta_i$ s'écrit bien sûr dans Ens^S sous la forme projective : $D^b(\phi) \simeq \lim_{\leftarrow i \in I} D^b(\delta_i)$.

Le foncteur canonique $Q : \text{Ens}^S \rightarrow D^b * L^{\text{op}}$ dans la somme amalgamée de D^b et L^{op} est bijectif sur les objets, et une algèbre de la figuration équivaut à la donnée d'un foncteur $\Theta : D^b * L^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ tel que, pour un certain X de S , avec $\text{Eva}_X = \text{Hom}_{\text{Ens}^S}(\text{Hom}_S(X, -), -) = \hat{X}$ défini par $\text{Eva}_X(R) = R(X)$, on ait :

$$\Theta \circ Q = \text{Eva}_X.$$

On a ainsi une deuxième présentation d'une figuration, comme un foncteur

$$Q : \text{Ens}^S \rightarrow K$$

bijectif sur les objets, une algèbre étant donc spécifiée dans le 'fissa' : $\Theta \circ Q = \text{Eva}_X$.

Voici une troisième présentation ou variante, 'compactifiée', de la définition des figurations. En fait D détermine un distributeur — au sens de Bénabou — $\Delta : F \dashrightarrow S$, L détermine un distributeur $\Lambda : F \dashrightarrow F$, soit $\Lambda = L^\circ \otimes L$, avec $L \dashv L^\circ$, et l'on a un morphisme $v' : 1 \rightarrow \Lambda$; d'où un distributeur composé $P = \Delta \otimes \Lambda : F \dashrightarrow S$ et une transformation $v : \Delta \rightarrow P$. On retient donc, pour spécification d'une *figuration*, la donnée de deux distributeurs $\Delta, P : F \dashrightarrow S$ et d'un morphisme $v : \Delta \rightarrow P$, et l'on appelle alors *algèbre* un distributeur $\Sigma : S \dashrightarrow 1$ muni d'un $\lambda : \Sigma \otimes P \rightarrow \Sigma \otimes \Delta$ tel que — et c'est là 'faire fissa' encore :

$$\lambda.(\Sigma \otimes v) = 1_{\Sigma \otimes \Delta}.$$

Par là aussi on touche aux descriptions des théories cohomologiques et calculs de satellites, mais c'est déjà une autre histoire.

Aussi encore, l'idée de figuration peut bien être comprise comme suite d'un travail plus ancien sur les *ébauches* et *machines*, où l'on procédait, sans usage de propriétés universelles, à la spécifications de *lois locales*. Une théorie était considérée comme "ébauchée" par la donnée d'une *machine*, une machine étant définie comme un foncteur $M : A \rightarrow \mathcal{D}(B)$, où $\mathcal{D}(B)$ est la catégorie des petits diagrammes $D : I \rightarrow B$ dans B , un morphisme de D vers D' étant un couple (F, ϕ) d'un foncteur $F : I \rightarrow I'$ et d'une transformation naturelle $\phi : D \rightarrow D' \circ F$. On pense alors aux $M(\omega)$ comme à des opérations locales sur B . Comme en fait on a un plongement canonique $\mathcal{D}(B) \rightarrow \text{Cat}^{B^{\text{op}}}$, la donnée de M détermine un foncteur $M : A \rightarrow \text{Cat}^{B^{\text{op}}}$, ou encore un foncteur $H : B^{\text{op}} \times A \rightarrow \text{Cat}$. Sous cette forme H le lien avec les figurations est clair, et sous la forme M , c'est le lien avec les ensembles de parties $\mathcal{P}(X)$ et les relations binaires qui se voit bien. Cela suggère de développer, comme une quatrième présentation, l'idée de *figuration 2-dimensionnelle* ou *2-figuration*, où Cat — ou Graph — remplacerait Ens .

Mais restons ici avec la deuxième, voire la première de nos présentations.

Lorsque $S = F$ et que $D = \text{Hom}_S$, en considérant que C joue le rôle de la catégorie $\text{Alg}(\mathbb{T})_L$ des \mathbb{T} -algèbres libres, on voit que l'on retrouve les algèbres de monades. Ainsi envisagée, à partir de la version à la Linton de la théorie des algèbres de monades, notre définition ci-avant avait déjà été proposée en substance par Lambek — voir ses *catégories opérationnelles*, et aussi par Coppey — voir sa notion de *\mathcal{D} -algèbre*, comme une libération de la contrainte d'avoir à utiliser un représentable $\text{Hom}_S(-, X)$.

Lorsque S est la catégorie Graph des graphes, que F est une sous-catégorie de S , et que $D = \text{Hom}$, on obtient les *algèbres graphiques* de Burroni — et les machines ou 2-figurations sont cousines de ses *algèbres 2-graphiques*. Les fabrications, des algèbres figuratives d'un côté, des algèbres graphiques de l'autre, ont eu lieu à la même époque, mais avec des motivations assez différentes. Dans sa

perspective, Burroni pouvait poser et résoudre le problème de l’algébricité sur les graphes, sur le topos Graph considéré par lui, et à juste titre, comme plus fondamental que Ens pour les pratiques catégoriennes. Depuis, le développement qu’il a donné aux *algèbres polygraphiques* a montré la fécondité de sa conception. De mon côté, la motivation était plutôt de garantir un cadre général suffisant a priori où les pratiques synthétiques du genre “monades” et les pratiques analytiques du genre “esquisses mixtes” — et ce que je nommais plus haut pulsation entre syntaxe et sémantique — puissent s’unifier ou du moins se confronter naturellement, à la suite de l’idée d’esquisse concrète.

La deuxième formulation ci-avant — celle avec $Q : \text{Ens}^S \rightarrow K$, se rapproche directement de la description des algèbres d’une monade sur Ens^S , et non plus sur S . Il faudrait préciser les conditions, notamment que Q soit bijectif sur les objets. Ainsi les algèbres figuratives, d’une part, sont équationnelles, et, d’autre part, sont représentables.

La première formulation est la plus praticable pour construire effectivement *ce que l’on se figure* d’une situation théorique donnée. Les idées à mettre en œuvre sont assemblées dans F , et, simultanément, S est déterminée de sorte que ces idées — les α — puissent s’y concrétiser — par les foncteurs $D^b(\alpha)$ telles que pour tout $X \in S$ l’ensemble $D^b(\alpha)(X)$ soit bien celui des réalisations de α dans X . Sous cette forme on peut présenter aisément et naturellement l’essentiel de ce que l’on introduit comme “théorie”. Par exemple la géométrie euclidienne travaille avec des figures comme droites, segments et cercles, des constructions de base comme la prise du centre d’un cercle ou de la médiatrice d’un segment ; ce sont bien des compositions figuratives, de l’arité “point” vers l’arité “cercle” pour la première, de l’arité droite vers l’arité segment pour la seconde. On obtient donc une figuration de la géométrie euclidienne en prenant ces figures et pour supports les espaces affines euclidiens. De même pour les géométries à la Klein. De même les algèbres partielles, comme les corps, se décrivent : dans un corps il y a une opération de prise de l’inverse, pour les non-nuls, ce qui est donc une composition de l’arité “élément” vers l’arité “élément non-nul”. On décrit de même le calcul des imaginaires. De même le calcul infinitésimal, etc. C’est au fabricant de toute figuration de considérer suffisamment de structuration préalable pour les objet X de S de sorte à savoir définir et construire les $D^b(X)$ auxquels il songe. L’idéologie directrice n’est donc pas éloignée de celle des spectres et schémas, où justement chaque espace géométrique E est, dans sa saisie diagrammatique, compris par son spectre $\mathcal{S}E : \text{Ann} \rightarrow \text{Ens}$; alors Ann joue le rôle de S , Esg^{op} celui de F , et \mathcal{S} celui de D^b .

Et cela dit, l’idée pratique essentielle pour les figurations est d’imaginer une *géométrie illimitée a priori* pour les arités des opérations. Cette idée peut sembler démesurée, comme disent les joueurs de Go de certains coups. Mais à la fin des années 70, je songeais que dans la situation d’algébricité basique “à la Lawvere” il y avait deux aspects soudés, l’équationalité et l’existence d’adjoint à gauche ou de structures libres — et c’est cela qu’en son temps avait mis en relief au plan catégorique la thèse de Lawvere — et que l’on pouvait peut-être y gagner à les séparer, puisque l’on disposait maintenant du théorème du diagramme localement

libre. Et puis, le fait de l'illimitation est bien la condition nécessaire pour *faire entrer le non-algébrique dans le rôle interne de la gestion de la géométrie des dites arités*, de sorte à ne laisser en surface que les opérations. Disons que l'approche est mixte — entre opération et topologie — de vouloir des opérations, données dans C , sur la base d'une sorte d'espace, décrit donc par F .

Mais montrons comment l'on sait a priori que 'tout' peut se figurer. Si S est une catégorie, et si $S' = \text{Ens}^S$, $F' = (\text{Ens}^{S'})^{\text{op}}$, et $D^b(\alpha)(X) = \alpha(X)$, on forme une figuration où peut s'exprimer le fait qu'une flèche donnée quelconque $w : \alpha \rightarrow \beta$ de F' est inverser par une algèbre (X, A) . Pour cela on prend C' constituée, en sus de F' via L' , d'une flèche extra $c : L'(\beta) \rightarrow L'(\alpha)$ vérifiant $c.L'(w) = 1_{L'(\alpha)}$, $L'(w).c = 1_{L'(\beta)}$. Mais alors, cela s'applique si l'on considère une théorie décrite par une esquisse concrète de base S , de 'formule' $\hat{R}(t\langle d \rangle) : \hat{R}(j_{\text{Ens}^S}(D)) \simeq \hat{R}(\hat{V})$. On obtient donc une figuration, que, du reste, l'on peut lire à la deuxième manière — celle des $Q : \text{Ens}^S \rightarrow K$ — comme la donnée de

$$\text{Ens}^{\text{Ens}^S} \rightarrow \text{Ens}^{\text{Ens}^S} [t\langle d \rangle^{-1}].$$

Ainsi, 'tout' peut se spécifier par *lissage de la situation* en montant des S aux $\text{Ens}^{\text{Ens}^S}$, et par, dans une telle catégorie, le *calcul des fractions* et la détermination des représentables et la *détermination des très représentables*.

On peut encore relier le figuratif au graphique par le fait suivant, que montrent Adámek et Rosický : toute catégorie mixtément esquissable Ens^σ , c'est-à-dire — suivant la caractérisation de Lair — toute catégorie *modelable* ou encore *accessible*, admet un plongement plein accessible dans la catégorie des graphes

$$\text{Ens}^\sigma \rightarrow \text{Graph}.$$

Vu ce que nous venons d'exposer sur le lien entre le mixtément esquissable et le figuratif, cela suggère la thèse à préciser : *au sein du figuratif le graphique occupe une position d'universel*. On pourra alors chercher à construire le figuratif général sur la base du graphique.

Mais ici, dans le thème envisagé, il est opportun d'en terminer en indiquant comment ces "théories" au-delà du projectif, et qui, sous divers habillages pratiques — et jusqu'aux formulations en termes d'algèbres figuratives —, fournissent à peu près tout, sont cependant directement associées à des esquisses projectives ! Il s'agit de ceci : si σ est une esquisse mixte — par exemple associée à une esquisse concrète ou à une figuration —, alors sous de faibles conditions de 'cohérence', il existe un site classifiant $X[\sigma]$, et dans le topos dit *classifiant* $\text{Ens}^{\omega(X[\sigma])}$ un "modèle" de σ noté $\Sigma_0 : \sigma \rightarrow \text{Ens}^{\omega(X[\sigma])}$ et universel, soit tel que les modèles de σ dans tout topos \mathcal{E} soit les composés $m.\Sigma_0$ de Σ_0 par les morphismes géométriques $m : \text{Ens}^{\omega(X[\sigma])} \rightarrow \mathcal{E}$. Et en réalité on montre que les modèles d'un site sont des faisceaux d'algèbres de Boole sur ce site — soit des structures algébriques exprimables par limites projectives et la double monade des parties Π . En fait les points du topos classifiant sont les éléments du diagramme localement libre sur le vide. Ainsi, dans de nombreux cas, la description par σ est pensable, en terme des transformations continues m depuis l'espace ou

topos classifiant, soit via une esquisse projective $\omega(X[\sigma])$. Ainsi *toute théorie “est” une topologie* ou une esquisse projective. Et comme une esquisse projective est une donnée algébrique, c’est-à-dire projectivement esquissable, on retrouve ce sentiment, déjà exprimé plus haut par un autre biais, que si l’on ajoute au strictement algébrique le topologique ou la continuité, tout s’exprime. Ce qui va bien sûr *dans le sens de l’Histoire*, puisqu’en effet, empiriquement c’est, après la séparation en algèbre et topologie, à une recombinaison des deux idées que l’on a assisté, avec par exemple la notion de fibré comme formulée par Ehresmann ; et cette notion mixte, ou la notion toute aussi mixte de schéma de Grothendieck, semble bien ‘suffisante’ pour le mathématicien au travail en quête de structures. Le gag ici est donc ceci : *toute théorie est algébrique parce que toute théorie est topologique !*

3 ... et notamment la topologie, ...

La topologie s’esquisse donc mixtément, mais l’esquisse est grosse. Comme l’indiquait Ageron ce matin, l’esquisse de Burroni peut être rendue purement projective, mais en restant grosse. La notion de topologie est donc “presque algébrique”. Les topologies se décrivent aussi dans le cadre des monades — cadre réputé “algébrique” — comme \mathcal{U} -catégories. Burroni a montré ces deux points. On peut même considérer, comme nous venons de le suggérer, qu’elles se comprennent dans le cadre, algébrique évidemment, des algèbres graphiques, au sens du même Burroni, en utilisant la monade \mathcal{U}' sur $(\text{Ens}^{\overleftarrow{\quad}})$, et même plutôt à partir de Π . Cependant la monade \mathcal{U} , ou \mathcal{U}' , et aussi bien la monade Π , n’ont pas de rang limité. Il serait naturel, à cet endroit, de traiter de Π -esquissabilité.

Ou bien aussi, les topologies sont algébriques, et les schémas ensuite, parce que ce qui compte c’est non pas l’espace X mais l’esquisses projective $\omega[X]$, et l’algébricité de la spécification d’une esquisse projective de ce type, algébricité qu’il faudrait détailler. Il s’agirait de construire une esquisse dont les modèles soient les esquisses projectives du genre $\omega[X]$. Il existe une esquisse mixte ayant cette propriété.

Ou bien, plus près de la tradition de l’algèbre universelle, on sait, suivant Edgar, qui utilise la description de Kelley des topologies, que la classe des espaces topologiques est équationnellement définissables, par des équations sur les opérations Lim_δ indexées par les ensembles dirigés $\delta = (D, \leq)$, attribuant une limite à certaines familles $f : D \rightarrow X$; mais alors ces opérations ne sont pas partout définies et univoques sur tel espace X considéré : ou bien on les voit comme opérations à valeurs dans X mais partielles, $X^D \hookrightarrow C \rightarrow X$, ou bien on les voit comme partout définies mais à valeurs dans l’ensemble des parties de X , $X^D \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Évidemment, il n’est pas difficile de ‘figurer’ le système des opérations ‘partielles’ considérées comme systèmes d’opérations totales $X^\delta \rightarrow X$, pour δ parcourant la catégorie des ensembles dirigés, en notant $D(\delta, X) =_{\text{def}} X^\delta$ l’ensemble C des δ -suites convergentes.

On peut aussi certainement construire une autre “algébricité” des topolo-

gies en termes de 2-algèbres et de pseudo-algèbres — notion introduite par Burroni encore. Ainsi si l'on exprime une topologie sur un ensemble X en termes d'opérateurs de fermeture sur $\mathcal{P}(X)$, les applications continues d'un espace X vers un espace Y sont des morphismes de pseudo-algèbres, c'est-à-dire des diagrammes non pas commutatifs mais "sous-commutatifs".

D'un autre côté encore, on peut axiomatiser les propriétés de la monade des parties \mathcal{P} sur Ens , pour obtenir les *univers algébriques*, de sorte que, dans un tel cadre, qui constitue bien entendu un langage d'ordre supérieur, les topologies soient définissables par des équations. Ce qui est liée à leur Π -esquissabilité.

Ainsi, à des "détails" près — grosseur des cônes, illimitation du rang, partialité ou multivocité des lois, sous-commutativité, intervention du foncteur \mathcal{P} ou ordre supérieur du langage— on peut voir les topologies comme algébriques, en plusieurs sens. Et même dans le cas des espaces compacts, l'algébricité au sens des monades montrée par Manes ne se réduit pas exactement à des opérations de rangs bornés et partout définies.

Ainsi il y a beaucoup de points de vues suivant lesquels le topologique est algébrique. Mais en même temps, de façon presque duale, on constate que l'essentiel de ce qui excède le strictement algébrique se laisse capturer par ajout de topologique, et l'on a donc l'ambition d'affermir l'algébricité du topologique lui-même, qui on le voit est presque ça, mais pas tout-à-fait, de sorte à assurer du même coup l'algébricité de 'tout'.

À l'occasion de cette Journée je voudrais, pour conclure ma conférence, offrir une précision dans ce sens — dont j'espère que l'exploration qui précède aide à apprécier la portée voulue — en spécifiant comment les variétés compactes numériques de dimension finie, et les applications continues entre icelles, constituent une catégorie, notée CNDF, algébrique *au sens le plus strict*, mais de diverses façons, pratiquement indiscernables entre elles.

Considérons l'intervalle réel fermé $I = [0, 1]$. Nous appelons *bout* une fonction $B : I^N \rightarrow I$ qui commute aux fonctions α affines par morceaux et continues, ainsi qu'avec le produit et l'inf de toute paire d'éléments de I — soit $\alpha(B(s)) = B(\alpha \circ s)$, $B(s.s') = B(s).B(s')$ et $B(\inf(s, s')) = \inf(B(s), B(s'))$ — et telle que pour tout entier n il existe une suite s telle que $B(s) \neq s(n)$. Si U est un ultrafiltre non trivial sur N , alors on détermine un bout associé B_U par :

$$B_U(s) = \text{Sup}\{x; \{n; x \leq s(n)\} \in U\} = \text{Inf}\{x; \{n; x \geq s(n)\} \in U\},$$

— ce dont l'idée nous vient évidemment de l'Analyse Non-Standard — et inversement si B est un bout on détermine un ultrafiltre non trivial

$$U_B = \{X \subseteq N; B(\text{Car}(X)) = 1\}.$$

Il y a ainsi une correspondance bijective entre les fonctions bouts et les ultrafiltres non triviaux.

Pour toute suite s , et toute fonction *bout* B , $B(s)$ est forcément un point d'accumulation de s , et donc, si s converge, $B(s)$ est la limite de s ; ainsi *toute fonction bout B prolonge l'opération partielle \lim qui prend la limite des suites*

convergentes. Il y a ainsi plusieurs fonctions bouts — autant que d'ultrafiltres non-triviaux — fournissant donc autant de prolongements utiles de \lim .

On peut ensuite démontrer que : *si une fonction B est un bout alors, pour toute fonction continue $f : I \rightarrow I$, B commute avec f , soit $f(B(s)) = B(f \circ s)$.*

Et enfin, surtout, on a la réciproque :

Si B est une fonction bout fixée arbitrairement, alors une fonction $f : I \rightarrow I$ est continue si et seulement si f commute avec cette fonction B , soit, pour toute suite $s : N \rightarrow I$ dans I :

$$f(B(s)) = B(f \circ s).$$

Si donc on considère que B est une opération partout définie d'arité infinie dénombrable (ou ω) sur I , les applications continues sont les morphismes d'algèbre de (I, B) vers (I, B) . Alors si K est un compact numérique de dimension finie, ou cndf, c'est-à-dire si K peut s'écrire, avec p et c entiers et $u, v : I^p \rightarrow I^c$ deux applications continues :

$$K = \{(x_1, \dots, x_p) \in I^p; u(x_1, \dots, x_p) = v(x_1, \dots, x_p)\},$$

toute suite s dans K s'identifie à la donnée de p suites s^1, \dots, s^p dans I , et l'on équipe K d'une opération bout $B\langle K \rangle$ définie par

$$B\langle K \rangle(s) = B\langle K \rangle(s^1, \dots, s^p) = (B(s^1), \dots, B(s^p)).$$

On pose $\beta_B(K) = (K, B\langle K \rangle)$. Ainsi la catégorie CNDF des applications continues entre cndf est une sous-catégorie *pleine* de la catégorie algébrique ${}^\omega\text{Ens}$ ayant pour objet les couples (E, B) où E est un ensemble et $B : E^N \rightarrow E$ une fonction quelconque, un morphisme de (E, B) vers (E', B') étant une fonction $f : E \rightarrow E'$ telle que, pour toute suite $s : N \rightarrow E$, on ait :

$$f(B(s)) = B'(f \circ s).$$

Ce qui s'écrit aussi : $f \circ B = B' \circ f^N$.

On ne confondra pas cette catégorie ${}^\omega\text{Ens}$ avec la catégorie des algèbres de la monade sur Ens d'endofoncteur $(-)^{\omega}$. Notamment une fonction bout n'est jamais une telle algèbre, car cela signifierait que, pour toute suite double $s(n, m)$ dans I , on aurait $B(n \mapsto B(s(n))) = B(n \mapsto s(n, n))$.

On souligne qu'il existe plusieurs plongements de la catégorie des cndf dans ${}^\omega\text{Ens}$, au moins autant que de bouts B sur I , ou encore que d'ultrafiltres non triviaux sur N . On a réussi à éliminer le caractère partiel de l'opération de limite sur les suites, en introduisant le bout pour toute suite, gagnant ainsi une algébricité stricte, mais en revanche s'est introduite une espèce d'ambiguïté sur le plongement

$$\beta_B : \text{CNDF} \rightarrow {}^\omega\text{Ens},$$

qui en effet varie avec B ou le U qui le détermine. L'élimination ici du partiel par le choix d'un U demanderait à son tour à être étudiée, en termes cohomologiques ou galoisiens, car il s'agirait là de mesurer comme une *ambiguïté de l'algébrisation stricte*.

Bien entendu, on ne change rien au problème d’ambiguïté inhérent à la situation si l’on considère plutôt que I est équipé non pas d’une fonction bout B mais de l’ensemble \mathcal{B} de toutes les fonctions bout possibles, voire de l’ensemble plus vaste \mathcal{C} de toutes les fonctions d’arité $\leq \omega$ sur I qui commutent avec toutes les fonctions continues de I dans I . Toutefois cette version des faits permet le rapprochement avec le résultat de Sangalli affirmant que toute “clôture abstrait finitaire” (“abstract finitary clone”) C est isomorphe à la clôture de toutes les opérations, sur un ensemble X_C , qui sont préservées par un monoïde M_C de transformations de X_C . On devrait de même, avec les bouts et \mathcal{B} , étudier la clôture infinitaire \mathcal{C} et retrouver I .

4 ... et tout est algébrique, topologiquement.

On peut donc maintenant reporter le résultat sur les représentations β_B et la problématique qui s’ensuit pour l’ambiguïté de l’algébricité stricte du topologique, du cas topologique standard vers les théories quelconques, et insister sur ceci : tout est algébrique, oui, peut-être, on a certainement les outils généraux pour rendre cela vrai, à commencer par la montée dans les S , Ens^S , $\text{Ens}^{\text{Ens}^S}$, $\text{Ens}^{\text{Ens}^{\text{Ens}^S}}$, et ainsi de suite, et les calculs de fractions dans ces catégories, et l’analyse de la représentabilité en icelles ; mais cependant, pour chaque théorie que l’on voudra algébriser au sens le plus strict, il pourra se présenter plusieurs procédures indiscernables pour obtenir une telle algébricité. On arrive à ce ‘principe’ : *L’algébricité stricte règne, et elle est ambiguë.*

Dans le travail de la pulsation entre les deux sens du diagrammatique, contenus dans l’objet *diagramme localement libre*, pensé comme un spectre, ou encore dans le *topos classifiant*, c’est cette ambiguïté qui doit être en première ligne, considérée comme subsumant *une vue géométrique de l’équivoque de l’algébricité.*

Dans le double cadre général des esquisses mixtes et des figurations — dans le premier cas la priorité est sur la syntaxe, dans le second elle est sur la sémantique — on peut examiner la question de l’algébricité des théories, avec, comme outil de base, le théorème du diagramme localement libre — ‘lieu’ du travail même de la métamorphose de l’équivoque de la mise en forme algébrique — qui représente, nous y insistons, le point de jonction entre les deux sens, syntaxique et sémantique, du diagrammatique. Dans les *esquisses mixtes*, les limites inductives spécifiées permettent de traiter d’opérations partielles ou équivoques. Et ce traitement se retrouve dans les *figurations* via la souplesse du cadre des dessins D , où notamment peut jouer le foncteur parties \mathcal{P} : alors le défaut d’algébricité est absorbé dans la géométrie des arités $\phi \in F$, ou aussi bien — quand \mathcal{P} est mis en avant — dans la composition des relations. Le rapprochement avec les *machines* fait comprendre qu’en fait on traite de ‘lois locales’. Avec les *esquisses concrètes*, on arrive à ne plus distinguer entre syntaxe et sémantique, quand les diagrammes localement libres fournissent les esquisses concrètes canoniques. On n’omettra pas de mettre en œuvre le rôle naturel ici du graphique dans la représentation des catégories accessibles en jeu.

Tout spécialement, le cas de la théorie dite *topologie* est central. D’abord parce que, historiquement parlant, il n’est pas de structures réelles autres que les structures algébrico-topologico-différentielles, et on devrait bien a posteriori chercher une explication théorique à ce fait ! Ensuite parce que, à la manière de la *Géométrie Algébrique*, on peut en fait envisager le développement de la *Théorie Algébrique*, en terme de recollement de spectres de théories algébriques, c’est-à-dire suivant une pensée topologique. Pensée dont on a vu la relation au graphique, dans l’analyse en termes de T-catégories.

C’est donc en termes topologiques, ou topologico-graphiques, que l’on s’interrogera sur l’algébricité des théories, et notamment de la théorie dite *topologie*. L’horizon du développement envisageable est quelque chose comme ceci : toute théorie est algébrique, mais en quelque sorte elle l’est localement, et en un sens algébrico-diagrammatique du terme “localement” — manière de dire qui est *aussi* comme une actualisation de l’usage général dans la détermination des théories de l’opération \lim , d’origine topologique en effet ; l’analyse précise de ceci en chaque cas doit révéler en somme l’ambiguïté de l’accès à l’algébricité stricte recherchée. Cela vaut en particulier pour la théorie dite *topologie*, comme on le voit précisément avec les calculs de *bouts*. Dans cet esprit, un premier exercice que nous proposons serait de déterminer, au sein des esquisses projectives, la généralité des esquisses du genre $\omega(X) \otimes \tau(\Omega, \Phi)$. Un autre exercice utile serait l’examen du lien entre les Π -catégories et les co-catégories. Ensuite, il s’agirait donc en effet de traiter du *théorique algébrique* comme on traite, avec les schémas, du *géométrique algébrique*, et, à cet effet, il faudrait développer une théorie d’esquisses projectives spéciales pour le questionnement sur l’algébricité des théories mixtément esquissées, qui seraient en quelque sorte les *esquisses projectives locales*, puis construire le diagramme localement libre en esquisses projectives locales engendré par toute esquisse mixte, et ainsi de suite, à la manière des spectres et schémas. Ce qui constituerait bien en effet l’analyse topologique ou géométrique voulue ici du problème de l’algébricité.

Et il est clair — si nous l’avons bien expliqué — que, pour une telle recherche, on dispose d’un cadre synthétique général *a priori*, à savoir celui de la présentation des théories dans le fissa des figurations $Q : \text{Ens}^s \rightarrow K$, où une “algèbre” est un $\Theta : K \rightarrow \text{Ens}$ et un $X \in S$ tels que $\Theta \circ Q = \text{eva}_X$, cadre suffisant pour exprimer tout ce que l’on veut mettre dans une théorie. Et simultanément, nous avons à soutenir la relation au graphique, cas concret qui, par son universalité possible, est en quelque sorte “exemplaire”, et qui, de plus, avec le polygraphique, se laisse poursuivre naturellement en une théorie “dimensionnée”. Nous disposons, dans ce cadre, aussi bien dans le général figuratif que dans le concret graphique, d’un outil analytique systématique pour construire les spectres des modèles, à savoir le théorème du diagramme localement libre pour les catégories mixtément esquissables.

Voilà terminée l’exposition sommaire du projet de *La Théorie Algébrique*. Cher Albert, j’espère que cela t’aura bien réjoui.

guitart@math.jussieu.fr

« Stupeur sacrée! la preuve se fait par les abîmes »

« Venez, vous dont l'œil étincelle
« Pour entendre une histoire encore
« Approchez, je vous dirai celle
« **De Burroni, il est d'accord**
« **Il fait partie de cette race**
« **D'autodidactes singuliers**
« Enfants voici des bœufs qui passent
« Cachez vos rouges tabliers »

Évidemment, vous savez d'où viennent les quelques vers que j'ai ainsi maltraités : de Victor Hugo. Je sais de lui ce que, plus ou moins, tout le monde sait. Je connais l'autre poème mis en musique par Georges Brassens : « Gastibelza l'homme à la carabine... Chantez dansez villageois la nuit gagne le Mont Falu, le vent qui vient à travers la montagne me rendra fou ».

Je connais Esmeralda (je regarde TF1). Je sais que certaine légende veut qu'Hugo fut sensible au sort des « à terre » qu'il abreuva quand même, sur les conseils héroïques et doucement souriants de son papa. Je sais qu'il aimait faire un brin de causette. Je sais que la RTT l'angoissait presque autant qu'elle angosse Ernest-Antoine : il craignait qu'elle l'empêchât d'admirer assis sous un portail ce reste de jour dont s'éclaire la dernière heure du travail. Je sais que demain dès l'aube à l'heure où blanchit la campagne...

Je sais aussi que grâce à Victor Hugo une modeste famille franc-comtoise a pu améliorer l'ordinaire de son repas le soir du 26 février 1802 : le fait est rapporté par Alphonse Allais, donc incontestable. Notons au passage une grossière erreur d'Hugo : ce siècle n'avait pas deux ans mais à peine plus d'un. Or donc on vient en la mairie de Besançon déclarer une naissance ce 26 février 1802. L'employé aux écritures est épaté à l'énoncé des nom et prénom de l'enfant : Hugo, Victor. Rentré chez lui, il va quérir deux bouteilles de vieux bourgogne qu'il met sur la table du dîner, et devant l'étonnement de sa femme et de ses enfants il leur dit : « il nous faut fêter l'événement ; c'est aujourd'hui qu'est né Victor Hugo, notre grand poète national ».

Enfin, cet été, tout à fait par hasard, je suis tombé sur un vers extrait d'un texte inédit d'Hugo intitulé « L'Âme ». Ce vers, vous l'avez deviné, c'est

« *Stupeur sacrée! la preuve se fait par les abîmes* »

Ça ne donne pas vraiment envie de lire le reste... Mais, bon, il se trouve que ça convenait parfaitement au sujet de notre petite causerie, comme vous l'allez voir dans un instant.

Je dois donc des excuses à tous ceux qui se sont torturés à chercher une contrepèterie, qui se sont précipités dans le stupre, qui se sont demandé où diable on s'abreuve, qui ont été plongés dans des abîmes de perplexité, abîmes

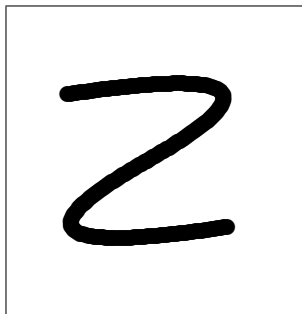
qui, précisément, ne trouvaient pas le moindre « t » avec lequel ils auraient pu se contrepâître.

Je me suis d'ailleurs senti obligé d'en proposer quelques unes, qui vous montreront que je ne recule devant rien¹.

Mais vous êtes là à me faire perdre mon temps avec Victor Hugo alors que j'ai à vous parler de tout autre chose.

Mais d'abord j'ai un service à vous demander : comme on ne peut pas dire que votre œil étincelle vraiment pour l'instant, nous allons faire une petite pause et vous voudrez bien faire remplir vos verres et prévoir une première rafale de petits fours ; en fait il n'y a rien de plus déprimant que de s'adresser à des gens stationnés à un mètre d'un buffet appétissant, qui ont le regard braqué dessus, et qui ne cessent de prier pour que vous arrêtiez au plus vite vos divagations. Dès cette formalité accomplie je suis à vous.

Il faut que je vous fasse un aveu. J'ai été bien embarrassé quand René Guitart m'a demandé de dire quelques mots sur le parcours d'Albert. (Quelques mots... S'il avait su!). On aime bien me confier ce genre de mission parce qu'on sait que je dis plein de bêtises et que sur le nombre il y en a toujours une ou deux qui arracheront un sourire aux personnes un peu dures d'oreille qui ont déjeuné tard. Et lorsque, essentiellement grâce à Élisabeth, j'ai mieux appris ce qu'a été l'itinéraire d'Albert, je me suis dit que tout ce que je pourrais en raconter passerait pour de la mystification, tellement cette histoire est hors du commun. Alors j'ai décidé de me munir d'un petit drapeau, que je tiendrai baissé chaque fois qu'il s'agira de faits parfaitement avérés, et que je brandirai bien haut pour toute la sauce fantaisiste qu'il y aura autour². Ce drapeau reproduit un motif qui revient très souvent dans un des livres d'images qui ont fasciné Albert pendant toute son enfance, livre que j'ai eu la chance de retrouver :



¹Ce burgrave, il est honni! - Ce beau Rony est un pur! - La Laponie est burinée. - Le bucolique adhère au nid. - La rumeur des Burroni enfle. - L'ex-colonie aura ce bus-là.

²Pour la version écrite de ce texte, le drapeau levé sera représenté par l'utilisation de caractères gras. Ceux-ci signaleront donc les entorses à la vérité historique...

Albert j'implore ton indulgence. Il est possible que ce que je vais dire, même drapeau bas, comporte des inexactitudes. J'ai été à la meilleure source possible en interrogeant longuement Élisabeth. J'espère que tu n'hésiteras pas à rectifier si nécessaire.

Alors allons-y.

Inutile de tourner autour du pot, de se voiler la face. Regardons la réalité : Albert Burroni **n'est qu'un** métèque.

Sa famille fuit l'Italie de Mussolini au milieu des années trente. **Ce n'est déjà pas signe d'un bien grand patriotisme. À sa place, quand bien même vous ne seriez pas restés pour aider le Duce dans son œuvre exaltante, vous auriez eu au moins la délicatesse d'aller en Belgique, au Soudan, je ne sais pas, moi. Et bien pas du tout : eux ne se gênent pas pour foncer sur Paris et se vautrer à deux pas du Palais-Royal. La France n'a nul besoin d'ébénistes, mais ça n'empêche pas Domingo Burroni, dont c'est le métier, de priver de pain de bons ouvriers français.** Pis ! il va jusqu'à **pervertir** la noblesse de ce pays en s'octroyant les bonnes grâces de la Comtesse de Polignac, qui lui accorde sa protection et en fait son fidèle homme de bois. **Mais l'homme n'est pas de bois, et, la furia italiana aidant**, Assunta Burroni met au monde, à Paris, un beau jour de 1935, l'Albert qui nous occupe.

Le petit Albert mettra à profit ses fréquents séjours avec ses parents dans le domaine de Bois-Rouvray, chez la Comtesse de Polignac, à Muzillac, en Bretagne, pour s'installer dans l'univers des livres, qui demeurera à jamais le sien. En effet, pour des raisons mystérieuses, il couche dans la bibliothèque. Il va découvrir là des trésors de la littérature, et les promenades entomologiques de Jean-Henri Fabre qui le marqueront profondément. Il se passionne pour la nature, l'observe méticuleusement : écureuils, hirondelles, fourmis, coléoptères. Sa curiosité est insatiable. Il a alors 14-15 ans. Jusque là, il a été un écolier très irrégulier. **Vous pensez, un italien !** Il lui arrive d'être le premier de sa classe, **mais c'est sûrement lorsqu'il est entre les mains d'un de ces instituteurs aveuglés par les doctrines collectivistes qui ne voient aucun inconvénient à ce que, non content de voler le pain des français, la canaille cosmopolite vienne encore s'emparer de leur instruction. Dieu merci, certains maîtres résistent à la pourriture morale et savent, surtout en pleine guerre, quelle place doit être assignée à un simple émigré transalpin dans l'échelle de notre société. Quand Albert a la chance d'être confié à un de ces braves**, il est traité de « sale ritel », il est le dernier de la classe, **et c'est bien fait.**

Il faut dire que, en raison de la guerre et de la situation précaire de ses parents, il a été placé à plusieurs reprises avec ses frères dans des familles, souvent dans la région de Meaux. Cela n'a pas dû aider à une scolarité très paisible. Il garde pourtant un souvenir extraordinaire d'une année où il est écolier à Lizy-sur-Ourcq. Il a cette fois un instituteur épatant qui le marquera.

Le jeune homme est précoce. À 10-11 ans, il se livre déjà à une intense réflexion philosophique. Attiré par le christianisme, il songe à être prêtre. Mais **l'infâme Darwin guette et ne rate pas l'occasion de détourner un jeune**

de plus des voies divines. Il faut dire qu'en même temps qu'il découvre la théorie de l'évolution, Albert se rend compte avec une stupeur (non sacrée) qu'il existe... plusieurs religions. **Le malin s'insinue alors définitivement en lui.** La robe de bure, qui exerçait sur lui une grande fascination, perd d'un seul coup tout prestige. **Désormais, elle sera honnie, cette bure.**

Passé la crise mystique, à l'âge de treize ans, plus rien ne s'oppose à ce qu'il dessine son premier graphe ! Ce sera l'arbre généalogique des héros de la mythologie grecque, réalisé à l'aide d'un dictionnaire. Il passe son certificat d'études à 14 ans, fait deux années de sixième, puis ses études classiques s'interrompent. Il s'agit d'apprendre un métier et non de perdre son temps dans les écoles. Ce sera l'ébénisterie, le métier de son père. Ainsi, à 15-16 ans, il est en stage chez Curieux, Galerie Vivienne. Il se fait en fait exploiter, comme beaucoup d'apprentis, et est utilisé comme larbin. On lui fait faire des tâches répétitives inintéressantes : placage, rabot. Il gagne l'équivalent d'alors d'un euro par semaine ! Il doit remettre ce pactole à sa mère, mais, je ne sais si la vue de celle-ci baissait, toujours est-il qu'il réussit à économiser sou après sou pour s'acheter ce qui le passionne : des éléments pour un microscope, et bien sûr des livres. Il paraît aussi qu'il livrait des salles à manger à travers Paris en tirant une charrette à bras au milieu des automobiles. C'était le seul moment de son travail qu'il appréciait. Alors là il y a trois possibilités : ou les salles à manger étaient très exigües à l'époque, ou les charrettes étaient XXL, ou je lève le drapeau³.

Mais je l'abaisse aussitôt pour affirmer qu'Albert est sûrement la personne ici qui a écrit le plus d'articles. Allons, allons, n'ayez pas peur. En effet, entré dans un centre d'apprentissage à Reims, il passera tout son temps libre à s'instruire à l'aide d'une encyclopédie. **Tout le monde se souvient de la grande panne de photocopieurs qui sévit en Champagne en 1952.** Il recopiera donc à la main une grande quantité d'articles sur les sciences, la nature, les minéraux...

Il passe alors les grandes vacances à Paris, loin de la noblesse bretonne. Il n'a rien de spécial à faire et hante les librairies. Chez Boubée, au quartier latin, il découvre une trilogie consacrée à l'entomologie, la biologie et la paléontologie. Il en fait son miel. Il achète aussi cet été-là son premier livre de mathématiques : un manuel de première (je rappelle qu'il n'est pas allé au-delà de la sixième !). Enfin il s'initie à la chimie et à la physique, et achète son premier microscope.

Il termine son apprentissage à Reims, et à nous deux Paris ! **La vie commence à dix-neuf ans !** Il va travailler chez Viola où il construit des billards électriques ! Et en effet, à l'époque, il flippe. Il écoute la radio en travaillant et découvre ainsi la musique. Il en deviendra un fin connaisseur et, vois-tu, Charlotte, il est possible que ton goût et ton grand talent musical proviennent d'un atelier de menuiserie où trimait ton père. Le bouquin de maths de première a dû lui plaire car il achète maintenant le *Papelier*, livre universitaire, et se met immédiatement à y travailler. Il est suivi dans un centre d'orientation professionnelle, où on croit comprendre qu'il n'est pas heureux dans le métier qu'il fait. Signe du destin : son interlocutrice au centre s'appelle Madame Galois. Un jour il va la voir avec le *Papelier* sous le bras et le lui montre en lui disant que

³Albert précise que c'étaient des salles à manger démontables.

c'est ça qui l'intéresse. Stupeur de la dame ! Elle n'y comprend rien et préfère en référer aux autorités supérieures, c'est-à-dire à Madame Lise Teissier, directrice du centre d'orientation. Là encore il a fallu que le destin agisse car Lise Teissier a une fille, Marianne, universitaire et mathématicienne (qui deviendra Marianne Guillemot). Marianne est ici. Quelle chance ! Merci, Madame. Je crois pouvoir dire que votre présence est un des témoignages d'aujourd'hui auxquels Albert sera le plus sensible. C'est à vous, ainsi qu'à votre mère, qu'il doit d'avoir pu franchir une étape cruciale dans sa vie. C'est la première fois que des adultes s'intéressent à son parcours scientifique. Il trouve chez les Teissier un accueil chaleureux et généreux. Il en restera marqué à jamais. Lise lui ouvre sa porte, sa bibliothèque, sa discothèque, Marianne suggère qu'il reprenne un parcours scolaire. Le voilà inscrit aux cours par correspondance en classe de première : il n'a sauté que quatre classes ! Il obtient son premier bac à vingt ans, du premier coup, avec une brillante note en... français. Mais la deuxième partie sera plus coriace : ses deux tentatives échoueront. Il n'a pas appris à travailler, il est isolé, il n'a aucun ami dans la même situation que lui. Mais ces échecs ne l'empêchent nullement de continuer à apprendre ce qui l'intéresse vraiment. Il achètera ainsi les premiers volumes publiés par Bourbaki. Hermann lui fait des prix à la demande de Lise et Marianne : alors là Mesdames, chapeau ! Parce que pour obtenir une réduction de Berès, il faut se lever de bonne heure !

Viennent les sinistres années de l'armée. C'est la guerre d'Algérie. Il y passera deux ans et demi, de 1958 à 1961.

Il avait songé à rentrer dans les ordres, le voilà en treillis, et je peux vous dire qu'il a les boules !

Il commence par faire ses classes en Forêt Noire. C'est extrêmement dur. Cela se passe tout près d'Oberwolfach, mais Albert ignore alors que c'est encore un signe du destin.

Alors là Albert, ça t'épate ! Tu te demandes comment j'ai percé le mystère, comment j'ai su que c'était en Forêt Noire. Et bien j'étais en cherville avec quelqu'un qui a vendu la mèche.

Paradoxalement (**paradoxe allemand ?**), l'Algérie sera bien moins rude. Il échappera aux combats en étant affecté à la comptabilité des postes d'essence. Il n'y prendra pas de galon, mais n'y aura presque rien à faire. À l'époque et dans ces parages, il n'y a pas de poste d'essence sans soleil de plomb. Pour s'abriter pendant de très longues siestes, Albert se niche dans des troncs d'arbres creux où il découvre pas mal de théorèmes d'existence, qui précèdent son travail sur l'essence. Car Lise Teissier lui envoie en Algérie les Bourbaki à mesure qu'ils paraissent. Il s'y consacre avec enthousiasme, fait tous les exercices.

Vous voyez donc que son affectation en Algérie aura été pour Albert une planque constante.

C'est à une vie pas si vile que cela qu'il revient en 1961, puisqu'il réussit un examen spécial d'entrée à l'université pour les non bacheliers, essentiellement grâce à l'épreuve de chimie ! Vous vous attendez dès lors à un parcours fulgurant : il n'en est rien. Albert, qui n'est pas plus fait pour se couler dans le moule universitaire qu'il ne l'a été pour être un écolier modèle, va perdre un temps considérable. Il n'assiste guère aux cours, dont il connaît souvent tout le contenu

depuis longtemps, mais il néglige aussi d'aller passer des examens qu'il aurait pourtant réussis sans difficulté. Il finit tout de même par obtenir son diplôme de premier cycle et entre en licence à 30 ans. Il y a quelqu'un qui se félicite du temps qu'il a perdu : c'est Élisabeth, car leur rencontre a lieu dans une salle de travaux dirigés de topologie, quai Saint-Bernard, en 1966. Le choc est tel pour elle qu'elle ne se souvient plus, **l'ingrate**, du nom de l'assistant ! À partir de là, leurs chemins se confondent pour toujours. Sous l'influence bienfaisante d'Élisabeth, l'inclassable autodidacte devient un étudiant standard, qui va aux cours et passe (brillamment) les examens. Les professeurs s'appellent Choquet, Malliavin, Godement, Baouendi, et surtout Charles Ehresmann, dont Albert découvre avec enthousiasme le livre sur les catégories.

Étudiant à la faculté des sciences, Albert y fera une rencontre importante : celle de José-Luis Viviente, enseignant espagnol qui exerce à Jussieu, avec qui il se lie d'amitié.

Son premier métier a-t-il encore une place dans sa vie ? **Certains prétendent que c'est un peu plus tard, après sa rencontre avec Penon, qu'il abandonnera définitivement les mortaises. Il est vrai que l'ébénisterie ne peut plus lui apporter grand chose : il en a fait le tour, il a mené l'ébène à bout. Peut-être est-ce afin d'éviter un trop brusque dépaysement qu'il a choisi les mathématiques où les résultats doivent aussi être établis.**

Albert a toujours eu le sens de l'humour. Un jour, rentrant chez un quelconque mastroquet, il se trouve nez à nez avec une vieille connaissance : le futur fondateur de « Médecins sans Frontières », Rony Brauman (le pur auquel j'ai fait allusion tout à l'heure). De toute évidence, celui-ci avait déjà passé en revue un grand nombre des spiritueux de l'établissement. Et Albert d'apostropher Rony Brauman de façon désopilante : « Tu as bu ! Brauman ! ».

Nous sommes en octobre 1968. Les gros problèmes de circulation que Paris a connu au printemps ont incité les autorités à élargir les voies qui mènent à l'université. Élisabeth, Albert, mais aussi René Guitart, Christian Lair (et plusieurs autres peut-être présents ici), font partie de l'important effectif d'enseignants-chercheurs recrutés cette année-là. Rêvez, jeunes gens : ils n'avaient pas encore terminé leur DEA ! C'est aussi en 68 (avril) que naît Nicolas, premier des enfants Burroni.

Dès lors l'histoire devient plus banale. « *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies* », sa thèse de troisième cycle, est soutenue en 1970. **La présence de Hilton dans son jury sofitel à attester de l'excellence de son travail ?** Je pense que oui. Nommé très rapidement maître-assistant, Albert Burroni va mener une carrière d'enseignant-chercheur à l'image de ce qu'il a toujours été : sans faire de bruit, je veux dire sans ce ram-dam assourdissant que font ceux qui ont le moins à dire et qui ne cherchent qu'à se mettre en avant (vous en avez devant vous un magnifique exemple). Tout se conjuguaient pour le tenir loin des projecteurs : discret, d'une grande finesse, toujours souriant, d'une gentillesse extrême, il ne pouvait évidemment pas devenir une star. Il n'a jamais envoyé de message à notre psychologue (tous@math.jussieu.fr) pour lui

faire part de ses états d'âme.

À partir de 68 et pendant 68 semestres, Albert accomplit dans l'ombre, sans souci du qu'en dira-t-on, un véritable travail de fourmi. D'ailleurs quand il délaisse les mathématiques, c'est pour se consacrer à l'autre grande passion qu'il a conservée : l'entomologie. Et il le fait avec la même immense modestie, allant jusqu'à prétendre que dans ses promenades entomologiques il se contente d'être un compagnon pour son fils Raphaël (lequel marche déjà sur ses traces).

Car Albert a su gérer en bon père de famille les diverses catégories qui font sa richesse : il a fait don à Raphaël de son amour de la nature, à Charlotte de celui de la musique, à Nicolas de ce qui, sans être nécessairement de l'amour, est en tout cas un intérêt évident pour l'informatique.

Bref, qu'il traite un meuble ancien au xylophène, qu'il marque des points et décoche des flèches de toutes catégories, ou qu'il se promène dans la campagne champenoise ou dans les monts d'Auvergne, Albert a dans la vie une seule activité : il cherche la petite bête.

Et dans cette recherche, bien sûr, la reconnaissance tarde à venir. Je me garderai d'entrer dans des spéculations sur ce qu'aurait pu être la carrière d'Albert s'il avait été moins Ehresmanique et s'il s'était consacré, par exemple, aux EDP ou aux mathématiques de la décision : c'est un sujet qui a beaucoup fâché et qu'il serait parfaitement vain d'agiter encore ici. Laissons cela aux historiens. Mais notons tout de même que, si tout ce qui précède montre à quel point il est juste de dire d'Albert qu'il est « sorti du rang », il n'a malheureusement pas réussi à sortir du rang B (il n'y a d'ailleurs même pas songé!), et nous sommes nombreux à penser que ça, c'est vraiment injuste.

Donc la reconnaissance tarde à venir, mais elle vient, et de quelle belle façon !

Les conférences auxquelles nous avons assisté toute la journée ont assez montré l'importance accordée aujourd'hui aux travaux d'Albert. Même ceux qui prétendaient qu'Albert n'était point une flèche admettent aujourd'hui l'importance de sa contribution. Je ne rentrerai pas dans les détails. Je suis bien trop incompétent pour le faire.

Ce qui est remarquable, c'est que cette reconnaissance vient d'un côté où on ne l'aurait peut-être pas attendue : elle est passée par la logique et l'informatique, et vous me permettez de m'en réjouir.

Burroni n'a jamais travaillé avec Jacob, mais il a influencé l'œuvre de Lafont, et c'est sans doute là l'origine de son compagnonnage avec les informaticiens.

L'arrivée d'Albert dans la jeune équipe PPS en 1998 a été pour sa carrière bien plus qu'un post-post-scriptum. Elle a en quelque sorte officialisé cette reconnaissance dont je parlais. Elle lui a surtout fourni un bien précieux : de nouveaux et jeunes interlocuteurs.

Les opérades, dont nul n'aurait au départ donné quatre sous, ont maintenant un grand prix pour les nombreux mathématiciens qui se sont engouffrés dans la brèche.

La coopération entre Albert et René Guitart est exemplaire. **Albert apporte souvent une idée déterminante lorsque Guitart sèche. Inversement, René aide Albert pour des problèmes qui sont davantage dans**

ses cordes, par exemple les questions relatives aux partitions. (Mais il y a d'autres Coppey-rations ; exemple : Lair)

Je tiens aussi à mentionner les relations excellentes qu'Albert a toujours entretenues avec la quasi totalité de ses collègues. Il a enseigné avec les plus grands !

Guitart	Jeulin	Viotte	Cannone
Zisman	Bourdaud	Evrard	Stern
Krivine	Chaperon	Ehresmann	Daniel Lazard
Karoubi	Chenciner	Norguet	A'Campo
Le Potier	Mestre	Daniel Andler	Priouret
Gérardin	Yue Chi Ming	Girardeau	Raviart

Pour des raisons évidentes il n'a presque jamais enseigné sa spécialité. L'exception est un cours de troisième cycle qu'il fit une ou deux fois.

Il a consommé environ 14 directeurs d'UER ou d'UFR, de Bruhat à Vogel.

[*Bruhat, Daniel Revuz, Louis Boutet de Monvel, Karoubi, Azencott, Zisman, Norguet, Yvette Amice, Godement, Lê Dung Trang, Verdier, Baktavatsalou, Laure Élie, Vogel.*]

Il a été considéré comme un très bon camarade de bureau par ceux avec qui il a cohabité. [*Élisabeth, Coppey, Penon, Guitart, Lassaigne, Maltiniotis.*] Une mention spéciale est nécessaire pour Georges Maltiniotis qui a absolument tenu à accueillir Albert dans son bureau à Chevaleret. Il lui a préparé un des bureaux les plus agréables et les plus chaleureux, un véritable petit nid douillet : oui, c'est cela, un bureau-nid.

Alors, et Victor Hugo ? Burroni est un métèque, c'est une affaire entendue. **C'est un sale rital** et plus précisément un **vil** étrusque. Domingo et Assunta venaient d'Arezzo, près de Florence. Mais d'où vient ce nom de *Burroni* ? Rien à voir avec les *burons*, ces petites cabanes de berger disséminées dans les monts d'Auvergne, bien qu'Albert leur rende souvent visite. Non ces « *burons* »-là, qui n'ont d'ailleurs qu'un seul « *r* », sont d'origine wallonne. Le nom « *Burroni* » est bien italien. Les esprits superficiels se hâteraient alors de dire qu'il vient de « *burro* » qui veut dire « *beurre* ». En fait ça n'a rien à voir non plus. **Le sort ne s'est pas à ce point acharné sur Albert pour qu'il soit à la fois rital ET beurre.** Non, « *burroni* » est le pluriel de « *burrone* » qui signifie d'après les bons dictionnaires « *ravin* » et d'après les mauvais « *précipice* », « *gouffre* » ou « *abîme* ». Nous y voilà. *Burroni*, cela peut être les abîmes. Et on est dès lors tenté de pardonner à Hugo son si mauvais vers. On se dit qu'il a tenu à l'écrire malgré tout parce qu'il a eu l'intuition géniale que le destin des abîmes serait un jour d'apporter la preuve, autrement dit que Burroni apporterait la démonstration.

Hugo avait vu juste, et Albert Burroni a donné à notre grand poète national l'éclatante confirmation de son pressentiment.

Ainsi, le destin a souvent montré le bout de son nez au cours de ce récit. Le voici encore, une dernière fois, mais électroniquement. Si vous consultez *Google*

au sujet de « *stupeur sacrée*, etc. », vous pouvez aboutir assez rapidement sur une page web de l'université Paris 7, celle de nos collègues littéraires spécialistes d'Hugo :

<http://groupugo.div.jussieu.fr/groupugo/91-05-25Laforgue.htm>

Et vous découvrirez avec émotion que l'article où ce vers est cité est signé... Laforgue! Cela ne s'invente pas. Il s'agit d'un Pierre Laforgue, collègue que je salue, bien que j'aie compris environ 10% de son texte...

Je voudrais remercier deux artistes pour leur contribution importante à l'événement d'aujourd'hui : Piero della Francesca et Jacques Penon. Tous deux ajoutent à leur talent de dessinateur et peintre celui de mathématicien. Jacques a donné toute la mesure de ce double talent aujourd'hui : d'une part par son excellente conférence, d'autre part en réalisant la remarquable illustration qui figure sur l'affiche annonçant cette journée. Quant à Piero, il a effectué des travaux pratiques illustrant ses leçons de perspective sur les murs de la basilique San Francesco à Arezzo. Ces fresques sont magnifiques.

Je veux aussi, bien sûr, remercier René⁴, qui a orchestré cette journée, Elisabeth⁵, qui m'a fourni tant d'éléments pour conter cette histoire, Annie Sornaga, qui a beaucoup aidé pour le versant italien, et Odile⁶, qui s'est occupée de tout, et au travail de laquelle, comme toujours, il n'y a rien à redire.

Albert, je voudrais te dire qu'en parlant avec les uns et les autres à l'approche de cette journée, j'ai eu la confirmation de ce dont je me doutais depuis longtemps, à savoir qu'en te faisant part ce soir des sentiments d'amitié et d'affection que j'ai toujours eus pour toi, je parle certainement au nom de nos collègues de toutes catégories, et de toutes les personnes présentes ici.

Nous avons tous une faveur à te demander : ne t'en vas pas vraiment. Reviens ici le plus souvent possible. Te croiser souvent dans les couloirs, à la bibliothèque, dans un séminaire, ce sera le seul moyen pour nous d'atténuer la stupeur, la stupeur de voir ce que tu laisses derrière toi en partant : un *burrone*, un gouffre, un abîme.

Paris, 20 septembre 2002
René Cori

⁴Guitart

⁵Burroni

⁶Ainardi

Liste des travaux d'Albert Burroni

- *Esquisse de topologie*, CRAS **271** (1970) 228-230
- *Esquisse de types : catégories munies de limites*, CRAS **271** (1970) 449-452
- *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies* (thèse), Esquisses mathématiques **5** (1970) 87 p.
- *T-catégories (catégories dans un triple)*, Cahiers de T.G.D. **XII** (1971) 215-321
- *Structures 2-algébriques*, (1er colloque sur l'algèbre des catégories, Amiens, 1973 ; résumé), Cahiers de T.G.D. **XIV** (1973) 165-166
- *Structures pseudo-algébriques, 1e partie*, Cahiers de T.G.D. **XVI** (1975) 343-393
- *Algèbres graphiques*, (3e colloque sur l'algèbre des catégories, Amiens, 1980), Cahiers de T.G.D. **XXII** (1981) 249-265
- *Algèbres graphiques*, notes manuscrites (complément à l'article précédent), Cambridge, 1981, 36 p.
- *Algèbres graphiques, suite : les bidules*, Diagrammes **7** (1982) 8 p.
- *Algèbres graphiques internes*, notes manuscrites (complément à l'article précédent), 1983, 44 p.
- *Récurtivité graphique. I : Catégorie des fonctions récursives primitives formelles*, Cahier de T.G.D.C. **XXVII** (1986) 49-79
- *Higher dimensional word problem*, in : *Category theory and computer science*, Paris, 1991 (LNCS vol. **530** Springer) 94-105
- *Higher dimensional word problems with applications to equational logic*, Theoretical Computer Science **115** (1993) 43-62
- (avec Jacques Penon) *Une construction d'un nerf des ∞ -catégories*, in : *Catégories, Esquisses et néoesquisses* (Université de Caen, 1994) 45-55

0.1 Travaux d'Elisabeth Burroni

- *Catégories discrètement structurées*, CRAS **271** (1970) 126-129
- *Structures discrètes et triples*, CRAS **271** (1970) 217-220
- *Catégories discrètement structurées. Triples* (thèse), Esquisses mathématiques **4** (1970) 88 p.
- *Algèbres relatives à une loi distributive*, CRAS **276** (1973) 443
- *Catégories relatives à une loi distributive*, CRAS **276** (1973) 669
- *Loi distributives mixtes*, CRAS **276** (1973) 897
- *T-algèbres non déterministiques*, (résumé), Cahier de T.G.D. **XIV** (1973) 167-168

- *Algèbres non déterministiques et D-catégories*. Cahiers de T.G.D. **XIV**
1973 417-475

0.2 Travaux communs d'Albert et Elisabeth

- *Structures algébriques : thèmes et variations*, Cahier de T.G.D.C. **XXXIII**
(1992) 207-216