T-Catégorie = Monade ds la lax-catégorie SpT des T-spans où T monade sur $\mathcal{E}$

... que ds SpT, on dispose pour $\forall e \in |\mathcal{E}| = |SpT|$, ($Te \xleftarrow{\eta} Ie$, $e \xrightarrow{id_e} e$)

... T-span (Ie, id_e) noté id_e de SpT :

qui n'est pas à proprement parler une identité, mais une lax-identité

... pr $\forall$ T-span $(a, b) : e \dashrightarrow e'$ ($Te \leftarrow \pi \rightarrow e'$), θ', θ''

... des 2-morphismes de SpT qui remplace des égalités :

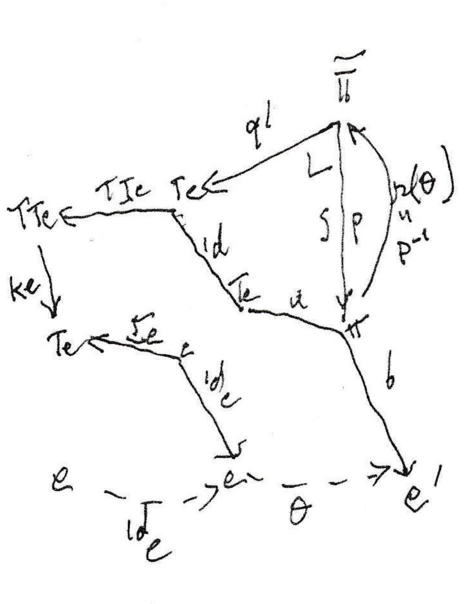
$l(\theta) : \theta \longrightarrow \theta \circ id_e$, $r(\theta) : \theta \longrightarrow id_{e'} \circ \theta$ et $s(\theta, \theta', \theta'') : \theta'' \circ (\theta' \circ \theta) \longrightarrow (\theta'' \circ \theta') \circ \theta$

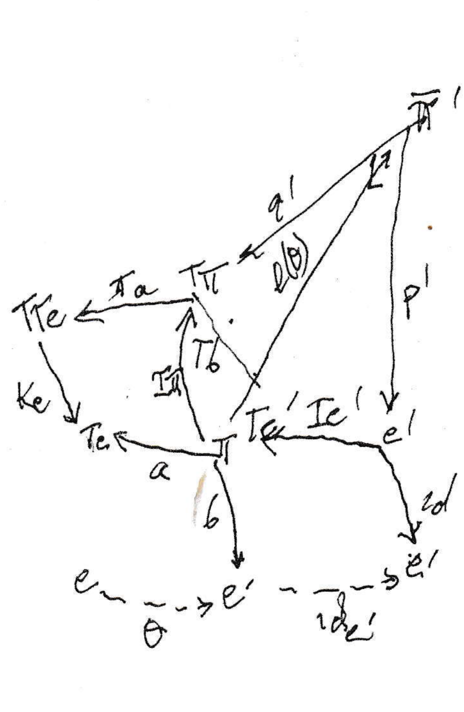
avec des axiomes de cohérence ...

Ceci dit, ici, je suppose que la <u>monade</u> T sur $\mathcal{E}$ est <u>cartésienne</u>,

ce qui implique que l, r, s sont des isos et donc que la

lax-catégorie $SpanT$ est une bicatégorie au sens de Benabou

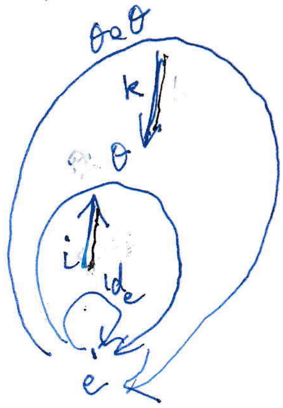




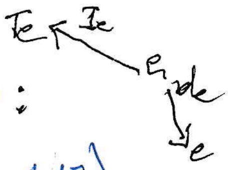
$l(\theta) = [b, I\pi]$

T_Catégorie = Monade ds Span T (lax_Catégorie)

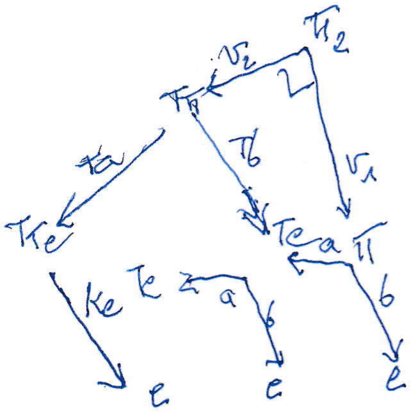
Soit donc (θ, i, k) monade ds $Span(T)$



où ici $id_e = (I_e, id_e)$:



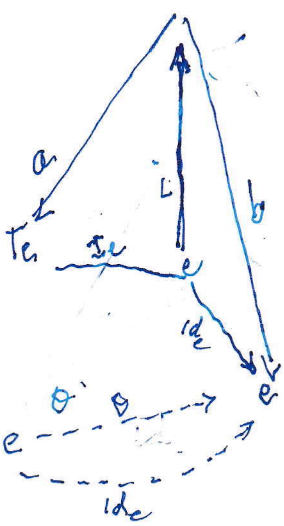
$\theta \circ \theta = (K_e . Ta . v_2, b . v_1)$



Explicitons les données $i : id_e \Longrightarrow \theta$ et $k : \theta \circ \theta \Longrightarrow \theta$ ds Sp T

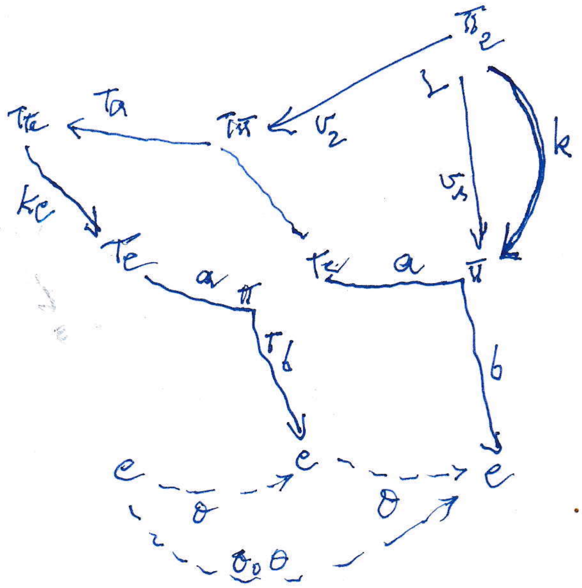
$\theta = (a, b)$

$\theta \circ \theta = (K_e . Ta . v_2, b . v_1)$



vérifie de par def

$$\begin{cases} a . i = I_e \\ b . i = id_e \end{cases}$$



vérifie de par def

$$\begin{cases} a . k = K_e . Ta . v_2 \\ b . k = b . v_1 \end{cases}$$

On a déjà obtenu les 1ères équations d'une T-catégorie ds $\mathcal{E}$.

Pour compléter la Définition d'une Monade (θ, i, k) de $Sp\,T$

on doit rajouter des axiomes de cohérence :

ds lesquels les 2-morphismes $l(\theta)$, $r(\theta)$, $s(\theta)$ se réduisent à des isom lorsque T est une monade cartésienne sur $\mathcal{E}$ et font ainsi de la lax-catégorie $Sp\,T$ une bicatégorie de Bénabou.

$$\begin{cases} k.(i\circ\theta).l(\theta) = id_\theta = k.(\theta\circ i).r(\theta) \\ k.(k\circ\theta).s(\theta) = k.(\theta\circ k) \end{cases}$$

(Voir dessin ci-dessous)

où $r(\theta) : \theta \longrightarrow \theta\circ id_e$, $l(\theta) : \theta \longrightarrow id_e\circ\theta$ et $s(\theta) : \theta\circ(\theta\circ\theta) \longrightarrow (\theta\circ\theta)\circ\theta$

$$\begin{tikzcd}
 & & \theta\circ id_e \arrow[dr, "\theta\circ i"] & & (\theta\circ\theta)\circ\theta \arrow[dl, "k\circ\theta"'] \\
id_e \arrow[r, "i"] & \theta \arrow[ur, "r(\theta)"] \arrow[dr, "l(\theta)"'] & & \theta\circ\theta \arrow[ll, "k"'] & \\
 & & id_e\circ\theta \arrow[ur, "i\circ\theta"'] & & \theta\circ(\theta\circ\theta) \arrow[ul, "\theta\circ k"] \arrow[uu, "s(\theta)"']
\end{tikzcd}$$

il reste à poser $i_1 = (\theta\circ i).r(\theta)$, $i_2 = (i\circ\theta).l(\theta)$, $k_2 = \theta\circ k$ et $k_1 = (k\circ\theta).s(\theta)$

et à traduire ttes ces données ds $\mathcal{E}$ pour obtenir :

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] & U \arrow[l, bend right=60, "a"'] \arrow[l, bend left=60, "b"] \arrow[r, bend left=60, "i_1"] \arrow[r, bend right=60, "i_2"'] & \pi_2 \arrow[l, "k"'] \arrow[l, bend right=30, "r_2"'] \arrow[l, bend left=30, "r_1"] & \pi_3 \arrow[l, bend right=60, "k_1"'] \arrow[l, bend left=60, "k_2"]
\end{tikzcd}$$

pr obtenir une T-catégorie ds $\mathcal{E}$

T-Cat (de $\mathcal{E}$) $\simeq$ lax T-alg de Span$\mathcal{E}$ (bicatégorie)

On remplace les égalités $id_e = b.Ie$ et $b.Tb = b.Ke$ de $\mathcal{E}$

par des 2-morphismes de Span$\mathcal{E}$ $\bar{i} : id_e \Rightarrow \theta \circ Ie$ et $\bar{k} : \theta \circ T\theta \Rightarrow \theta \circ Ke$

lax T-algèbre :

$\theta = Te \xleftarrow{a} \pi \xrightarrow{b} e$, $\quad Te \dashrightarrow_{\theta} e$ $\quad Ie = e \xleftarrow{id_e} e \xrightarrow{Ie} Te$ $\quad$ et $Ke = TTe \xleftarrow{id} TTe \xrightarrow{Ke} Te$ de Sp$\mathcal{E}$

et $id_e = e \xleftarrow{id_e} e \xrightarrow{id_e} e$

avec les axiomes de cohérence :

i.e. $(\theta, \bar{i}, \bar{k})$ est une lax-T-alg si

$$\begin{cases} (\bar{k} \circ ITe).(\bar{i} \circ \theta) = id_\theta = (\bar{k} \circ TIe).(\theta \circ T\bar{i}) \\ (\bar{k} \circ KTe).(\bar{k} \circ TT\theta) = (\bar{k} \circ TKe).(\theta \circ T\bar{k}) \end{cases}$$

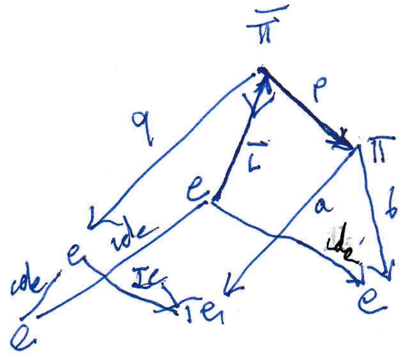
par def $\bar{i} : id_e \Rightarrow \theta \circ Ie$ de Span$\mathcal{E}$ vérifie donc

(id_e, id_e) $\quad$ $(q, b.p)$

ce qui donne, de $\mathcal{E}$, les équations $\begin{cases} q.\bar{i} = id_e = b.p.\bar{i} \\ \text{et de aussi} \\ a.p.\bar{i} = Ie.q.\bar{i} = Ie \end{cases}$

on pose donc $i = p.\bar{i} : e \to \pi$

qui vérifie ① $\begin{cases} a.i = Ie \\ b.i = id_e \end{cases}$!



Par def $\bar{k} : \theta \circ T\theta \Rightarrow \theta \circ Ke$ de Span$\mathcal{E}$ vérifie donc

$(Ta.v_2, b.v_1)$ $\quad$ $(q', b.p')$

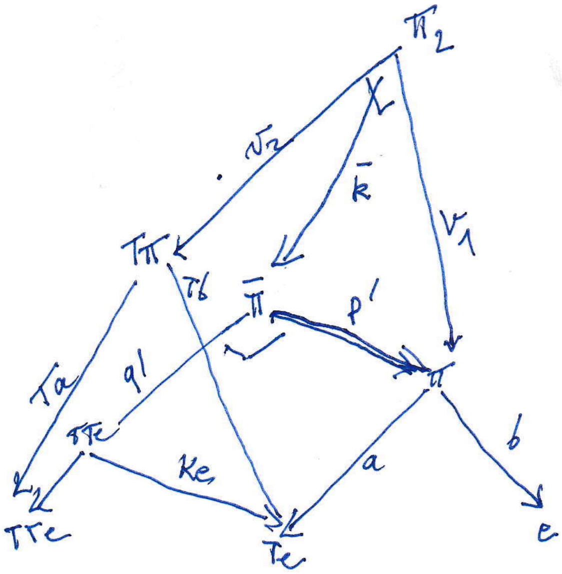
ce qui donne de $\mathcal{E}$ les équations :

$q'.\bar{k} = Ta.v_2$

$b.p'.\bar{k} = b.v_1$

et de aussi $a.p'.\bar{k} = Ke.q'.\bar{k}$

$= Ke.Ta.v_2$



il reste de à poser $k = p'.\bar{k}$

pr obtenir ② $\begin{cases} a.k = Ke.Ta.v_2 \\ b.k = b.v_1 \end{cases}$

① et ② sont les 1ères équations d'une T-catégorie (a, b, i, k) ... / k_1, k_2 ? $\quad i_1, i_2$?

restera à vérifier que les axiomes de cohérence de $(\theta, \bar{i}, \bar{k})$ se traduisent bien

de $\mathcal{E}$ par les axiomes $k.i_1 = id_\pi = k.i_2$, $k.k_1 = k.k_2$