Théories de torsion dans un contexte non-pointé

Andrea Montoli

Università degli Studi di Milano

Séminaire Itinérant de Catégories

Travail en collaboration avec Andrea Cappelletti

Théories de torsion classiques

La notion de théorie de torsion a été introduite par Dickson dans les catégories abéliennes

Théories de torsion classiques

La notion de théorie de torsion a été introduite par Dickson dans les catégories abéliennes et après généralisée par Bourn et Gran au contexte des catégories homologiques.

Théories de torsion classiques

La notion de théorie de torsion a été introduite par Dickson dans les catégories abéliennes et après généralisée par Bourn et Gran au contexte des catégories homologiques.

Définition (Borceux-Bourn)

Une catégorie homologique est une catégorie pointée, regulière et Bourn-protomodulaire

La notion de théorie de torsion a été introduite par Dickson dans les catégories abéliennes et après généralisée par Bourn et Gran au contexte des catégories homologiques.

Définition (Borceux-Bourn)

Une catégorie homologique est une catégorie pointée, regulière et Bourn-protomodulaire (= lemme des cinq court scindé).

Théories de torsion classiques

La notion de théorie de torsion a été introduite par Dickson dans les catégories abéliennes et après généralisée par Bourn et Gran au contexte des catégories homologiques.

Définition (Borceux-Bourn)

Une catégorie homologique est une catégorie pointée, regulière et Bourn-protomodulaire (= lemme des cinq court scindé).

Dans les catégories homologiques les lemmes homologiques classiques sont valides: le lemme des cinq court, le lemme des 9, le lemme du serpent, les théorèmes d'isomorphisme de Noether...

Définition

Une théorie de torsion dans une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

Définition

Une théorie de torsion dans une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. $Hom(T, F) = \{0\} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$;

Définition

Une théorie de torsion dans une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. $Hom(T, F) = \{0\} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$;
2. *pour tout $X \in \mathcal{C}$ il y a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{\eta_X} F \longrightarrow 0$$

avec $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

Théories de torsion classiques

Définition

Une théorie de torsion dans une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. $Hom(T, F) = \{0\} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$;
2. *pour tout $X \in \mathcal{C}$ il y a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{\eta_X} F \longrightarrow 0$$

   avec $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

La suite exacte courte est unique à isomorphismes près,

Définition

Une théorie de torsion dans une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. $Hom(T, F) = \{0\} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$;
2. *pour tout $X \in \mathcal{C}$ il y a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{\eta_X} F \longrightarrow 0$$

avec $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

La suite exacte courte est unique à isomorphismes près, $\mathcal{T}$ est monocoréflexive,

Définition

Une théorie de torsion dans une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. *$Hom(T, F) = \{0\} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$;*
2. *pour tout $X \in \mathcal{C}$ il y a une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{\eta_X} F \longrightarrow 0$$

   avec $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

La suite exacte courte est unique à isomorphismes près, $\mathcal{T}$ est monocoréflexive, $\mathcal{F}$ est épiréflexive.

Définition

Un système de factorisation dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de deux classes replètes de morphismes $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ telles que

Définition

Un système de factorisation dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de deux classes replètes de morphismes $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ telles que

1. *pour tout $e \in \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{M}$ on a $e \downarrow m$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "!"'] \\ C \arrow[r, "m"'] & D; \end{tikzcd}$$

Systèmes de factorisation

Définition

Un système de factorisation dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de deux classes replètes de morphismes $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ telles que

1. *pour tout $e \in \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{M}$ on a $e \downarrow m$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "!"'] \\ C \arrow[r, "m"'] & D; \end{tikzcd}$$

2. *chaque morphisme $f \in \mathcal{C}$ se factorise comme $f = me$ avec $e \in \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{M}$.*

Systèmes de factorisation

Définition

Un système de factorisation dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de deux classes replètes de morphismes $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ telles que

1. *pour tout $e \in \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{M}$ on a $e \downarrow m$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "!"'] \\ C \arrow[r, "m"'] & D; \end{tikzcd}$$

2. *chaque morphisme $f \in \mathcal{C}$ se factorise comme $f = me$ avec $e \in \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{M}$.*

Un système de factorisation est stable si la classe $\mathbb{E}$ est stable par produits fibrés.

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (N) si pour tout

$$\mathrm{T}(K[f]) \xrightarrow{t_{K[f]}} K[f] \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B,$$

où $k = ker(f)$, $kt_{K[f]}$ est un noyau.

Théories de torsion et systèmes de factorisation

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (N) si pour tout

$$\mathrm{T}(K[f]) \xrightarrow{t_{K[f]}} K[f] \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B,$$

où $k = ker(f)$, $kt_{K[f]}$ est un noyau.

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion que satisfait (N), alors les classes

Théories de torsion et systèmes de factorisation

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (N) si pour tout

$$\mathrm{T}(K[f]) \xrightarrow{t_{K[f]}} K[f] \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B,$$

où $k = ker(f)$, $kt_{K[f]}$ est un noyau.

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion que satisfait (N), alors les classes

$$\mathbb{E} = \{\, e \in Arr(\mathcal{C}) \,|\, e \text{ est un conoyau}, \; K[e] \in \mathcal{T} \,\}$$

$$\mathbb{M} = \{\, m \in Arr(\mathcal{C}) \,|\, K[m] \in \mathcal{F} \,\}$$

forment un système de factorisation stable.

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ *est un système de factorisation stable dans* $\mathcal{C}$ *tel que tout* $e \in \mathbb{E}$ *est un conoyau, alors les sous-catégories*

Théories de torsion et systèmes de factorisation

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ *est un système de factorisation stable dans* $\mathcal{C}$ *tel que tout* $e \in \mathbb{E}$ *est un conoyau, alors les sous-catégories*

$$\mathcal{T} = \{\, T \in \mathcal{C} \mid T \to 0 \in \mathbb{E} \,\}$$

$$\mathcal{F} = \{\, F \in \mathcal{C} \mid F \to 0 \in \mathbb{M} \,\}$$

forment une théorie de torsion que satisfait (N).

Définition (Janelidze)

Une structure de Galois (absolue) admissible est une adjonction $\mathrm{F} \dashv \mathrm{G} \colon \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{C}$ *telle que, pour tout* $C \in \mathcal{C}$*, le foncteur* $\mathrm{G}_C \colon \mathcal{A}/\mathrm{F}(C) \to \mathcal{C}/C$ *qui envoie* $f \colon A \to \mathrm{F}(C)$ *par le morphisme* π_2 *dans le produit fibré*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & C \arrow[d, "\eta_C"] \\ \mathrm{G}(A) \arrow[r, "\mathrm{G}(f)"'] & \mathrm{GF}(C) \end{tikzcd}$$

est plein et fidèle.

Définition (Janelidze)

Si $\mathrm{F} \dashv \mathrm{G}$ *est une structure de Galois admissible, un morphisme* $f : C \to D$ *est:*

Définition (Janelidze)

Si $\mathrm{F} \dashv \mathrm{G}$ *est une structure de Galois admissible, un morphisme* $f : C \to D$ *est:*

1. *une extension triviale si le carré de naturalité*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{GF}(C) \arrow[d, "\mathrm{GF}(f)"] \\ D \arrow[r, "\eta_D"'] & \mathrm{GF}(D) \end{tikzcd}$$

est un produit fibré;

Structures de Galois

Définition (Janelidze)

Si $\mathrm{F} \dashv \mathrm{G}$ *est une structure de Galois admissible, un morphisme* $f : C \to D$ *est:*

1. *une extension triviale si le carré de naturalité*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{GF}(C) \arrow[d, "\mathrm{GF}(f)"] \\ D \arrow[r, "\eta_D"'] & \mathrm{GF}(D) \end{tikzcd}$$

   est un produit fibré;

2. *une extension normale s'il est un morphisme de descente effective et les projections de sa paire noyau sont extensions triviales;*

Structures de Galois

Définition (Janelidze)

Si $\mathrm{F} \dashv \mathrm{G}$ *est une structure de Galois admissible, un morphisme* $f : C \to D$ *est:*

1. *une extension triviale si le carré de naturalité*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{GF}(C) \arrow[d, "\mathrm{GF}(f)"] \\ D \arrow[r, "\eta_D"'] & \mathrm{GF}(D) \end{tikzcd}$$

   est un produit fibré;

2. *une extension normale s'il est un morphisme de descente effective et les projections de sa paire noyau sont extensions triviales;*
3. *une extension centrale s'il existe un morphisme de descente effective* g *tel que* $g^*(f)$ *est une extension triviale.*

Proposition (Bourn-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ *est une théorie de torsion, la réflexion* F *forme une structure de Galois admissible.*

Théories de torsion et structures de Galois

Proposition (Bourn-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, la réflexion F forme une structure de Galois admissible.

Définition (Everaert-Gran)

Un foncteur $\mathrm{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories homologiques est protoadditif s'il préserve les suites exactes courtes scindées.

Proposition (Bourn-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, la réflexion F forme une structure de Galois admissible.

Définition (Everaert-Gran)

Un foncteur $\mathrm{F} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories homologiques est protoadditif s'il préserve les suites exactes courtes scindées.

Proposition (Everaert-Gran)

Un foncteur qui préserve 0 est protoadditif si et seulement si il préserve les produits fibrés le long des épimorphismes scindés.

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion telle que le réflecteur F est protoadditif et $f : C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion telle que le réflecteur F est protoadditif et $f: C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *f est une extension normale;*

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion telle que le réflecteur F est protoadditif et $f: C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *f est une extension normale;*
2. *f est une extension centrale;*

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion telle que le réflecteur F est protoadditif et $f: C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *f est une extension normale;*
2. *f est une extension centrale;*
3. *$K[f] \in \mathcal{F}$.*

Proposition (Everaert-Gran)

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion telle que le réflecteur F est protoadditif et $f: C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *f est une extension normale;*
2. *f est une extension centrale;*
3. *$K[f] \in \mathcal{F}$.*

Disons qu'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ satisfait (P) si le réflecteur F est protoadditif.

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{N}$ un idéal de morphismes au sense de C. Ehresmann.

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{N}$ un idéal de morphismes au sense de C. Ehresmann.
Le $\mathcal{N}$-noyau de $f\colon A \to B$ est la flèche universelle $k\colon K \to A$ telle que $fk \in \mathcal{N}$.

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{N}$ un idéal de morphismes au sense de C. Ehresmann.
Le $\mathcal{N}$-noyau de $f\colon A \to B$ est la flèche universelle $k\colon K \to A$ telle que $fk \in \mathcal{N}$.
La définition de $\mathcal{N}$-conoyau est duale.

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{N}$ un idéal de morphismes au sense de C. Ehresmann.
Le $\mathcal{N}$-noyau de $f\colon A \to B$ est la flèche universelle $k\colon K \to A$ telle que $fk \in \mathcal{N}$.
La définition de $\mathcal{N}$-conoyau est duale.

Définition

Une suite $\mathcal{N}$-exacte courte est un diagramme

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B$$

où $k = \mathcal{N}\text{-}ker(f)$ et $f = \mathcal{N}\text{-}coker(k)$.

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{N}$ un idéal de morphismes au sense de C. Ehresmann.
Le $\mathcal{N}$-noyau de $f\colon A \to B$ est la flèche universelle $k\colon K \to A$ telle que $fk \in \mathcal{N}$.
La définition de $\mathcal{N}$-conoyau est duale.

Définition

Une suite $\mathcal{N}$-exacte courte est un diagramme

$$K \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B$$

où $k = \mathcal{N}\text{-}ker(f)$ et $f = \mathcal{N}\text{-}coker(k)$.

Supposons aussi que l'idéal $\mathcal{N}$ soit fermé.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un idéal de morphisme fermé $\mathcal{N}$ tel que les $\mathcal{N}$-noyaux et les $\mathcal{N}$-conoyaux des identités existent.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un idéal de morphisme fermé $\mathcal{N}$ tel que les $\mathcal{N}$-noyaux et les $\mathcal{N}$-conoyaux des identités existent.

Définition (Grandis-Janelidze)

Une théorie de torsion dans $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un idéal de morphisme fermé $\mathcal{N}$ tel que les $\mathcal{N}$-noyaux et les $\mathcal{N}$-conoyaux des identités existent.

Définition (Grandis-Janelidze)

Une théorie de torsion dans $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. $Hom(T, F) \subseteq \mathcal{N} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F};$

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un idéal de morphisme fermé $\mathcal{N}$ tel que les $\mathcal{N}$-noyaux et les $\mathcal{N}$-conoyaux des identités existent.

Définition (Grandis-Janelidze)

Une théorie de torsion dans $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. *$Hom(T, F) \subseteq \mathcal{N} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$;*
2. *pour tout $X \in \mathcal{C}$ il y a une suite $\mathcal{N}$-exacte courte*

$$T \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{\eta_X} F$$

avec $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

Théories de torsion non pointées

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec un idéal de morphisme fermé $\mathcal{N}$ tel que les $\mathcal{N}$-noyaux et les $\mathcal{N}$-conoyaux des identités existent.

Définition (Grandis-Janelidze)

Une théorie de torsion dans $\mathcal{C}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ telles que

1. $Hom(T, F) \subseteq \mathcal{N} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$;
2. *pour tout $X \in \mathcal{C}$ il y a une suite $\mathcal{N}$-exacte courte*

$$T \xrightarrow{t_X} X \xrightarrow{\eta_X} F$$

avec $T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}$.

Facchini-Finocchiaro-Gran: même définition, mais sans l'existence de $\mathcal{N}$-noyaux et $\mathcal{N}$-conoyaux des identités.

Notre contexte

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière protomodulaire avec 0 telle que l'unique morphisme $0 \to 1$ soit un épimorphisme régulier.

Notre contexte

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière protomodulaire avec 0 telle que l'unique morphisme $0 \to 1$ soit un épimorphisme régulier. Soit $\mathcal{Z}$ la sous-catégorie pleine des quotients réguliers de 0.

Notre contexte

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière protomodulaire avec 0 telle que l'unique morphisme $0 \to 1$ soit un épimorphisme régulier. Soit $\mathcal{Z}$ la sous-catégorie pleine des quotients réguliers de 0.

Proposition

$\mathcal{Z}$ est une sous-catégorie posetale monocoréflexive de $\mathcal{C}$ et le coréflecteur $\mathbb{Z}$ inverses les monomorphismes.

Notre contexte

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière protomodulaire avec 0 telle que l'unique morphisme $0 \to 1$ soit un épimorphisme régulier. Soit $\mathcal{Z}$ la sous-catégorie pleine des quotients réguliers de 0.

Proposition

$\mathcal{Z}$ est une sous-catégorie posetale monocoréflexive de $\mathcal{C}$ et le coréflecteur Z inverses les monomorphismes.

Exemples: catégories idéalement exactes (Janelidze):

Notre contexte

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière protomodulaire avec 0 telle que l'unique morphisme $0 \to 1$ soit un épimorphisme régulier. Soit $\mathcal{Z}$ la sous-catégorie pleine des quotients réguliers de 0.

Proposition

$\mathcal{Z}$ est une sous-catégorie posetale monocoréflexive de $\mathcal{C}$ et le coréflecteur Z inverses les monomorphismes.

Exemples: catégories idéalement exactes (Janelidze): en particulier, anneaux unitaires, algèbres de Boole, algèbres de Heyting, MV-algèbres, la catégorie duale d'un topos élémentaire, les modèles topologiques des variétés mentionnées.

Notre contexte

Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$ l'idéal des morphismes qui se factorisent par $\mathcal{Z}$.

Notre contexte

Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$ l'idéal des morphismes qui se factorisent par $\mathcal{Z}$.
Dans notre contexte, les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyaux existent toujours

Notre contexte

Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$ l'idéal des morphismes qui se factorisent par $\mathcal{Z}$.
Dans notre contexte, les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyaux existent toujours et ils sont obtenus comme produits fibrés

$$\begin{tikzcd} K[f] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}(B) \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Notre contexte

Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$ l'idéal des morphismes qui se factorisent par $\mathcal{Z}$.
Dans notre contexte, les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyaux existent toujours et ils sont obtenus comme produits fibrés

$$\begin{tikzcd} K[f] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}(B) \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyaux n'existent pas toujours.

Notre contexte

Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$ l'idéal des morphismes qui se factorisent par $\mathcal{Z}$.
Dans notre contexte, les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyaux existent toujours et ils sont obtenus comme produits fibrés

$$\begin{tikzcd} K[f] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}(B) \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyaux n'existent pas toujours. Par exemple, dans *Boole* l'identité de 2×2 n'a pas de $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyau.

Notre contexte

Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$ l'idéal des morphismes qui se factorisent par $\mathcal{Z}$.
Dans notre contexte, les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyaux existent toujours et ils sont obtenus comme produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
K[f] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}(B) \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyaux n'existent pas toujours. Par exemple, dans *Boole* l'identité de 2×2 n'a pas de $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyau. En plus, il y a des épimorphismes réguliers qui ne sont pas des $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyaux

Notre contexte

Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$ l'idéal des morphismes qui se factorisent par $\mathcal{Z}$.
Dans notre contexte, les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyaux existent toujours et ils sont obtenus comme produits fibrés

$$\begin{tikzcd} K[f] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Z}(B) \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Les $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyaux n'existent pas toujours. Par exemple, dans *Boole* l'identité de 2×2 n'a pas de $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyau. En plus, il y a des épimorphismes réguliers qui ne sont pas des $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyaux (e.g. les projections du produit 2×2).

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (N) si pour tout

$$\mathrm{T}(K[f]) \xrightarrow{t_{K[f]}} K[f] \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B,$$

où $k = \mathcal{N}_{\mathcal{Z}}\text{-}ker(f)$, $kt_{K[f]}$ est un $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyau.

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (N) si pour tout

$$\mathrm{T}(K[f]) \xrightarrow{t_{K[f]}} K[f] \xrightarrow{k} A \xrightarrow{f} B,$$

où $k = \mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-$ker(f)$, $kt_{K[f]}$ est un $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-noyau.

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (M) si, pour toute suite $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-exacte

$$T \xrightarrow{k} C \xrightarrow{q} Q$$

où $T \in \mathcal{T}$, on a $\mathrm{F}(T) \cong \mathrm{Z}(Q)$.

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion que satisfait (N) et (M), alors les classes

Théories de torsion et systèmes de factorisation

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion que satisfait (N) et (M), alors les classes

$$\mathbb{E} = \{\, e \in Arr(\mathcal{C}) \mid e \text{ est un } \mathcal{N}_{\mathcal{Z}}\text{-conoyau},\ \ K[e] \in \mathcal{T} \,\}$$

$$\mathbb{M} = \{\, m \in Arr(\mathcal{C}) \mid K[m] \in \mathcal{F} \,\}$$

forment un système de factorisation stable tel que toute flèche dans $\mathbb{E}$ est un $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyau.

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion que satisfait (N) et (M), alors les classes

$$\mathbb{E} = \{\, e \in Arr(\mathcal{C}) \mid e \text{ est un } \mathcal{N}_{\mathcal{Z}}\text{-conoyau},\ K[e] \in \mathcal{T} \,\}$$

$$\mathbb{M} = \{\, m \in Arr(\mathcal{C}) \mid K[m] \in \mathcal{F} \,\}$$

forment un système de factorisation stable tel que toute flèche dans $\mathbb{E}$ est un $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyau.

La classe $\mathcal{Z}$ est terminale si pour tout $C \in \mathcal{C}$ il existe $v_C \colon C \to \mathrm{V}(C)$ tel que

1. $\mathrm{V}(C) \in \mathcal{Z}$;
2. $\forall\, \chi \colon C \to Z$, avec $Z \in \mathcal{Z}$, $\exists! \varphi \colon Z \to \mathrm{V}(C)$ tel que $\varphi\chi = v_C$.

Proposition

Si $\mathcal{Z}$ est terminale et $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ est un système de factorisation stable dans $\mathcal{C}$ tel que toute flèche dans $\mathbb{E}$ est un $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyau, alors les sous-catégories

Théories de torsion et systèmes de factorisation

Proposition

Si $\mathcal{Z}$ est terminale et $(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ est un système de factorisation stable dans $\mathcal{C}$ tel que toute flèche dans $\mathbb{E}$ est un $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-conoyau, alors les sous-catégories

$$\mathcal{T} = \{\, T \in \mathcal{C} \,|\, \exists T \to Z \in \mathbb{E} \,\}$$

$$\mathcal{F} = \{\, F \in \mathcal{C} \,|\, F \to \mathrm{V}(F) \in \mathbb{M} \,\}$$

forment une théorie de torsion que satisfait (N) et (M).

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (M') si, pour toute suite $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-exacte

$$\mathrm{T}(C) \xrightarrow{t_C} C \xrightarrow{\eta_C} \mathrm{F}(C),$$

on a $\mathrm{F}(\mathrm{T}(C)) \cong \mathrm{Z}(\mathrm{F}(C))$.

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (M') si, pour toute suite $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-exacte

$$\mathrm{T}(C) \xrightarrow{t_C} C \xrightarrow{\eta_C} \mathrm{F}(C),$$

on a $\mathrm{F}(\mathrm{T}(C)) \cong \mathrm{Z}(\mathrm{F}(C))$. (M) implique (M')

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (M') si, pour toute suite $\mathcal{N}_{\mathcal{Z}}$-exacte

$$\mathrm{T}(C) \xrightarrow{t_C} C \xrightarrow{\eta_C} \mathrm{F}(C),$$

on a $\mathrm{F}(\mathrm{T}(C)) \cong \mathrm{Z}(\mathrm{F}(C))$. (M) implique (M')

Une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ dans $\mathcal{C}$ satisfait la condition (S) si, pour tout produit fibré

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & Z' \arrow[d] \\
T \arrow[r, "\eta_T"'] & Z
\end{tikzcd}$$

où $T \in \mathcal{T}$ et $Z, Z' \in \mathcal{Z}$, on a $T' \in \mathcal{T}$ et $\chi = \eta_{T'}$.

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion qui satisfait (M') et (S), la réflexion F forme une structure de Galois admissible.

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion qui satisfait (M') et (S), la réflexion F forme une structure de Galois admissible.

Définition

Un foncteur est $\mathcal{Z}$-protoadditif s'il préserve les produits fibrés des épimorphismes scindés le long des morphismes inversés par Z.

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion qui satisfait (M') et (S), la réflexion F forme une structure de Galois admissible.

Définition

Un foncteur est $\mathcal{Z}$-protoadditif s'il préserve les produits fibrés des épimorphismes scindés le long des morphismes inversés par Z.

On dira qu'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ satisfait (P) si le réflecteur F est $\mathcal{Z}$-protoadditif.

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion qui satisfait (M'), (S) et (P) et $f : C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion qui satisfait (M'), (S) et (P) et $f : C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *f est une extension normale;*

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion qui satisfait (M'), (S) et (P) et $f : C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *f est une extension normale;*
2. *f est une extension centrale;*

Proposition

Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion qui satisfait (M'), (S) et (P) et $f : C \to D$ est un morphisme de descente effective, les conditions suivantes sont équivalentes:

1. *f est une extension normale;*
2. *f est une extension centrale;*
3. $K[f] \in \mathcal{F}$.

Exemples

Dans *Heyt*, $(PD, Boole)$ est une théorie de torsion, où:

Exemples

Dans *Heyt*, (*PD*, *Boole*) est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

Exemples

Dans *Heyt*, $(PD, Boole)$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

$$PD = \{\, H \in Heyt \,|\, \forall\, x \in H \;\neg x \in \{0, 1\}\,\},$$

Exemples

Dans *Heyt*, $(PD, Boole)$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

$$PD = \{\, H \in Heyt \,|\, \forall\, x \in H \ \neg x \in \{0, 1\} \,\},$$

$\mathrm{F}\colon Heyt \to Boole$ est défini par

$$\mathrm{F}(H) = H\neg\neg = \{\, x \in H \,|\, \neg\neg x = x \,\},$$

Exemples

Dans *Heyt*, (*PD*, *Boole*) est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

$$PD = \{\, H \in Heyt \,|\, \forall\, x \in H \;\neg x \in \{0, 1\} \,\},$$

$\mathrm{F} : Heyt \to Boole$ est défini par

$$\mathrm{F}(H) = H\neg\neg = \{\, x \in H \,|\, \neg\neg x = x \,\},$$

$\mathrm{T} : Heyt \to PD$ est défini par

$$\mathrm{T}(H) = \{\, x \in H \,|\, \neg x \in \{0, 1\} \,\}.$$

Exemples

Dans *Heyt*, $(PD, Boole)$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

$$PD = \{\, H \in Heyt \,|\, \forall\, x \in H\ \neg x \in \{0, 1\}\,\},$$

$\mathrm{F}\colon Heyt \to Boole$ est défini par

$$\mathrm{F}(H) = H_{\neg\neg} = \{\, x \in H \,|\, \neg\neg x = x\,\},$$

$\mathrm{T}\colon Heyt \to PD$ est défini par

$$\mathrm{T}(H) = \{\, x \in H \,|\, \neg x \in \{0, 1\}\,\}.$$

L'unité η est définie par $\eta_H(x) = \neg\neg x$.

Exemples

Une MV-algèbre est une algèbre $(A, \oplus, \neg, 0)$ où $(A, \oplus, 0)$ est un monoïde commutatif, $\neg$ est involutive,

$$\neg 0 \oplus x = \neg 0, \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

Exemples

Une MV-algèbre est une algèbre $(A, \oplus, \neg, 0)$ où $(A, \oplus, 0)$ est un monoïde commutatif, $\neg$ est involutive,

$$\neg 0 \oplus x = \neg 0, \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

On peut definir $x \leq y$ si et seulement si $\neg x \oplus y = 1 = \neg 0$.

Exemples

Une MV-algèbre est une algèbre $(A, \oplus, \neg, 0)$ où $(A, \oplus, 0)$ est un monoïde commutatif, $\neg$ est involutive,

$$\neg 0 \oplus x = \neg 0, \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

On peut definir $x \leq y$ si et seulement si $\neg x \oplus y = 1 = \neg 0$.

Un idéal d'une MV-algèbre A est un sous-ensemble non vide I tel que

$$x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I, \quad x, y \in I \Rightarrow x \oplus y \in I.$$

Exemples

Une MV-algèbre est une algèbre $(A, \oplus, \neg, 0)$ où $(A, \oplus, 0)$ est un monoïde commutatif, $\neg$ est involutive,

$$\neg 0 \oplus x = \neg 0, \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

On peut definir $x \leq y$ si et seulement si $\neg x \oplus y = 1 = \neg 0$.

Un idéal d'une MV-algèbre A est un sous-ensemble non vide I tel que

$$x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I, \quad x, y \in I \Rightarrow x \oplus y \in I.$$

Le radical $Rad(A)$ d'une MV-algèbre A est l'intersection des idéaux maximales.

Exemples

Une MV-algèbre est une algèbre $(A, \oplus, \neg, 0)$ où $(A, \oplus, 0)$ est un monoïde commutatif, $\neg$ est involutive,

$$\neg 0 \oplus x = \neg 0, \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

On peut definir $x \leq y$ si et seulement si $\neg x \oplus y = 1 = \neg 0$.

Un idéal d'une MV-algèbre A est un sous-ensemble non vide I tel que

$$x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I, \quad x, y \in I \Rightarrow x \oplus y \in I.$$

Le radical $Rad(A)$ d'une MV-algèbre A est l'intersection des idéaux maximales. A est semisimple si $Rad(A) = \{0\}$.

Exemples

Une MV-algèbre est une algèbre $(A, \oplus, \neg, 0)$ où $(A, \oplus, 0)$ est un monoïde commutatif, $\neg$ est involutive,

$$\neg 0 \oplus x = \neg 0, \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

On peut definir $x \leq y$ si et seulement si $\neg x \oplus y = 1 = \neg 0$.

Un idéal d'une MV-algèbre A est un sous-ensemble non vide I tel que

$$x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I, \quad x, y \in I \Rightarrow x \oplus y \in I.$$

Le radical $Rad(A)$ d'une MV-algèbre A est l'intersection des idéaux maximales. A est semisimple si $Rad(A) = \{0\}$. A est parfaite si $A = Rad(A) \cup \neg Rad(A)$.

Exemples

Dans MV, (pMV, sMV) est une théorie de torsion, où:

Exemples

Dans MV, (pMV, sMV) est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

Exemples

Dans MV, (pMV, sMV) est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

$\mathrm{F} : MV \to sMV$ est défini par

$$\mathrm{F}(A) = A/Rad(A),$$

Exemples

Dans MV, (pMV, sMV) est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, 2\},$$

$\mathrm{F}: MV \to sMV$ est défini par

$$\mathrm{F}(A) = A/Rad(A),$$

$\mathrm{T}: MV \to pMV$ est défini par

$$\mathrm{T}(A) = P(A) = Rad(A) \cup \neg Rad(A).$$

Exemples

Dans $MSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

Exemples

Dans $MSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

Exemples

Dans $MSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, X \in MSet \mid Fix(X) = X \,\},$$

Exemples

Dans $MSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, X \in MSet \mid Fix(X) = X \,\},$$

$\mathrm{F} : MSet^{op} \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(X) = Fix(X)$,

Exemples

Dans $MSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{ X \in MSet \mid Fix(X) = X \},$$

$\mathrm{F}\colon MSet^{op} \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(X) = Fix(X)$,

$$\mathcal{T} = \{ X \in MSet \mid |Fix(X)| \leq 1 \},$$

Exemples

Dans $MSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, X \in MSet \mid Fix(X) = X \,\},$$

$\mathrm{F}\colon MSet^{op} \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(X) = Fix(X)$,

$$\mathcal{T} = \{\, X \in MSet \mid |Fix(X)| \leq 1 \,\},$$

$\mathrm{T}\colon MSet^{op} \to \mathcal{T}$ est défini par $\mathrm{T}(X) = X/Fix(X)$.

Exemples

Un ensemble simplicial est un foncteur $X\colon \Delta^{op} \to Set$; on écrit $X_n = X(n)$.

Exemples

Un ensemble simplicial est un foncteur $X\colon \Delta^{op} \to Set$; on écrit $X_n = X(n)$.
Dans $sSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

Exemples

Un ensemble simplicial est un foncteur $X\colon \Delta^{op} \to Set$; on écrit $X_n = X(n)$.
Dans $sSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

Exemples

Un ensemble simplicial est un foncteur $X\colon \Delta^{op} \to Set$; on écrit $X_n = X(n)$.

Dans $sSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, X \in sSet \mid X_n = X_0,\ X(f) = id_{X_0} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, f \in Arr(\Delta)\,\},$$

Exemples

Un ensemble simplicial est un foncteur $X\colon \Delta^{op} \to Set$; on écrit $X_n = X(n)$.
Dans $sSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, X \in sSet \mid X_n = X_0,\, X(f) = id_{X_0} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, f \in Arr(\Delta) \,\},$$

$\mathrm{F}\colon sSet^{op} \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(X)_n = X_0$ pour tout n,

Exemples

Un ensemble simplicial est un foncteur $X\colon \Delta^{op} \to Set$; on écrit $X_n = X(n)$.
Dans $sSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, X \in sSet \mid X_n = X_0,\, X(f) = id_{X_0} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, f \in Arr(\Delta) \,\},$$

$\mathrm{F}\colon sSet^{op} \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(X)_n = X_0$ pour tout n,

$$\mathcal{T} = \{\, X \in sSet \mid |X_0| \leq 1 \,\},$$

Exemples

Un ensemble simplicial est un foncteur $X\colon \Delta^{op} \to Set$; on écrit $X_n = X(n)$.
Dans $sSet^{op}$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{Z} = \{1, \emptyset\},$$

$$\mathcal{F} = \{\, X \in sSet \mid X_n = X_0,\ X(f) = id_{X_0} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, f \in Arr(\Delta) \,\},$$

$\mathrm{F}\colon sSet^{op} \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(X)_n = X_0$ pour tout n,

$$\mathcal{T} = \{\, X \in sSet \mid |X_0| \leq 1 \,\},$$

$\mathrm{T}\colon sSet^{op} \to \mathcal{T}$ est défini, si $X \neq \emptyset$, par le pushout

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathrm{T}(X). \end{tikzcd}$$

Exemples

Si $m > 0$, un groupe abélien A est m-divisible si pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que $a = mb$.

Exemples

Si $m > 0$, un groupe abélien A est m-divisible si pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que $a = mb$.
Exemples: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,

Exemples

Si $m > 0$, un groupe abélien A est m-divisible si pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que $a = mb$.
Exemples: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : z^{m^n} = 1 \,\}$.

Exemples

Si $m > 0$, un groupe abélien A est m-divisible si pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que $a = mb$.
Exemples: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : z^{m^n} = 1 \}$.

On définit $D_m(A) = \{ a \in A \,|\, \exists (a_n) : a_0 = a,\ a_n = m a_{n+1} \}$.

Exemples

Si $m > 0$, un groupe abélien A est m-divisible si pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que $a = mb$.
Exemples: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : z^{m^n} = 1 \}$.

On définit $D_m(A) = \{ a \in A \,|\, \exists (a_n) : a_0 = a,\ a_n = ma_{n+1} \}$.

On considère la catégorie $\mathbb{Z}_m/Ab$.

Exemples

Si $m > 0$, un groupe abélien A est m-divisible si pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que $a = mb$.
Exemples: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^{m^n} = 1 \}$.

On définit $D_m(A) = \{ a \in A \mid \exists (a_n) : a_0 = a,\ a_n = ma_{n+1} \}$.

On considère la catégorie $\mathbb{Z}_m/Ab$. Ses objets peuvent être vus comme paires (A, a) où A est un groupe abélien et $a \in A$ est tel que $ma = 0$.

Exemples

Si $m > 0$, un groupe abélien A est m-divisible si pour tout $a \in A$ il existe $b \in A$ tel que $a = mb$.
Exemples: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : z^{m^n} = 1 \,\}$.

On définit $D_m(A) = \{\, a \in A \,|\, \exists (a_n) : a_0 = a,\ a_n = m a_{n+1} \,\}$.

On considère la catégorie $\mathbb{Z}_m/Ab$. Ses objets peuvent être vus comme paires (A, a) où A est un groupe abélien et $a \in A$ est tel que $ma = 0$.

Soit $\mathcal{Z}$ la sous-catégorie des paires $(\mathbb{Z}_h, 1)$ où h divise m.

Exemples

Dans $\mathbb{Z}_m/Ab$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

Exemples

Dans $\mathbb{Z}_m/Ab$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{F} = \{\,(A, a) \mid D_m(A) = 0\,\},$$

Exemples

Dans $\mathbb{Z}_m/Ab$, $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{F} = \{\,(A,a)\,|\,D_m(A) = 0\,\},$$

$\mathrm{F} : \mathbb{Z}_m/Ab \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(A,a) = (A/D_m(A),[a])$,

Exemples

Dans $\mathbb{Z}_m/Ab$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{F} = \{\, (A, a) \mid D_m(A) = 0 \,\},$$

$\mathrm{F} : \mathbb{Z}_m/Ab \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(A, a) = (A/D_m(A), [a])$,

$$\mathcal{T} = \{\, (A, a) \mid A = \langle D_m(A), a \rangle \,\},$$

Exemples

Dans $\mathbb{Z}_m/Ab$, $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion, où:

$$\mathcal{F} = \{\, (A, a) \mid D_m(A) = 0 \,\},$$

$\mathrm{F} \colon \mathbb{Z}_m/Ab \to \mathcal{F}$ est défini par $\mathrm{F}(A, a) = (A/D_m(A), [a])$,

$$\mathcal{T} = \{\, (A, a) \mid A = \langle D_m(A), a \rangle \,\},$$

$\mathrm{T} \colon \mathbb{Z}_m/Ab \to \mathcal{T}$ est défini par $\mathrm{T}(A, a) = (\langle D_m(A), a \rangle, a)$.