DUT TC 2 | **ULCO - Dunkerque**

Statistiques et Probabilités Appliquées | Octobre 2016 - IE 1, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 | Tous documents autorisés.

Exercice 1 *Correction* :

1. 1pt Le prélèvement peut se faire sans remise pour plusieurs raisons, la plus évidente étant que pour constater qu'un objet est défectueux, il faut souvent lui faire subir des tests, ce qui va l'altérer et le rendre impropre à l'utilisation et à la vente. On ne remet donc pas l'objet testé dans la collection de départ. On peut citer également des raisons liées au timing, aux ressources humaines, à la configuration de la chaîne de fabrication (on peut peut-être prélever un objet d'une chaîne sans pouvoir le remettre ensuite), à la sécurité,...
2. 1,5pt On considère tout d'abord l'événement S : "Un article défectueux est prélevé de l'échantillon" et son complémentaire E : "Un article non-défectueux est prélevé de l'échantillon". Soit $i \in \{1, \ldots, 120\}$. On considère la variable aléatoire X_i telle que $\begin{cases} X_i(S) = 1 \\ X_i(E) = 0 \end{cases}$ dont la loi de probabilité est donnée par :

x_j	0	1	Total
$p(X_i = x_j)$	0,95	0,05	1

On peut affirmer dans ce cas que $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(0,05)$.
On pose ensuite $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{120}$. Les X_i étant indépendantes deux à deux (le tirage est sans remise), on a $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(120; 0,05)$.

3. 1pt D'après le cours, $E(X) = 120 \times 0,05 = 6$. En moyenne, si on répète l'expérience un grand nombre de fois, on trouvera 6 pièces défectueuses.
4. 1pt Toujours d'après le cours, $V(X) = 120 \times 0,05 \times (1 - 0,05) = 5,7$. La variance permet au travers de sa racine carrée de caractériser la dispersion d'un échantillon ou d'une distribution.
5. 1pt Pour pouvoir approcher une loi binomiale par une loi de Poisson, il faut réunir 3 conditions : $n \geq 30$, $p < 0,1$ et $np \leq 10$. On vérifie aisément que ces 3 conditions sont vérifiées puisque : $n = 120$, $p = 0,05$ et $np = 6$. On peut donc approcher notre loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 6$. On a donc $\mathcal{B}(120; 0,05) \sim \mathcal{P}(6)$.
6. 3pts Considérons les 3 cas $k = 0, 1, 2$. On a le tableau comparatif suivant (valeurs calculées avec "R") :

k	$p(X = k)$, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(120; 0,05)$	$p(X = k)$, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(6)$	Erreur relative associée (%)
0	0,002122426	0,002478752	14,375209
1	0,0134048	0,01487251	9,868641
2	0,04197818	0,04461754	5,915511

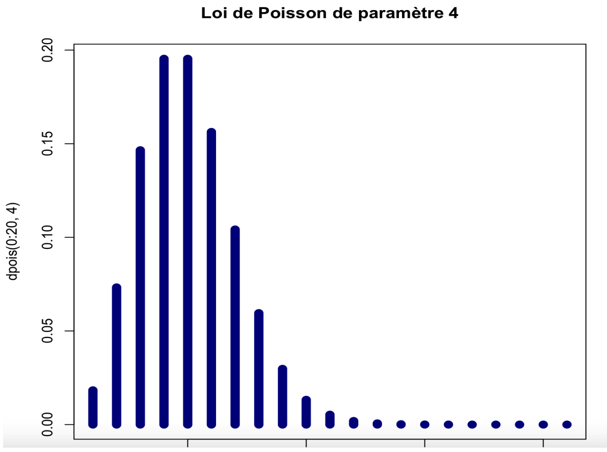
L'erreur relative est définie ici par $e = \dfrac{|p_{\mathcal{B}} - p_{\mathcal{P}}|}{p_{\mathcal{P}}}$

Exercice 2 *Correction* :

Soit X la variable aléatoire précisant le nombre de pièces défectueuses. On a d'après l'énoncé, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(4)$ et $\forall k \in \{0, \ldots, 800\}$, $p(X = k) = \dfrac{e^{-4} \times 4^k}{k!}$. En utilisant "R", on trouve

1. 0,5pt $p(X = 3) = 0,1953668$.
2. 1pt Comme $p(X \leq 3) = p(\{X = 0\} \cup \{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 3\}) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$, on obtient $p(X \leq 3) = 0,4334701$.
3. 1pt $p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - 0,4334701 = 0,5665299$ d'après le résultat précédent.

4. $\boxed{\text{2pts}}$ La représentation graphique de la loi de Poisson de paramètre 4 est donnée par :



On a seulement représenté les probabilités obtenues pour $k \in \{0, \dots, 20\}$, celles obtenues pour $k > 20$ étant négligeables.

Exercice 3

1. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Il s'agit d'une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes les unes des autres. Chacune aboutissant à deux résultats contraires : facture erronée (S) avec une probabilité $p(S) = 0,058$ ou facture non erronée (E) avec une probabilité $p(E) = p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 0,942$. La variable aléatoire X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,058)$. Par conséquent,

$$\forall k \in \{0, \dots, 10\},\ p(X = k) = C_{10}^{k} \times 0,058^{k} \times 0,942^{10-k}$$

On obtient en utilisant "R" :

2. $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p(X = 0) = C_{10}^{0} \times 0,058^{0} \times 0,942^{10-0} = 0,5501854$.
3. $\boxed{\text{1pt}}$ $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0,9827996$.

On suppose que $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(400, 240)$. On pose $Y' = \dfrac{Y - 400}{240}$ et donc $Y' \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

4. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On obtient $p(Y \leq 1000) = p\left(\dfrac{Y - 400}{240} \leq \dfrac{1000 - 400}{240}\right) = p(Y' \leq 2,5) = \pi(2,5) = 0,9938$ en utilisant la table de la loi normale centrée réduite (et où π désigne la fonction de répartition).
5. $\boxed{\text{2,5pts}}$ $p(100 \leq Y \leq 1000) = p\left(\dfrac{100 - 400}{240} \leq Y' \leq \dfrac{1000 - 400}{240}\right) = p(-1,25 \leq Y' \leq 2,5)) = \pi(2,5) - \pi(-1,25) = \pi(2,5) - (1 - \pi(1,25)) = 0,9938 - (1 - 0,8944) = 0,8882$.