Statistiques et Probabilités Appliquées Octobre 2016 - IE 1, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Tous documents autorisés.

Exercice 1 Dans une entreprise, on considère que la probabilité d'obtenir un article défectueux à la sortie d'une chaîne de fabrication est $p = 0,05$. Lors d'un contrôle de qualité, on envisage de prélever un échantillon de 120 articles. Bien que ce prélèvement soit exhaustif (sans remise), on considère que la production est suffisamment nombreuse pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à 120 tirages avec remise d'un article défectueux ou non. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre d'articles défectueux d'un tel échantillon.

1. Pourquoi le prélèvement est-il sans remise ?
2. Quelle est la loi suivie par X ? (Justifier votre réponse.)
3. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter la valeur obtenue.
4. Quelle est la variance de X ? Quelle est son utilité ?
5. Pourquoi peut-on approcher la loi de X par une loi de Poisson ? Quel est son paramètre ?
6. Comparer $p(X = k)$ lorsque X suit la loi déterminée à la question 2. et lorsque X suit la loi de Poisson de la question 3. pour 3 valeurs de k. Quelles sont les 3 erreurs relatives associées ?

Exercice 2 Un industriel fabrique des pièces métalliques. Le soin apporté à la fabrication est tel qu'en moyenne il y a 5 pièces défectueuses sur 1 000 pièces fabriquées. Une série de pièces est fabriquée. On examine 800 de ces pièces prises au hasard. On suppose que le nombre de pièces défectueuses suit une loi de Poisson de paramètre 4.

1. Quelle est la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit exactement de 3 ?
2. Quelle est la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit d'au plus 3 ?
3. Quelle est la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit d'au moins 4 ?
4. Représenter graphiquement la loi de Poisson de paramètre 4.

Exercice 3 Une société a un stock de factures à archiver, il y a deux types de factures : 60% sont des factures payées par le client, dites "factures de droit", et 40% sont des factures dues au client par la société, dites "d'avoir". On constate que 7% des factures dites d'avoir sont erronées et 5% des factures dites de droit sont erronées.
On prélève au hasard 10 factures dans la liasse pour vérification. On suppose que le stock de factures est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 factures. La probabilité pour qu'une facture prise par hasard soit erronée est $0,058$. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 factures, associe le nombre de factures de ce prélèvement qui sont erronées.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucune facture de ce prélèvement ne soit erronée.
3. Calculer la probabilité qu'au plus deux des factures choisies soient erronées.

On s'intéresse au montant de l'ensemble des factures éditées pendant un mois. On note Y la variable qui, à chaque facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées, associe un montant en euros. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart-type 240.

4. Calculer $P(Y \leq 1000)$.
5. Calculer la probabilité que le montant d'une facture prélevée au hasard dans l'ensemble des factures éditées soit compris entre 100 et 1000.