Probabilités et Statistiques Inférentielles Novembre 2016 - IE 1, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Tous documents autorisés

Exercice 1 On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

Par exemple, la colonne 4 indique que le nombre de journées où il s'est produit 2 accidents est de 22.

1. Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ? Interpréter concrètement le résultat trouvé.
2. On ajuste cette distribution par une loi de Poisson.
   Justifier cette décision et préciser cette loi. Comparer avec un ajustement par la loi binomiale.
3. Quel est le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents ? Comparer avec la réalité.

Exercice 2 Une machine fabrique 1000 pièces dont la longueur est variable.

1. En prélevant un échantillon de 50 pièces, nous avons obtenu les résultats suivants :

Longueur L (cm)	Effectif n_i
$[24; 24,5[$	5
$[24,5; 25[$	13
$[25; 25,5[$	24
$[25,5; 26[$	8

   Déterminer la longueur moyenne $\overline{L}$ et l'écart type σ de cette série statistique.
2. On estime que la longueur d'une pièce L est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 25,1 et d'écart type 0,4. Ainsi, la variable $T := \dfrac{L - 25,1}{0,4}$ suit une loi normale centrée et réduite. À l'aide de l'annexe B ci-joint
   (a) Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce soit inférieure à $25,6$ cm.
   (b) Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce soit comprise entre $24,6$ cm et $25,4$ cm.
   (c) Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce soit comprise entre $\overline{L} - \sigma$ et $\overline{L} + \sigma$.
   (d) Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce soit comprise entre $\overline{L} - 2\sigma$ et $\overline{L} + 2\sigma$.
   (e) Calculer la probabilité pour que la longueur d'une pièce soit comprise entre $\overline{L} - 3\sigma$ et $\overline{L} + 3\sigma$.

Exercice 3 La consommation d'essence X par jour ouvrable d'un voyageur de commerce est une variable aléatoire normale d'espérance 13 litres, d'écart-type 2 litres. On suppose que les consommations des jours successifs sont indépendantes.

1. Quelles sont les probabilités pour qu'un jour donné, la consommation d'essence soit :
   (a) égale à 14 litres ?
   (b) inférieure ou égale à 15 litres ?
   (c) comprise entre 10 et 14 litres (bornes incluses) ?

2. Dans quel intervalle centré en 13 litres se trouvera sa consommation avec la probabilité de 90% ?
3. On considère deux jours quelconques de la semaine et X_1 et X_2 les variables aléatoires normales désignant les consommations respectives de ces deux jours.
   (a) Quelle est la loi suivie par $Y = X_1 - X_2$? On précisera ses paramètres.
   (b) Quelle est la probabilité pour que ces consommations diffèrent d'un litre ?
4. On considère ensuite les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$, consommations journalières du voyageur de commerce les 20 jours ouvrables du mois.
   (a) Quelle est la loi suivie par $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{20}$? On précisera les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité pour que la consommation moyenne du voyageur de commerce soit inférieure à 280 litres.
   (c) On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire consommation moyenne du voyageur de commerce sur un mois de 20 jours ouvrables. Déterminer $E(\overline{X})$ et $\sigma(\overline{X})$. Quelle est la probabilité d'observer une consommation moyenne comprise entre 12,8 et 13,2 litres ?
5. (a) Le revenu brut mensuel de ce voyageur un mois quelconque de l'année est une variable aléatoire normale R, d'espérance m et d'écart-type σ inconnus. On sait de plus que :

   $$p(R \leq 6500) = 0,8413 \text{ et } p(R < 5000) = 0,0228.$$

   Déterminer m et σ.
   (b) On suppose que les variables aléatoires “revenus du voyageur tous les mois de l'année” sont indépendantes. Quelle est la probabilité pour que son revenu brut annuel soit inférieur à 75000€ ?

ANNEXE A - Probabilités individuelles de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X=k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

k \ λ	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
0	$0,9048$	$0,8187$	$0,7408$	$0,6703$	$0,6065$	$0,5488$	$0,4966$	$0,4493$	$0,4066$
1	$0,0905$	$0,1637$	$0,2222$	$0,2681$	$0,3033$	$0,3293$	$0,3476$	$0,3595$	$0,3659$
2	$0,0045$	$0,0164$	$0,0333$	$0,0536$	$0,0758$	$0,0988$	$0,1217$	$0,1438$	$0,1647$
3	$0,0002$	$0,0011$	$0,0033$	$0,0072$	$0,0126$	$0,0198$	$0,0284$	$0,0383$	$0,0494$
4		$0,0001$	$0,0003$	$0,0007$	$0,0016$	$0,0030$	$0,0050$	$0,0077$	$0,0111$
5				$0,0001$	$0,0002$	$0,0004$	$0,0007$	$0,0012$	$0,0020$
6							$0,0001$	$0,0002$	$0,0003$

k \ λ	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$	$3,5$	$4,0$	$4,5$	$5,0$
0	$0,3679$	$0,2231$	$0,1353$	$0,0821$	$0,0492$	$0,0302$	$0,0183$	$0,0111$	$0,0067$
1	$0,3679$	$0,3347$	$0,2707$	$0,2052$	$0,1454$	$0,1057$	$0,0733$	$0,0500$	$0,0337$
2	$0,1839$	$0,2510$	$0,2707$	$0,2565$	$0,2240$	$0,1850$	$0,1465$	$0,1125$	$0,0842$
3	$0,0613$	$0,1255$	$0,1804$	$0,2132$	$0,2240$	$0,2158$	$0,1954$	$0,1898$	$0,1404$
4	$0,0153$	$0,0471$	$0,0902$	$0,1336$	$0,1680$	$0,1888$	$0,1954$	$0,1898$	$0,1755$
5	$0,0031$	$0,0141$	$0,0361$	$0,0668$	$0,1008$	$0,1322$	$0,1563$	$0,1708$	$0,1755$
6	$0,0005$	$0,0035$	$0,0120$	$0,0278$	$0,0504$	$0,0771$	$0,1042$	$0,1281$	$0,1462$
7	$0,0001$	$0,0008$	$0,0034$	$0,0099$	$0,0216$	$0,0385$	$0,0595$	$0,0824$	$0,1044$
8		$0,0001$	$0,0009$	$0,0031$	$0,0081$	$0,0169$	$0,0298$	$0,0463$	$0,0653$
9			$0,0002$	$0,0009$	$0,0027$	$0,0066$	$0,0132$	$0,0232$	$0,0363$
10				$0,0002$	$0,0008$	$0,0023$	$0,0053$	$0,0104$	$0,0181$
11					$0,0002$	$0,0007$	$0,0019$	$0,0043$	$0,0082$
12					$0,0001$	$0,0002$	$0,0006$	$0,0016$	$0,0034$
13						$0,0001$	$0,0002$	$0,0006$	$0,0013$
14							$0,0001$	$0,0002$	$0,0005$
15								$0,0001$	$0,0002$
16									$0,0001$

ANNEXE B - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Cette table donne $\Pi(x) = p(\{X \leq x\})$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$:

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998