DUT TC 2 — **ULCO - Dunkerque**

Statistiques et Probabilités Appliquées — Octobre 2016 - IE 2, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 — Tous documents autorisés.

Exercice 1 *Correction* : 5pts

0,5pt On pose H_0 : "$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(2)$" et l'hypothèse alternative H_1 : "X ne suit pas cette loi".

2pts Sous H_0, on a le tableau suivant :

x_i	n_i	p_i	Np_i	Np_i corrigé	n_i corrigé	e_i
0	2	0,13533528	4,330729<5	12,992187	15	0,3102875
1	13	0,27067057	8,661458			
2	8	0,27067057	8,661458	8,661458	8	0,05051421
3	4	0,18044704	5,774305	9,816319	9	0,06788458
4	4	0,09022352	2,887153<5			
5	1	0,0360894	1,154861<5			
Total	32	1	32	32	32	0,42868629

On a donc $\chi^2_{obs} = 0,42868629$.

1pt Comme le nombre de degrés de liberté est égal ici à $\nu = k - 1 = 3 - 1 = 2$ (aucun paramètre n'a été estimé), on lit dans la table : $\chi^2_{lu} = \chi^2_{2;0,90} = 4,61$.

1,5pt Finalement, puisque $\chi^2_{obs} < \chi^2_{lu}$, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 au risque 10% : on peut admettre au seuil de 10% que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Exercice 2 *Correction* : 5pts

0,5pt On compte $25 + 15 + 18 + 32 = 90$ étudiants. On distingue 4 plages horaires. Soit X la variable aléatoire décrivant l'horaire où l'étudiant est absent. Si X suit une loi uniforme, le paramètre de cette loi s'obtient simplement en concevant qu'un étudiant a une chance sur 4 d'être absent lors d'un créneau horaire spécifique.

On pose H_0 : "$X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\frac{1}{4})$" et l'hypothèse alternative H_1 : "X ne suit pas cette loi".

2pts Sous H_0, on a le tableau suivant :

x_i	n_i	p_i	$Np_i = Np$	e_i
$[8,10]$	25	0,25	22,5	0,277778
$[10,12]$	15	0,25	22,5	2,5
$[13,15]$	18	0,25	22,5	0,9
$[15,17]$	32	0,25	22,5	4,011111
Total	90	1	90	7,688889

On a donc $\chi^2_{obs} = 7,688889$.

1pt Comme le nombre de degrés de liberté est égal ici à $\nu = k - 1 = 4 - 1 = 3$ (aucun paramètre n'a été estimé), on lit dans la table : $\chi^2_{lu} = \chi^2_{3;0,95} = 7,81$.

1,5pt Finalement, puisque $\chi^2_{obs} < \chi^2_{lu}$, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 au risque 5% : on peut admettre au seuil de 5% que X suit une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 *Correction* : 6pts

Soit X_i la variable aléatoire qui associe à la naissance du i-ième enfant l'entier 1 si c'est un garçon et l'entier 0 si c'est une fille. Il est aisé de montrer que $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On considère ensuite la variable aléatoire X décrivant le nombre de garçons dans une famille de 7 enfants, on a donc $X = X_1 + \ldots + X_7$ où les X_i sont indépendants deux à deux et théoriquement, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(7, \frac{1}{2})$.

1. 0,5pt Le test à utiliser pour tester l'ajustement d'une distribution empirique à une distribution théorique est le test du χ^2.

2. 1pt On a $p(X = k) = C_7^k (\frac{1}{2})^k (1 - \frac{1}{2})^{7-k} = C_7^k \times \frac{1}{2}^k \times \frac{1}{2}^{7-k} = C_7^k \times \frac{1}{2}^7$. On en déduit donc les probabilités théoriques demandées :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = k)$	0,0078125	0,0546875	0,1640625	0,2734375	0,2734375	0,1640625	0,0546875	0,0078125

3. 0,5pt On pose H_0 : "La distribution observée correspond à la distribution théorique obtenue lorsque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(7, \frac{1}{2})$" et l'hypothèse alternative H_1 : "La distribution observée ne correspond pas à la distribution théorique mentionnée".
   1pt Sous H_0, on a le tableau suivant :

x_i	n_i	p_i	Np_i	e_i
0	8	0,0078125	5,375	1,281977
1	40	0,0546875	37,625	0,149917
2	110	0,1640625	112,875	0,073228
3	188	0,2734375	188,125	0,000083
4	190	0,2734375	188,125	0,018688
5	106	0,1640625	112,875	0,418743
6	38	0,0546875	37,625	0,003738
7	8	0,0078125	5,375	1,281977
Total	688	1	688	3,228351

4. 0,5pt Les conditons de validité sont vérifiées puisque tous les effectifs théoriques Np_i sont strictement supérieurs à 5.

5. On obtient $\chi^2_{obs} = 3,228351$.
   1pt Comme le nombre de degrés de liberté est égal ici à $\nu = k - 1 = 8 - 1 = 7$ (aucun paramètre n'a été estimé), on lit dans la table : $\chi^2_{lu} = \chi^2_{7;0,95} = 14,07$.
   1,5pt Finalement, puisque $\chi^2_{obs} < \chi^2_{lu}$, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 au risque 5% : on peut admettre au seuil de 5% que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 *Correction* : 5pts

Soit X la variable aléatoire décrivant l'emplacement au départ du cheval. Si X suit une loi uniforme, le paramètre de cette loi s'obtient simplement en concevant qu'un cheval (ou cavalier) a une chance sur 8 d'arriver à n'importe quelle place.

1. 0,5pt On pose H_0 : "$X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\frac{1}{8})$" et l'hypothèse alternative H_1 : "X ne suit pas cette loi".

2. 2pts Sous H_0, on a le tableau suivant :

x_i	n_i	p_i	$Np_i = Np$	e_i
1	29	0,125	18	6,722222
2	19	0,125	18	0,055556
3	18	0,125	18	0
4	25	0,125	18	2,722222
5	17	0,125	18	0,055556
6	10	0,125	18	3,555556
7	15	0,125	18	0,5
8	11	0,125	18	2,722222
Total	144	1	144	16,333334

On a donc $\chi^2_{obs} = 16,333334$.

$\boxed{\text{1pt}}$ Comme le nombre de degrés de liberté est égal ici à $\nu = k - 1 = 8 - 1 = 7$ (aucun paramètre n'a été estimé), on lit dans la table : $\chi^2_{lu} = \chi^2_{7;0,95} = 14,07$.

$\boxed{\text{1,5pt}}$ Finalement, puisque $\chi^2_{obs} > \chi^2_{lu}$, on rejette l'hypothèse H_0 au risque 5% : on ne peut pas admettre au seuil de 5% que X suit une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{8}$ c'est-à-dire qu'à ce seuil, la distribution observée ne permet pas de prouver que les résultats à l'arrivée sont indépendants de l'emplacement de départ.

Si on travaille avec un risque de $\alpha = 1\%$, $\chi^2_{lu} = \chi^2_{7;0,99} = 18,48$ et dans ce cas $\chi^2_{obs} < \chi^2_{lu}$ ce qui permet d'accepter H_0.