DUT TC 2 **ULCO - Dunkerque**

Probabilités et Statistiques Inférentielles Décembre 2016 - IE 3, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Tous documents autorisés

Exercice 1 *Correction* : 6pts

1. 0,5pt On dénombre aisément $24\times 0+1\times 27+2\times 29+3\times 16+4\times 3+5\times 1=150$ mots dénommés correctement.
   0,5pt Une estimation ponctuelle non biaisée de la proportion de mots dénommés correctement est évidemment donnée par $p=\dfrac{150}{500}=0,3$.
2. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de mots dénommés correctement. On teste
$$H_0 : \text{“}X \rightsquigarrow \mathcal{B}(5;0,3)\text{” contre } H_1 : \text{“}X \not\rightsquigarrow \mathcal{B}(5;0,3)\text{”}.$$
   1,5pt On a
   - $p(X=0)=C_5^0(0,3)^0(1-0,3)^{5-0}=0,16807$,
   - $p(X=1)=C_5^1(0,3)^1(1-0,3)^{5-1}=0,36015$,
   - $p(X=2)=C_5^2(0,3)^2(1-0,3)^{5-2}=0,3087$,
   - $p(X=3)=C_5^3(0,3)^3(1-0,3)^{5-3}=0,1323$,
   - $p(X=4)=C_5^4(0,3)^4(1-0,3)^{5-4}=0,02835$,
   - $p(X=5)=C_5^5(0,3)^5(1-0,3)^{5-5}=0,00243$,

   2,5pts et on en déduit le tableau suivant :

k	$p_k=p(X=k)$	n_k	$N_k=Np_k$	N_k corrigé ($\tilde{N}_k$)	n_k corrigé ($\tilde{n}_k$)	$\frac{(\tilde{N}_k-\tilde{n}_k)^2}{\tilde{N}_k}$
0	0,16807	24	16,807	16,807	24	3,078
1	0,36015	27	36,015	36,015	27	2,257
2	0,3087	29	30,87	30,87	29	0,113
3	0,1323	16	13,23	16,308	20	0,836
4	0,02835	3	2,835			
5	0,00243	1	0,243			
Total	1	100	100	100	100	$\chi^2_{obs}=6,284$

   1pt On a $\chi^2_{lu}=\chi^2_{\nu,1-\alpha}=\chi^2_{4-1-1;0,95}=\chi^2_{2;0,95}=5,99<\chi^2_{obs}$. L'erreur est significative, on rejette H_0.

Exercice 2 *Correction* : 3pts

On souhaite tester l'hypothèse H_0 : “la taille des individus est indépendante de leur rangement selon les qualités de classement”.

1pt Déterminons les effectifs théoriques :

	Petits	Grands	TOTAL
Chef	19,92	24,08	44
Exécutant	16,29	19,71	36
Inclassable	6,79	8,21	15
TOTAL	43	52	$N=95$

$\boxed{\text{1pt}}$ On en déduit aisément le χ^2_{obs} car tous les effectifs théoriques sont plus grands que 5 :

	Petits	Grands	Total
Chef	3,15	2,60	
Exécutant	2,00	1,65	
Inclassable	0,72	0,59	
Total			$\chi^2_{obs} = 10,71$

$\boxed{\text{1pt}}$ Déterminons le χ^2_{lu} : comme $\nu = (3-1)\times(2-1) = 2$ et $\alpha = 1\%$, $\chi^2_{lu} = \chi^2_{\nu,1-\alpha} = \chi^2_{2;0,99} = 9,21 < \chi^2_{obs}$ donc on rejette H_0.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

$\boxed{\text{0,5pt}}$ On dénombre 60 bouteilles non conformes parmi les 1060 que compte le négociant soit une proportion $p = \dfrac{60}{1060} = \dfrac{3}{53}$ de bouteilles non conformes.

$\boxed{\text{2,5pts}}$ On dresse le tableau suivant :

Type d'alcool	Nombre total de bouteilles N_i	Nombre total de bouteilles non conformes n_i	$p_i = p$	$e_i = N_i p$	$\dfrac{(e_i - n_i)^2}{e_i}$
Whisky	225	15	$\frac{3}{53}$	12,7358	0,4025
Cognac	98	6 } 10	$\frac{3}{53}$	$5,5472$ } $8,8868$	0,1394
Liqueur	59	4	$\frac{3}{53}$	$3,3396$	
Champagne	230	11	$\frac{3}{53}$	13,0189	0,3131
Vin rosé	180	9	$\frac{3}{53}$	10,1887	0,1387
Vin d'Alsace	154	8	$\frac{3}{53}$	8,7170	0,0590
Vin de Bordeaux	114	7	$\frac{3}{53}$	6,4528	0,0464
Total	1060	60	–	60	1,0987

$\boxed{\text{1pt}}$ Le nombre de degrés de liberté est égal à $\nu = k - 1 - r = 6 - 1 - 0 = 5$. On lit dans la table $\chi^2_{lu} = \chi^2_{5;0,95} = 11,07 > \chi^2_{obs}$. Par conséquent, on ne rejette pas l'hypothèse H_0 : le type d'alcool n'a pas d'influence sur la non-conformité des bouteilles.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{\text{7pts}}$

1. Les calculs sont quasi immédiats :
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\overline{x} = \dfrac{74900}{3500} = 21,4$.
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{1844875}{3500} - (21,4)^2} = \sqrt{69,14} = 8,31$.
2. (a) On pose $T = \dfrac{X - 21}{8}$ et $T \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $P(X \in [5;10[) = P(5 \leq X < 10) = P(\frac{5-21}{8} \leq T < \frac{10-21}{8}) = P(-2 \leq T < -1,375) = P(T < -1,375) - P(T \leq -2) = P(T \leq 2) - P(T < 1,375) = 0,9772 - 0,9162 = 0,0610$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $P(X \in [20;25[) = P(20 \leq X < 25) = P(\frac{20-21}{8} \leq T < \frac{25-21}{8}) = P(-0,125 \leq T < 0,5) = P(T < 0,5) - P(T \leq -0,125) = P(T < 0,5) - (1 - P(T \geq 0,125)) = 0,6915 - (1 - 0,5517) = 0,2432$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $P(X \in [35;+\infty[) = 1 - P(X < 35) = 1 - P(T < \frac{35-21}{8}) = 1 - P(T < 1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$.

(b) $\boxed{\text{2pts}}$ On assimile les classes $[0;5[$ et $[35;40[$ à $]-\infty;5[$ et $[35;+\infty[$ respectivement afin de travailler sur $\mathbb{R}$ tout entier et de vérifier $\sum_i p_i = 1$. On a le tableau de valeurs suivant :

Classe	Classe élargie	Effectif n_i	p_i	$e_i = Np_i$	$\dfrac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$
$[0;5[$	$]-\infty;5[$	50	0,0228	79,8	11,13
$[5;10[$	$[5;10[$	250	0,0610	213,5	6,24
$[10;15[$	$[10;15[$	500	0,1428	499,8	0
$[15;20[$	$[15;20[$	800	0,2217	775,95	0,75
$[20;25[$	$[20;25[$	700	0,2432	851,2	26,86
$[25;30[$	$[25;30[$	650	0,1793	627,55	0,80
$[30;35[$	$[30;35[$	320	0,0891	311,85	0,21
$[35;40[$	$[35;+\infty[$	230	0,0401	140,35	57,26
Total	–	3500	1	3500	103,25

L'indicateur d'écart est égal à $\chi^2_{obs} = 103,25$.

(c) $\boxed{\text{1pt}}$ Le nombre de degrés de liberté est égal à $\nu = k - r - 1 = 8 - 1 - 0 = 7$. Par conséquent, la table du χ^2 nous fournit $\chi^2_{lu} = \chi^2_{7;0,95} = 14,07$ et $\chi^2_{lu} < \chi^2_{obs}$. On rejette ainsi l'hypothèse H_0 : le responsable doit convenir que les livraisons ne suivent pas les prévisions.

Exercice 5 [BONUS] *Correction* : $\boxed{\text{2pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On a $p = 78\%$ et $p_0 = \dfrac{220}{300} \times 100 = 73,33\%$. On pose
   - $H_0 : p = p_0$,
   - $H_1 : p \neq p_0$,

   L'indicateur d'écart est égal à $\chi^2_{obs} = \dfrac{N(p_0 - p)^2}{p(1-p)} = 4,3706$. Comme $\chi^2_{lu} = \chi^2_{1;0,95} = 3,84 < \chi^2_{obs}$, on rejette l'hypothèse H_0.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ On a cette fois-ci $p_0 = \dfrac{190}{300} \times 100 = 63,33\%$. Dans ce cas, l'indicateur d'écart est égal à $\chi^2_{obs} = 37,6239 > \chi^2_{1;0,95}$ donc on rejette H_0.