DUT TC2 - Module OS 01 - PROBABILITÉS ET STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

CORRECTION Exercices Chapitre 1 - Lois de probabilités discrètes usuelles.

Exercice 1 <u>*Correction*</u> : X désigne ici le nombre de mauvaises résistances.

1. $P(X = 3) = C_4^3 \times 0,05^3 \times (1 - 0,05)^1 = 0,0005$.
2. $P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} C_4^k \times 0,05^k \times (1 - 0,05)^{4-k}$.

Exercice 2 <u>*Correction*</u> :

1. L'univers Ω est l'ensemble des tirages simultanés de 2 boules parmi 14. Par conséquent,
$$Card(\Omega) = C_{14}^2 = \frac{14 \times 13}{2!} = 91.$$
   - L'événement A "obtenir deux boules de la même couleur", est égal à la réunion des événements disjoints "obtenir 2 boules rouges" ou "obtenir 2 boules vertes"' ou "obtenir 2 boules jaunes". Donc, en utilisant l'équiprobabilité,
$$p(A) = \frac{C_4^2 + C_3^2 + C_7^2}{91} = \frac{30}{91}.$$
   - L'événement B est le complémentaire dans Ω de A. On a alors
$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{61}{91}.$$

2. (a) En notant X la variable aléatoire qui, à chaque partie de 10 épreuves, associe le nombre de fois où A peut être réalisé, on a
$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$$
où X_i est la variable aléatoire définie par $X_i(A) = 1$ et $X_i(B) = 0$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$. La variable X_i est donc une variable de Bernoulli de loi de probabilité

x_j	0	1	Total
$p_j = p(\{X_i = x_j\})$	$\frac{30}{91}$	$\frac{61}{91}$	1

ainsi $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{30}{91}\right)$. X étant la somme de 10 variables de Bernoulli de paramètre $\frac{30}{91}$ indépendantes deux à deux, on a finalement
$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{30}{91}\right).$$

(b) On a la relation $p(\{X = k\}) = C_{10}^k \left(\frac{30}{91}\right)^k \left(\frac{61}{91}\right)^{10-k}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ qui suffit à définir la loi de probabilité de la variable X. Pour répondre à la question, on peut également donner le tableau suivant :

k	$p_k = p(\{X = k\})$	k	$p_k = p(\{X = k\})$
0	$\left(\frac{61}{91}\right)^{10}$	6	$210\left(\frac{61}{91}\right)^4\left(\frac{30}{91}\right)^6$
1	$10\left(\frac{61}{91}\right)^9\left(\frac{30}{91}\right)$	7	$120\left(\frac{61}{91}\right)^3\left(\frac{30}{91}\right)^7$
2	$45\left(\frac{61}{91}\right)^8\left(\frac{30}{91}\right)^2$	8	$45\left(\frac{61}{91}\right)^2\left(\frac{30}{91}\right)^8$
3	$120\left(\frac{61}{91}\right)^7\left(\frac{30}{91}\right)^3$	9	$10\left(\frac{61}{91}\right)^1\left(\frac{30}{91}\right)^9$
4	$210\left(\frac{61}{91}\right)^6\left(\frac{30}{91}\right)^4$	10	$\left(\frac{30}{91}\right)^{10}$
5	$252\left(\frac{61}{91}\right)^5\left(\frac{30}{91}\right)^5$	Total	1

(c) $E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i)$ car les variables X_i sont indépendantes deux à deux. Ainsi, $E(X) = 10 \times \left(\frac{30}{91}\right) = \frac{300}{91} \simeq 3,3$ et représente le nombre moyen de réussites (les 2 boules sont de la même couleur) si on joue un grand nombre de fois.

Exercice 3 *Correction* :

1. On considère l'événement

$$\mathcal{A} : \text{“la pompe à chaleur tombe en panne durant le mois”}.$$

Soit X_i la variable aléatoire qui vérifie $X_i(\mathcal{A}) = 1$ et $X_i(\overline{\mathcal{A}}) = 0$. On a d'après l'énoncé la distribution de probabilité suivante :

x_j	0	1	Total
$p_j = p(\{X_i = x_j\})$	$0,875$	$0,125$	1

donc $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(0,125)$. X est la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le nombre de pannes survenues donc $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{12}$. On en déduit que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(12; 0,125)$$

2. On a la relation $p(\{X = k\}) = C_{12}^k (0,125)^k (0,875)^{12-k}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, 12\}$.
   (a) $p(\{X = 0\}) = C_{12}^0 (0,125)^0 (0,875)^{12-0} \simeq 0,201$.
   (b)
   $$p(\{X \le 2\}) = p(\{X = 0\}) + p(\{X = 1\}) + p(\{X = 2\})$$
   $$\Leftrightarrow p(\{X \le 2\}) = C_{12}^0 (0,875)^{12} + C_{12}^1 (0,125)(0,875)^{11} + C_{12}^2 (0,125)^2 (0,875)^{10}$$
   $$\Leftrightarrow p(\{X \le 2\}) \simeq 0,201 + 0,345 + 0,271 \simeq 0,817.$$
3. $E(X) = \sum_{i=1}^{12} E(X_i)$ car les variables X_i sont indépendantes deux à deux. On en déduit que $E(X) = 12 \times 0,125 = 1,5$ qui représente le nombre moyen de pannes annuel sur un grand nombre d'années.
4. (a) On a la relation $Y = 320X$ puisque 320 euros sont nécessaires pour réparer une panne.
   (b) Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = 320E(X) = 320 \times 1,5 = 480$. Cette espérance correspond à la somme moyenne annuelle dépensée pour réparer les pannes sur un grand nombre d'années.
   (c) En comparant les sommes, il vaut mieux ne pas souscrire au contrat de maintenance et réparer les pannes ponctuellement.
5. On suppose que $\mathcal{B}(n,p) \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = 12 \times 0,125 = 1,5$.
   - $p(\{X = 0\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} \simeq 0,223$.
   - $p(\{X \le 2\}) = p(\{X = 0\}) + p(\{X = 1\}) + p(\{X = 2\})$
   $$\Leftrightarrow p(\{X \le 2\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \simeq 0,223 + 0,335 + 0,251 \simeq 0,809.$$
6. - $\left|\frac{0,223 - 0,201}{0,223}\right| \simeq 0,099 < 0,1$ donc l'approximation est justifiée.
   - $\left|\frac{0,809 - 0,817}{0,809}\right| \simeq 9,889 \times 10^{-3} < 0,1$ donc l'approximation est également justifiée.

Exercice 4 *Correction* : Soit l'événement

$$A : \text{“l'imprimante retranscrit un caractère de manière incorrecte”}.$$

Soit X_i la variable aléatoire qui vérifie $X_i(A) = 1$ et $X_i(\overline{A}) = 0$. On a d'après l'énoncé la distribution de probabilité suivante :

x_j	0	1	Total
$p_j = p(\{X_i = x_j\})$	$0,9995$	$0,0005$	1

donc $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(0,0005)$.

1. X est la variable aléatoire qui, à tout lot de 10000 caractères, associe le nombre de caractères retranscrits incorrectement donc $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10000}$. On en déduit que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10000; 0,0005).$$

2. X est approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 10000 \times 0,0005 = 5$, soit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(5)$ donc $p(\{X = k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ ce qui implique
   (a) $p(\{X = 0\}) = \dfrac{e^{-5}5^0}{0!} \simeq 0,007$
   (b) $p(\{X \leq 2\}) = \dfrac{e^{-5}5^0}{0!} + \dfrac{e^{-5}5}{1!} + \dfrac{e^{-5}5^2}{2!} \simeq 0,007 + 0,034 + 0,084 = 0,125$
   (c) $p(\{X \geq 5\}) = 1 - p(\{X < 5\}) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{4} p(\{X = i\})\right)$
   $\Leftrightarrow p(\{X \geq 5\}) = 1 - (0,007 + 0,034 + 0,084 + 0,140 + 0,175) = 0,56.$

Exercice 5 <u>*Correction*</u> : L'univers Ω consiste en l'ensemble des tirages successifs de 2 boules dans l'urne sans remise. Donc $Card(\Omega) = 28 \times 27 = 756$. Chaque événement élémentaire admet pour probabilité $\dfrac{1}{756}$.

1. $p(E) = \dfrac{10 \times 27}{756} = \dfrac{5}{14} \simeq 0,36$ de par la situation d'équiprobabilité.
2. X est la variable aléatoire qui, à chaque partie de 5 épreuves, associe le nombre de fois que se produit l'événement E.
   (a) Soit X_i la variable aléatoire qui vérifie $X_i(E) = 1$ et $X_i(\overline{E}) = 0$. On a d'après la question précédente la distribution de probabilité :

x_j	0	1	Total
$p_j = p(\{X_i = x_j\})$	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{5}{14}$	1

   donc $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{5}{14}\right)$. X est la variable aléatoire qui, à toute suite de 5 épreuves, associe le nombre de fois où la première boule tirée est blanche donc $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_5$. On en déduit que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(5, \dfrac{5}{14}\right)$.

   (b) On a $p(\{X = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}$ donc $p(F) = p(\{X = 2\}) = C_5^2 \left(\dfrac{5}{14}\right)^2 \left(\dfrac{9}{14}\right)^3 \simeq 0,34$.

Exercice 6 <u>*Correction*</u> : On a $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(4)$. Donc

$$p(\{7 \leq X \leq 9\}) = p(\{X \leq 9\}) - p(\{X \leq 6\}) = \sum_{k=7}^{9} p(\{X = k\}) = \sum_{k=7}^{9} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$\Leftrightarrow p(\{7 \leq X \leq 9\}) = e^{-4}\left(\frac{4^7}{7!} + \frac{4^8}{8!} + \frac{4^9}{9!}\right) \simeq 0,103.$$

Exercice 7 <u>*Correction*</u> : On a $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = 100 \times 0,03 = 3$ et $p(\{X = k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

1. $p(\{X = 0\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \simeq 0,0498$
2. $p(\{X = 2\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \simeq 0,224$
3. $p(\{X = 3\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} \simeq 0,224$

Exercice 8 <u>*Correction*</u> :

1. Ω est l'univers constitué des résultats des trois tirages d'une boule avec remise dans une urne en contenant 10 (donc des 3-listes). Les tirages ayant lieu avec remise, on peut affirmer que ces tirages sont indépendants. Donc X représente le nombre de succès (obtenir une boule blanche) dans une suite de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, la probabilité d'un succès lors d'une épreuve (obtenir une boule blanche lors d'un tirage) étant de $0,6$ on peut écrire que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(3; 0,6)$. Ainsi, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $p(\{X = k\}) = C_3^k (0,6)^k (0,4)^{3-k}$. On obtient alors $p(\{X = 0\}) = 0,064$, $p(\{X = 1\}) = 0,288$, $p(\{X = 2\}) = 0,432$ et $p(\{X = 3\}) = 0,216$. Ensuite, $E(X) = 3 \times 0,6 = 1,8$ et $V(X) = 3 \times 0,6 \times 0,4 = 0,72$.

2. Ω est l'univers constitué des résultats des trois tirages d'une boule sans remise dans une urne en contenant 10 (donc des arrangements). Dans ce mode de tirage on peut obtenir 0, 1, 2 ou 3 boules blanches donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Ici on considère un ensemble E à 10 éléments dont une proportion $0,6$ de type 1 (les boules sont blanches) et on effectue 3 tirages successifs sans remise d'un élément de E donc la variable aléatoire Y représentant le nombre d'éléments de type 1 obtenu suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(10; 3; 0,6)$ et pour $0 \leq k \leq 3$, $p(\{Y = k\}) = \dfrac{C_6^k C_4^{3-k}}{C_{10}^3}$. On obtient alors $p(\{Y = 0\}) = 0,033$, $p(\{Y = 1\}) = 0,3$, $p(\{Y = 2\}) = 0,5$ et $p(\{Y = 3\}) = 0,166$. Ensuite, $E(Y) = 3 \times 0,6 = 1,8$ et $V(Y) = 3 \times 0,6 \times 0,4 \times \dfrac{10-3}{10-1} = 0,56$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ *Correction* : X_1 représente le numéro du tirage où l'on obtient une boule blanche pour la première fois. Donc X_1 peut prendre les valeurs 1 (on tire une boule blanche au premier tirage),2,...,8 (on a déja obtenu 7 boules noires et la huitième est nécessairement blanche) donc $X_1(\Omega) = \{1, 2, \ldots, 8\}$. $\{X = k\}$ signifie qu'on a obtenu $(k-1)$ boules noires au cours des $(k-1)$ premiers tirages et 1 boule blanche au k-ième tirage. Notons N_{k-1} l'événement "obtenir $(k-1)$ boules noires au cours des $(k-1)$ premiers tirages" et B_k : "obtenir une boule blanche au k-ième tirage". Alors $p(\{X = k\}) = p(N_{k-1} \cap B_k) = p(B/N_{k-1})p(N_{k-1})$. Sachant l'événement N_{k-1} réalisé, l'urne contient $10-(k-1)$ boules dont 3 boules blanches donc $p(B_k/N_{k-1}) = \dfrac{3}{11-k}$. Pour calculer la probabilité de l'événement N_{k-1} on considère le variable aléatoire Y. On a une urne contenant 10 éléments dont 7 de type 1 (boule noire), on tire successivement $k-1$ boules dans cette urne donc $Y \rightsquigarrow \mathcal{H}(10; k-1; 0,7)$ donc $p(\{Y = k-1\}) = \dfrac{C_7^{k-1} C_3^0}{C_{10}^{k-1}} = \dfrac{C_7^{k-1}}{C_{10}^{k-1}}$ et $\forall k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, $p(\{X_1 = k\}) = \dfrac{C_7^{k-1}}{C_{10}^{k-1}} \times \dfrac{3}{11-k}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ *Correction* : On rappelle les définitions du MTBF, de la **fiabilité** et de la **défaillance** :

Définition 0.1 *On appelle le MTBF la moyenne des temps qui sépare deux défaillances successives. Il n'est défini que pour les systèmes réparables.*

Le MTBF peut être déterminé en testant le sytème pendant une période T et en comptant les défaillances N qui ont eu lieu : $MTBF = m = \dfrac{T}{N}$.

Définition 0.2 *La fiabilité (Reliability en anglais) est l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise dans des conditions données et pendant une durée donnée. On note $R(t)$ cette fiabilité et on a :*

$$R(t) = p(E \textit{ non défaillant sur}[0, t])$$

avec E un événement donné.

Définition 0.3 *La défaillance (Failure en anglais) est la cessation de l'aptitude d'une entité à acoomplir une fonction requise qui passae dans l'état de panne. On note $F(t)$ cette défaillance et on a*

$$F(t) = 1 - R(t).$$

Représentons par t_i la durée de fonctionnement du i-ième équipement E.

1. On impose $p(t_1 + t_2 + \ldots + t_k > 2500h) = 0,98 = R(t)$, donc $p(t_1 + t_2 + \ldots + t_k \leq 2500h) = 1 - R(t) = F(t) = 0,02 = p(k-1$ points dans l'intervalle $[0, 2500])$. Le problème devient : combien de points répartis selon la loi de Poisson avec une densité λ_0 peuvent peupler l'intervalle $[0, 2500]$? On cherche n tel que

$$F(n) = \sum_{\ell=0}^{n} e^{-u} \frac{u^\ell}{\ell!}$$

En effet, considérons que le nombre d'occurrences moyen d'un événement sur une période de temps unité (une année par exemple) soit égal à v. Sur une période de t fois la période de temps étalon (t années par exemple), l'événement se produira en moyenne $v \times t$ fois, et si la période de temps est divisée en n intervalles, la probabilité que l'événement se déroule dans un intervalle précis sera de $\dfrac{vt}{n}$. Si on considère x occurrences pendant une période de temps t (divisée en n intervalles) dans une suite de Bernoulli quand n tend vers l'infini, on tombe sur la distribution de la loi de Poisson avec

$$p(x \text{ occurrences dans un temps } t) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{vt}{n}\right)^x \left(1 - \frac{vt}{n}\right)^{n-x} = \frac{(v \times t)^x}{x!} e^{-v \times t}$$

On a dans notre exercice "$v \times t$"$= u = \lambda_0 \times 2500 = \dfrac{2500}{MTBF} = \dfrac{2500}{500} = 5$ qui représente donc le nombre de pannes moyen pendant les 2500 heures. D'après la table relative à la loi de Poisson (annexe A1), on trouve $n = 10$ (n est la quantité en stock) et puisque $n = k - 1$, on a $k = 11$. D'où le bilan : 1 équipement installé et 10 en réserve.

2. Le temps de réparation est égal à 250 h. Donc $u = \dfrac{250}{500} = 0,5$. D'après la loi relative à la loi de Poisson (annexe A1), on a $n = 5$ pour une probabilité de 100% d'où $k = 6$ soit 1 équipement installé et 5 en réserve.