Chapitre 1

Lois de probabilités discrètes usuelles

1.1 Loi et variable de Bernoulli

1.1.1 Définition

Soit une épreuve aléatoire comportant deux issues, deux événements élémentaires appelés souvent **succès** et **échec** dont les probabilités respectives sont p et q avec $p + q = 1$.
On définit alors

$$\Omega = \{S, E\}$$

avec $p(S) = p$ et $p(E) = q$. Soit la variable aléatoire $X : \Omega \mapsto \{0, 1\}$ telle que

$$X(S) = 1 \quad ; \quad X(E) = 0$$

La variable X est appelée **variable de Bernoulli** dont la loi de probabilité est

x_i	0	1	Total
p_i	q	p	1
$p_i x_i$	0	p	$E(X) = p$
$p_i x_i^2$	0	p	$E(X^2) = p$

On note cette loi

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)}$$

Remarque 1.1.1 Cette loi ne dépend que d'un paramètre p, la probabilité de succès.

1.1.2 Moments

1. Espérance : $$\boxed{E(X) = p}$$
2. Variance : $$\boxed{V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq}$$
3. Écart-type : $$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{pq}}$$

Exemple 1.1.1 Un entreprise possède 10 chaînes de fabrication C_1, C_2,...,C_{10}. Elle sait qu'une chaîne possède un problème mais elle ignore laquelle, elle choisit alors une chaîne au hasard. On considère la variable aléatoire X prenant la valeur 1 si la chaîne testée est la chaîne défaillante et 0 sinon. Dans ce cas X est une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$. L'espérance et la variance de cette variable valent respectivement $E(X) = 0,1$ et $V(X) = 0,09$.

1.2 Loi et variable binomiales

1.2.1 Définition

Soit une épreuve de Bernoulli. À n répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli sont associées n variables aléatoires X_1, X_2,...,X_n indépendantes.
On considère la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Cette variable X désigne le nombre de succès lors de n épreuves. L'univers image de la variable X est $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. On a

$$\boxed{p(\{X = k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}}\ .$$

<u>*Preuve*</u> : L'événement $\{X = k\}$ est obtenu par le résultat de k succès et $n - k$ échecs. On peut avoir par exemple

$$\underbrace{S\ldots S}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{E\ldots E}_{(n-k) \text{ fois}}$$

de probabilité $p^k q^{n-k}$, mais il existe C_n^k événements comportant k succès et $(n - k)$ échecs d'où le résultat.■

La variable ainsi définie suit une **loi binomiale** et on note : $\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)}$

On a bien défini une loi de probabilité puisque pour $p \in]0; 1[$, $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \geq 0$, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^k (1 - p)^{n-k} = p + (1 - p) = 1$ d'après la formule du binôme.

Remarque 1.2.1 Si une variable aléatoire X représente le nombre de succès dans une série de n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p où p représente la probabilité de succès lors d'une épreuve de Bernoulli.

1.2.2 Moments

1. Espérance : $$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np}$$
2. Variance : les variables X_i étant indépendantes,
$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = npq}$$
3. Écart-type : $$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{npq}}$$

Remarque 1.2.2 On a le rapport $\dfrac{p(\{X = k+1\})}{p(\{X = k\})} = \dfrac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{p}{q}$ d'où

$$p(\{X = k+1\}) = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{p}{q} \times p(\{X = k\})$$

relation qui permet de disposer de $p(\{X = k+1\})$ lorsqu'on a déja $p(\{X = k\})$.

Exemple 1.2.1 Dans une population très nombreuse, on estime que la probabilité pour qu'une personne soit atteinte d'une maladie donnée est $0,1$. On choisit au hasard 1000 personnes de cette population (avec l'éventualité de choisir plusieurs fois la même personne). On note X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes atteintes de la maladie parmi les 1000. X représente le nombre de succès (c'est-à-dire être atteint par la maladie) dans une suite de 1000 épreuves de Bernoulli (la personne est atteinte ou pas) identiques et indépendantes donc $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1000; 0, 1)$.

1.2.3 Somme de deux variables binomiales indépendantes

Soient X_1 et X_2 telles que $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_2, p)$, X_1 et X_2 étant supposées indépendantes. Alors, la variable $Z = X_1 + X_2$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Remarque 1.2.3 On peut généraliser cette propriété à l variables binomiales indépendantes.

1.2.4 Loi et variable fréquences

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$. On définit la variable $F_n = \dfrac{X}{n}$.
X désigne le nombre de succès obtenus au cours des n épreuves, F_n le nombre de succès divisé par le nombre d'épreuves soit la fréquence du succès. F_n est la **variable fréquence** associée à X :

$$F_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

L'univers image de F_n est $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{k}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}\right\}$. On a $\{X = k\} = \left\{F_n = \dfrac{k}{n}\right\}$ donc

$$\boxed{p\left(\left\{F_n = \frac{k}{n}\right\}\right) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Concernant les moments de cette variable,

- $E(F_n) = E\left(\dfrac{X}{n}\right) = \dfrac{1}{n}E(X) = \dfrac{np}{n} = p$ donc

$$\boxed{E(F_n) = p}$$

- $V(F_n) = \dfrac{1}{n^2}V(X) = \dfrac{npq}{n^2} = \dfrac{pq}{n}$ donc

$$\boxed{V(F_n) = \frac{pq}{n}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(F_n) = \sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

Remarque 1.2.4 Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$, X désigne le nombre de succès et $Y = n - X$ le nombre d'échecs. Par conséquent, $p(\{X = k\}) = p(\{Y = n - k\}) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

1.3 Loi et variable multinomiales

1.3.1 Exemple introductif

On jette 50 fois une pièce de monnaie truquée. “Pile” apparaît avec une probabilité $0,3$, “face” avec une probabilité $0,6$, la pièce retombe sur la tranche avec une probabilité de $0,1$.
Quelle est la probabilité d'obtenir 20 “pile”, 25 “face”, 5 tranches ?
Cet événement peut être obtenu de la façon suivante

$$\underbrace{P \ldots P}_{\text{20 fois}}\underbrace{F \ldots F}_{\text{25 fois}}\underbrace{T \ldots T}_{\text{5 fois}}$$

et sa probabilité vaut $(0,3)^{20}(0,6)^{25}(0,1)^5$. Le nombre de ces 50-uplets est égal au nombre de façons de disposer 20 fois la lettre P, 25 fois la lettre F et 5 fois la lettre T dans un mot de longueur 50. Ce nombre est $C_{50}^{20}C_{30}^{25}C_5^5 = C_{50}^{20}C_{30}^{25}$, la probabilité de cet événement vaut par conséquent

$$C_{50}^{20}C_{30}^{25}(0,3)^{20}(0,6)^{25}(0,1)^5.$$

1.3.2 Loi trinomiale

Soit une épreuve aléatoire à 3 issues A de probabilité p, B de probabilité q et C de probabilité r avec $p+q+r=1$. Pour n répétitions indépendantes de cette épreuve, on cherche la probabilité d'obtenir k fois A, i fois B et donc $n-k-i$ fois C. Cette probabilité vaut :

$$C_n^k C_{n-k}^i C_{n-k-i}^{n-k-i} p^k q^i r^{n-k-i}$$

or $C_{n-k-i}^{n-k-i} = 1$ et $C_n^k C_{n-k}^i = \dfrac{n!}{k!i!(n-k-i)!}$. Conclusion, cette probabilité vaut :

$$\boxed{p = \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!} p^k q^i r^{n-k-i}}$$

Exemple 1.3.1 Une équipe de football gagne un match avec une probabilité de $0,3$, le perd avec une probabilité de $0,4$, fait match nul avec une probabilité de $0,3$. Sur les 36 matchs joués dans l'année, on cherche la probabilité d'obtenir 15 succès, 18 échecs et 3 nuls. Cette probabilité vaut

$$p = C_{36}^{15} C_{21}^{18} C_3^3 (0,3)^{15}(0,4)^{18}(0,3)^3 = \frac{36!(0,3)^{15}(0,4)^{18}(0,3)^3}{15!18!3!}.$$

1.3.3 Loi multinomiale

Supposons qu'il y ait dans une urne N boules de r couleurs distinctes C_1, C_2,…,C_r. Soit n_i le nombre de boules de couleur C_i et $p_i = \dfrac{n_i}{N}$ la proportion de boules de la couleur C_i dans l'urne. On a

$$N = \sum_{i=1}^{r} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_r \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1.$$

Supposons que l'on effectue un tirage de n boules, chaque boule étant remise dans l'urne avant le tirage de la boule suivante ; les tirages répétés des boules sont des épreuves indépendantes. On cherche la probabilité d'obtenir l'événement A défini par

- m_1 boules de la couleur C_1
- m_2 boules de la couleur C_2

  $\vdots$
- m_i boules de la couleur C_i

  $\vdots$
- m_r boules de la couleur C_r

avec $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$.

Cet événement est réalisé par exemple avec le n-uplet

$$\underbrace{C_1 \ldots C_1}_{m_1 \text{ boules } C_1} \quad \underbrace{C_2 \ldots C_2}_{m_2 \text{ boules } C_2} \quad \cdots \quad \underbrace{C_r \ldots C_r}_{m_r \text{ boules } C_r}$$

de probabilité $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$. Le nombre de ces n-uplets est égal au nombre de façons de disposer m_1 fois la lettre C_1, m_2 fois la lettre C_2,…, m_r fois la lettre C_r dans un mot de longueur $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$ d'où la probabilité de l'événement A :

$$p(A) = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} \ldots C_{m_r}^{m_r} (p_1)^{m_1} (p_2)^{m_2} \ldots (p_r)^{m_r}.$$

On a la relation $C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} \ldots C_{m_r}^{m_r} = \dfrac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}$, par conséquent,

$$\boxed{p(A) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_r!}(p_1)^{m_1}(p_2)^{m_2}\dots(p_r)^{m_r}}$$

Exemple 1.3.2 Une urne est composée de 10% de boules rouges, 20% de boules blanches, 40% de boules vertes, 30% de noires. Le nombre de boules de l'urne est $N > 20$. On effectue un tirage avec remise de 12 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges, 5 boules blanches, 3 boules vertes et une boule noire ?
Il suffit d'appliquer la formule précédente :

$$p = \frac{12!}{3!5!3!1!}(0,1)^3(0,2)^5(0,4)^3(0,3)^1.$$

1.4 Loi et variables hypergéométriques

1.4.1 Définition

Soit une urne contenant N boules dont a boules blanches et b boules noires avec $a + b = N$. On effectue n tirages d'une boule sans remise (ou on prélève simultanément n boules) avec $n \leq N$. Le tirage sans remise est dit **exhaustif**. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches obtenues.

La variable X est dite **hypergéométrique**. On utilise la notation

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, a, n)}$$

Cette loi dépend de trois paramètres et

$$\boxed{p(\{X = k\}) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n}}$$

En effet, $\{X = k\}$ est l'ensemble des parties à k éléments parmi a donc $Card(\{X = k\}) = C_a^k C_b^{n-k}$.

Remarque 1.4.1 Si p est la proportion des boules blanches de l'urne, q celle des noires, on a $p = \dfrac{a}{N}$ et $q = \dfrac{b}{N}$ avec $p+q = 1$ donc $a = pN$, $b = qN$ et $p(\{X = k\}) = \dfrac{C_{pN}^k C_{qN}^{n-k}}{C_N^n} = \dfrac{C_{pN}^k C_{(1-p)N}^{n-k}}{C_N^n}$. La loi est notée $\mathcal{H}(N, p, n)$.

1.4.2 Les moments

On admettra les propriétés suivantes :

— L'espérance mathématique est donnée par :

$$\boxed{E(X) = np}$$

la formule est identique à celle de la loi binomiale.

— La variance est définie par :

$$\boxed{V(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = npq\rho}$$

avec $\rho = \dfrac{N-n}{N-1}$ définissant le **coefficient d'exhaustivité**.

Remarque 1.4.2 Généralement $n > 1$ donc $\rho < 1$. La variance d'une variable hypergéométrique (tirages sans remise) est inférieure à la variance de la variable binomiale (tirages avec remise).

Exemple 1.4.1 Chaque matin, un professeur interroge 4 étudiants pour tester leur connaissance du cours. Une indiscrétion lui permet de savoir que dans la classe composée de 45 étudiants, 10 ne connaissent pas le cours. On se trouve dans la situation d'un ensemble E comprenant 45 éléments dont une proportion $\frac{10}{45}$ est de type 1 (les étudiants ne connaissent pas le cours), le professeur interroge 4 étudiants successivement, sans interroger deux fois le même (ce qui correspond à 4 tirages successifs sans remise d'un élément de E) alors la variable aléatoire X représentant le nombre d'éléments de type 1 obtenu suit une loi hypegéométrique $\mathcal{H}\left(45, 4, \frac{10}{45}\right)$.

1.4.3 Limite d'une variable hypergéométrique

Soit X une variable hypergéométrique, $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, p, n)$. Lorsque N tend vers $+\infty$,

$$\mathcal{H}(N, p, n) \to \mathcal{B}(n, p).$$

En effet, le nombre N de boules étant infiniment grand, la non-remise de la boule tirée ne modifie presque pas la proportion de boules blanches. Dans la pratique,

$$\mathcal{H}(N, p, n) \xrightarrow{\text{si } N > 10n} \mathcal{B}(n, p).$$

1.5 Loi et variable de Poisson

On rappelle la formule

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} = e^x}$$

1.5.1 Définition

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$) si et seulement si l'univers image de X est $\mathbb{N}$ et

$$\boxed{p(\{X = k\}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$$

On note cette variable

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)}$$

Puisque $\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \geq 0$, on a bien une loi de probabilité.

Remarque 1.5.1 La loi de Poisson est encore appelée **loi des événements rares**. On peut admettre que le nombre de pannes survenant sur une machine donnée au cours d'une période donnée suit une loi de Poisson, ou encore le nombre d'accidents qui se produisent à un carrefour donné pendant une période donnée.

1.5.2 Les moments

— Espérance : on a la relation

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

<u>*Preuve*</u> : Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\in\mathbb{N}} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$.

En réalisant un changement d'indice, $E(X) = \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$. ■

— Variance et écart-type : on a les résultats suivants

$$\boxed{V(X) = \lambda} \text{ et } \boxed{\sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$$

<u>*Preuve*</u> : Déterminons $E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$.
$E(X(X-1)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{k(k-1)\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k\in\mathbb{N}/\{0,1\}} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k\in\mathbb{N}/\{0,1\}} \dfrac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$. On effectue un changement d'indice dans la somme et $E(X(X-1)) = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{i\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$.
Ainsi $E(X^2) - E(X) = \lambda^2 \Leftrightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$. Par conséquent, $V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ donc $V(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$. ■

Remarque 1.5.2

- $\dfrac{p_k}{p_{k-1}} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k (k-1)!}{e^{-\lambda}\lambda^{(k-1)} k!} = \dfrac{\lambda}{k}$ ce qui signifie que $p_k = \dfrac{\lambda}{k} p_{k-1}$.
- Il existe des tables (voir annexe A1) donnant $p_k = p(\{X = k\})$ pour différentes valeurs de k et des tables donnant $\sum_{k=0}^{n} p_k$ (voir annexes A2 et A3) c'est-à-dire la valeur de la fonction de répartition de X en n pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}$. Pour le calcul de $p(\{X > k\})$, il suffit d'utiliser la relation $p(A) + p(\overline{A}) = 1$ avec $A = \{X > k\}$ et $\overline{A} = \{X \leq k\}$ ce qui permet de calculer $p(\{X > k\}) = 1 - p(\{X \leq k\}) = 1 - \sum_{j=0}^{k} p_j$.

Exemple 1.5.1 Dans une entreprise. on admet que le nombre de pièces défectueuses produites par minute est une variable aléatoire X avec $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(3)$. Déterminons la probabilité de l'événement A : "le nombre de pièces défectueuses produites en 1 minute est supérieur à 3".
Par définition, $p(A) = p(\{X > 3\}) = 1 - p(\{X \leq 3\}) = 1 - 0,6472 = 0,3528$, ceci en utilisant l'annexe A2.

1.5.3 Somme de deux variables de Poisson indépendantes

Soient $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$, X_1 et X_2 étant indépendantes. La variable $X = X_1 + X_2$ suit alors une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$X = X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Remarque 1.5.3 On peut généraliser ce résultat à n variables de Poisson indépendantes.

1.5.4 Limite d'une variable binomiale

— Soit X une variable binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Si p tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$ de telle sorte que np ait une limite finie λ, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ tend vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
— Dans la pratique on approxime la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$ si $n \geq 30$, $p < 0,1$ et $np \leq 10$.
— L'intérêt de cette approximation est l'utilisation des tables de la loi de Poisson, plus commodes que celles de la loi binomiale.

1.6 Loi et variable géométriques

1.6.1 Définition

Soit une épreuve aléatoire à deux issues, succès et échec, de probabilités respectives p et q avec $p + q = 1$. On répète cette épreuve (épreuves indépendantes) jusqu'à obtenir le premier succès. On considère la variable

aléatoire X donnant le rang du premier succès ou encore le nombre d'épreuves nécessaires à l'obtention d'un premier succès
Lorsque X est une variable géométrique, l'univers image est $\mathbb{N}^*$.
L'événement $\{X = k\}$ est obtenu par la réalisation de $k-1$ échecs puis d'un succès.

$$\boxed{p(\{X = k\}) = q^{k-1}p}$$

On notera alors :

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)}$$

On peut vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité. On a besoin pour cela du rappel suivant :

Rappel : Si $|x| \leq 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1}{1-x}$.

On a par conséquent $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $q^{k-1}p \geq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1}p = p \sum j = 0^{n-1} q^j \xrightarrow{n\to+\infty} p\dfrac{1}{1-q} = 1$ donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}p =$ 1.

Exemple 1.6.1 On considère une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1-p$, on tire une infinité de fois une boule avec remise. Avec l'exact formalisme précédent, la variable aléatoire X représente le rang où on obtient une boule blanche pour la première fois.

1.6.2 Moments

— L'espérance mathématique est définie par

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

<u>*Preuve*</u> : $E(X) = X$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k} kp(\{X = k\})$ est absolument convergente. La série étant à termes positifs, la convergence absolue est éqivalente à la convergence.

Rappel : Si $x \in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n\to} \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

On a par conséquent $\sum\limits_{k=0}^{n} kp(\{X = k\}) = \sum\limits_{k=0}^{n} kq^{k-1}p = p\sum\limits_{k=0}^{n} kq^{k-2} \xrightarrow{n\to+\infty} p\dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{p}{p^2} = \dfrac{1}{p}$ ■

— La variance et l'écart-type sont respectivement définis par

$$\boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}} \text{ et } \boxed{\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}}$$

On admettra ce résultat.

1.7 Exercices

Exercice 1 Pour réaliser le montage d'un système électronique, on dispose de résistances issues d'une production importante, où l'on sait que le pourcentage P de résistances défectueuses est de 5%. On doit utiliser 4 résistances.

1. Quelle est la probabilité d'en avoir 3 de mauvaises ?

2. Quelle est la probabilité d'en avoir un nombre inférieur ou égal à 3 de mauvaises ?

Exercice 2 Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que les tirages sont équiprobables.

1. On considère les événements suivants :
   A : "obtenir 2 boules de la même couleur",
   B : "obtenir 2 boules de couleurs différentes".
   Calculez les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.
2. On répète 10 fois l'épreuve précédente en remettant les 2 boules tirées dans la boîte, après chaque tirage. Les 10 épreuves aléatoires élémentaires sont donc indépendantes. On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie de 10 épreuves, associe le nombre de fois où l'événement A est réalisé.
   (a) Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
   (b) Donnez une loi de probabilité de X en complétant, après l'avoir reproduit, le tableau suivant, dans lequel on fera figurer des valeurs approchées arrondies avec un seul chiffre différent de zéro.

k	0	$\cdots$
$p(\{X = k\})$	$\cdots$	$\cdots$

   (c) Calculez l'espérance mathématique $E(X)$ de X. Que représente $E(X)$?

Exercice 3 On envisage l'installation d'une pompe à chaleur en relève de chaudière dans un hôtel "deux étoiles" en construction.
On se propose d'étudier si le contrat de maintenance forfaitaire annuel proposé par l'installateur, après la période de garantie d'un an, est plus avantageux que la facturation au prix réel des interventions ponctuelles.
Une étude statistique permet au constructeur d'affirmer que la probabilité de l'événement "la pompe à chaleur tombe en panne une fois pendant un mois donné" est $0,125$.
Dans un but de simplification, on admet que, pendant un mois donné, la pompe à chaleur ne peut tomber en panne qu'au plus une fois et que les pannes éventuelles survenues deux mois d'une même année sont indépendantes. On note X la variable aléatoire qui, à chaque année (de douze mois), associe le nombre de pannes survenues à la pompe.

1. Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   A : "il n'y a pas de panne dans l'année",
   B : "il y a au plus deux pannes dans l'année".
3. Calculez l'espérance mathématique, notée $E(X)$, de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?
4. Les résultats d'une étude statistique menée auprès de nombreux utilisateurs de ce modèle de pompe à chaleur n'ayant souscrit de contrat de maintenance annuel permettent d'admettre que le coût d'une intervention est de 320 euros. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque année associe le montant total en euros des frais de réparation de la pompe à chaleur.
   (a) Écrivez une relation entre les variables Y et X.
   (b) Déterminez l'espérance mathématique, notée $E(Y)$, de la variable Y. Que représente $E(Y)$?
   (c) Le contrat de maintenance forfaitaire annuel de la pompe à chaleur est proposé par l'installateur au prix de 685 euros TTC.
   Quelle est la solution de maintenance la plus intéressante sur une longue période ?
5. On approche la loi binomiale du 1. par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ où n et p sont les paramètres de cette loi binomiale.
   En utilisant la loi de Poisson, déterminez les probabilités respectives de deux événements A et B de la question 2.

6. On considère que, pour un événement, l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson est justifiée lorsque l'erreur relative $\frac{p-p'}{p}$ est, en valeur absolue, inférieure à 10% (p étant la probabilité de cet événement mesurée avec la loi de Poisson). Pour chacun des deux événements précédents, déterminez si l'approximation de la loi binomiale du 1. par la loi de Poisson du 5. est justifiée.

Exercice 4 La probabilité qu'une imprimante de modèle PRINT ne puisse transcrire correctement un caractère est $0,0005$; on suppose que les qualités de transmission des caractères sont indépendantes.
On désigne par X la variable aléatoire qui à tout lot de 10000 caractères associe le nombre de caractères transcrits incorrectement par l'imprimante.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On admet que la loi de probabilité suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
   Quelle est la probabilité que, parmi 10000 caractères à imprimer,
   (a) tous soient transcrits correctement ?
   (b) au moins 9998 soient transcrits correctement ?
   (c) plus de 5 caractères soient transcrits incorrectement ?

Exercice 5 Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 18 boules rouges indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à extraire, au hasard, l'une après l'autre et sans remise, deux boules de l'urne. On est dans une situation d'équiprobabilité.

1. Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
   $$E : \text{“la première boule tirée est blanche”}.$$
2. On répète 5 fois de suite l'épreuve précédente. Après chaque épreuve, les 2 boules tirées sont remises dans l'urne : les 5 épreuves élémentaires précédentes sont donc indépendantes.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie de 5 épreuves, associe le nombre de fois que se produit l'événement E.
   (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement
   $$F : \text{“}E\text{ se produit exactement 2 fois”}.$$

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 4. Déterminez la probabilité d'avoir $7 \leq X \leq 9$.

Exercice 7 3% des bouteilles d'eau fabriquées par une usine sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 3.
Trouvez la probabilité de chacun des 3 événements suivants :

1. “Un tel lot n'a aucune bouteille défectueuse”
2. “Un tel lot a deux bouteilles défectueuses”
3. “Un tel lot a trois bouteilles défectueuses”

Exercice 8 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires.

1. On tire dans cette urne trois fois 1 boule avec remise de cette boule après tirage. On note X le nombre de boules blanches obtenues.
   Déteminez la loi de X puis donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

2. On tire dans cette urne trois fois une boule sans remise de cette boule après tirage. On note Y le nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminez la loi de Y puis donner les valeurs de $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 9 On considère une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire successivement et sans remise les dix boules de l'urne. On note X_1 le numéro du tirage où l'on obtient une boule blanche pour la première fois. Déterminez la loi de X_1.

Exercice 10 Le système de navigation d'un navire comporte un équipement E dont la fiabilité est exponentielle avec un MTBF (mean time between failures - temps moyen entre pannes) théorique égal à 500 heures. Ce navire doit effectuer une mission de 2500 heures sans ravitaillement technique.

1. Si l'on veut la certitude pratique (98%) de la continuité de la fonction assurée par E, combien au départ doit-on emporter d'équipements E ?
2. On suppose maintenant que l'on puisse réparer à bord l'équipement E et l'on estime que le temps d'indisponibilité pour la réparation n'excède pas 250 heures. Combien doit-on emporter d'équipements E pour avoir la certitude (à 100% près par hypothèse) de la continuité de la fonction assurée par E ?
   N.B. On estime que la réparation ne dégrade pas le $MTBF = 500$ heures.

ANNEXE A1 - Probabilités individuelles de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X=k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$:

k \ λ	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k \ λ	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$	$3,5$	$4,0$	$4,5$	$5,0$
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0492	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1454	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337
2	0,1839	0,2510	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2132	0,2240	0,2158	0,1954	0,1898	0,1404
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044
8		0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653
9			0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363
10				0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181
11					0,0002	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082
12					0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034
13						0,0001	0,0002	0,0006	0,0013
14							0,0001	0,0002	0,0005
15								0,0001	0,0002
16									0,0001

ANNEXE A2 - Probabilités individuelles et cumulées de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X=k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $F(k) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}$:

λ	1		2		3		4		5	
k	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$
0	0,3679	0,3679	0,1353	0,1353	0,0498	0,0498	0,0183	0,0183	0,0067	0,0067
1	0,3679	0,7358	0,2707	0,4060	0,1494	0,1991	0,0733	0,0916	0,0337	0,0404
2	0,1839	0,9197	0,2707	0,6767	0,2240	0,4232	0,1465	0,2381	0,0842	0,1247
3	0,0613	0,9810	0,1804	0,8571	0,2240	0,6472	0,1954	0,4335	0,1404	0,2650
4	0,0153	0,9963	0,0902	0,9473	0,1680	0,8152	0,1954	0,6288	0,1755	0,4405
5	0,0031	0,9994	0,0361	0,9834	0,1008	0,9161	0,1563	0,7851	0,1755	0,6160
6	0,0005	0,9999	0,0120	0,9955	0,0504	0,9665	0,1042	0,8893	0,1462	0,7622
7	0,0001	1,0000	0,0034	0,9989	0,0216	0,9881	0,0595	0,9489	0,1044	0,8666
8			0,0009	0,9998	0,0081	0,9962	0,0298	0,9786	0,0653	0,9319
9			0,0002	1,0000	0,0027	0,9989	0,0132	0,9919	0,0363	0,9682
10					0,0008	0,9997	0,0053	0,9972	0,0181	0,9863
11					0,0002	0,9999	0,0019	0,9991	0,0082	0,9945
12					0,0001	1,0000	0,0006	0,9997	0,0036	0,9980
13							0,0002	0,9999	0,0013	0,9993
14							0,0001	1,0000	0,0005	0,9998
15									0,0002	0,9999
16									0,0001	1,0000

λ	6		7		8		9		10	
k	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$
0	0,0025	0,0025	0,0009	0,0009	0,0003	0,0003	0,0001	0,0001		
1	0,0149	0,0174	0,0064	0,0073	0,0027	0,0030	0,0011	0,0012	0,0005	0,0005
2	0,0446	0,0620	0,0223	0,0296	0,0107	0,0138	0,0050	0,0062	0,0023	0,0028
3	0,0892	0,1512	0,0521	0,0818	0,0286	0,0424	0,0150	0,0212	0,0076	0,0104
4	0,1339	0,2851	0,0912	0,1730	0,0573	0,0996	0,0337	0,0550	0,0189	0,0293
5	0,1606	0,4457	0,1277	0,3007	0,0916	0,1912	0,0607	0,1157	0,0378	0,0671
6	0,1606	0,6063	0,1490	0,4497	0,1221	0,3134	0,0911	0,2068	0,0631	0,1302
7	0,1377	0,7440	0,1490	0,5987	0,1396	0,4530	0,1171	0,3239	0,0901	0,2203
8	0,1033	0,8472	0,1304	0,7291	0,1396	0,5925	0,1318	0,4557	0,1126	0,3329
9	0,0688	0,9161	0,1014	0,8305	0,1241	0,7166	0,1318	0,5874	0,1251	0,4580
10	0,0413	0,9574	0,0710	0,9015	0,0993	0,8159	0,1186	0,7060	0,1251	0,5381
11	0,0225	0,9799	0,0452	0,9466	0,0722	0,8881	0,0970	0,8030	0,1137	0,6968
12	0,0113	0,9912	0,0264	0,9730	0,0481	0,9362	0,0728	0,8758	0,0948	0,7916
13	0,0052	0,9964	0,0142	0,9872	0,0296	0,9658	0,0504	0,9261	0,0729	0,8645
14	0,0022	0,9986	0,0071	0,9943	0,0169	0,9827	0,0324	0,9585	0,0521	0,9166
15	0,0009	0,9995	0,0033	0,9976	0,0090	0,9918	0,0194	0,9780	0,0347	0,9513
16	0,0003	0,9998	0,0014	0,9990	0,0045	0,9963	0,0109	0,9889	0,0217	0,9730
17	0,0001	1,0000	0,0006	0,9996	0,0021	0,9984	0,0058	0,9947	0,0128	0,9857
18			0,0002	0,9999	0,0009	0,9993	0,0029	0,9976	0,0071	0,9928
19			0,0001	1,0000	0,0004	0,9997	0,0014	0,9989	0,0037	0,9965
20					0,0002	0,9999	0,0006	0,9996	0,0019	0,9984
21					0,0001	1,0000	0,0003	0,9998	0,0009	0,9993
22							0,0001	0,9999	0,0004	0,9997
23								1,0000	0,0002	0,9999
24									0,0001	1,0000

ANNEXE A3 - Probabilités individuelles et cumulées de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette table donne $p(\{X = k\}) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ pour $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $F(k) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^l}{l!}$:

λ	11		12		13		14		15	
k	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$	$p(k,\lambda)$	$F(k)$
0										
1	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001						
2	0,0010	0,0012	0,0004	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001			
3	0,0037	0,0049	0,0018	0,0023	0,0008	0,0010	0,0004	0,0005	0,0002	0,0002
4	0,0102	0,0151	0,0053	0,0076	0,0027	0,0037	0,0013	0,0018	0,0007	0,0009
5	0,0224	0,0375	0,0127	0,0203	0,0070	0,0107	0,0037	0,0055	0,0019	0,0028
6	0,0411	0,0786	0,0255	0,0458	0,0152	0,0259	0,0087	0,0142	0,0048	0,0076
7	0,0646	0,1432	0,0437	0,0895	0,0281	0,0540	0,0174	0,0316	0,0104	0,0180
8	0,0888	0,2320	0,0655	0,1550	0,0457	0,0997	0,0304	0,0620	0,0194	0,0374
9	0,1085	0,3405	0,0874	0,2424	0,0661	0,1658	0,0473	0,1093	0,0324	0,0698
10	0,1194	0,4599	0,1048	0,3472	0,0859	0,2517	0,0663	0,1756	0,0486	0,1184
11	0,1194	0,5793	0,1144	0,4616	0,1015	0,3532	0,0844	0,2600	0,0663	0,1847
12	0,1094	0,6887	0,1144	0,5760	0,1099	0,4631	0,0984	0,3584	0,0829	0,2676
13	0,0926	0,7813	0,1056	0,6816	0,1099	0,5730	0,1060	0,4644	0,0956	0,3622
14	0,0728	0,8541	0,0905	0,7721	0,1021	0,6751	0,1060	0,5704	0,1024	0,4656
15	0,0534	0,9075	0,0724	0,8445	0,0885	0,7636	0,0989	0,6693	0,1024	0,5680
16	0,0367	0,9442	0,0543	0,8988	0,0719	0,8355	0,0866	0,7559	0,0960	0,6640
17	0,0237	0,9679	0,0383	0,9371	0,0550	0,8905	0,0713	0,8272	0,0847	0,7487
18	0,0145	0,9824	0,0255	0,9626	0,0397	0,9302	0,0554	0,8826	0,0706	0,8193
19	0,0084	0,9908	0,0161	0,9787	0,0272	0,9574	0,0409	0,9235	0,0558	0,8751
20	0,0046	0,9954	0,0097	0,9884	0,0177	0,9751	0,0286	0,9521	0,0418	0,9169
21	0,0024	0,9978	0,0055	0,9939	0,0109	0,9680	0,0191	0,9712	0,0299	0,9468
22	0,0012	0,9990	0,0030	0,9969	0,0065	0,9925	0,0121	0,9833	0,0204	0,9672
23	0,0006	0,9996	0,0016	0,9985	0,0037	0,9962	0,0074	0,9907	0,0133	0,9805
24	0,0003	0,9999	0,0008	0,9993	0,0020	0,9982	0,0043	0,9950	0,0083	0,9888
25	0,0001	1,0000	0,0004	0,9997	0,0010	0,9992	0,0024	0,9974	0,0050	0,9938
26			0,0002	0,9999	0,0005	0,9997	0,0013	0,9987	0,0029	0,9967
27			0,0001	1,0000	0,0002	0,9999	0,0007	0,9994	0,0016	0,9983
28					0,0001	1,0000	0,0003	0,9997	0,0009	0,9992
29							0,0002	0,9999	0,0004	0,9996
30							0,0001	1,0000	0,0002	0,9998
31									0,0001	0,9999
32									0,0001	1,0000