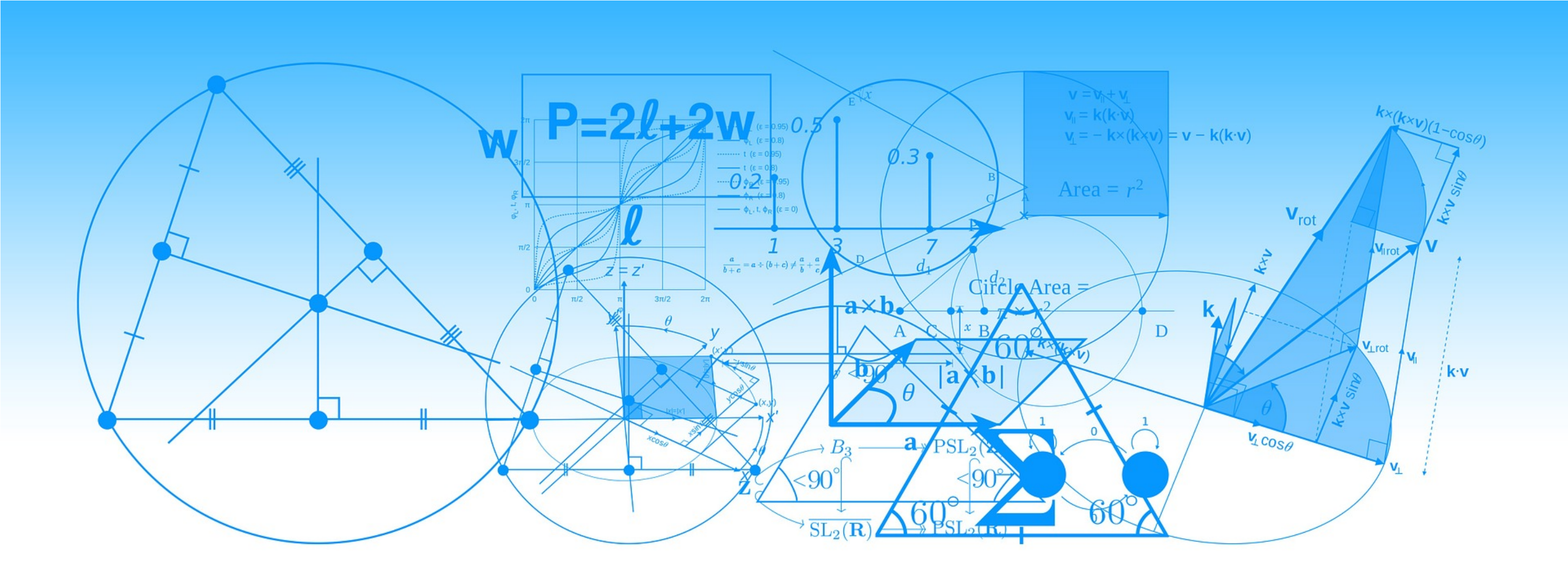


1. Les suites numériques

1.1 Notions génériques

1.1.1 Vocabulaire

Definition 1.1.1 Soit E un ensemble. On appelle suite à valeurs dans E une application de $\mathbb{N}$ dans E. L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.

Dans ce chapitre, nous nous préoccuperons des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ (nous dirons aussi suites de réels). Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ sera typiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) quand il n'y a pas d'ambiguïté. Les entiers n sont les indices de la suite et leurs images u_n sont les termes de la suite. La suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet différent de l'ensemble $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$. En particulier, une suite aura toujours une infinité de termes, même si ces termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs différentes. Par exemple, pour $u_n = (-1)^n$, la suite est $(u_n) = (1,-1,1,-1,1,\ldots)$, et l'ensemble $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble $\{-1,1\}$.
Il existe deux manières de définir une suite de réels à partir d'une fonction :

- Définition explicite :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = f(n)$$

  où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

  ■ **Exemple 1.1**
  1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = n$
  2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$
  3. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^{-n}$

  ■

- Définition par récurrence :

$$u_0\in\mathbb{R} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = F(u_n)$$

  où F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les mêmes exemples peuvent être définis par :

■ **Exemple 1.2**

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$

■

Definition 1.1.2

- Soit a un réel. On appelle suite arithmétique de raison a une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a$$

- Soit r un réel. On appelle suite géométrique de raison r une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = r u_n$$

On vérifie aisément par récurrence qu'une suite arithmétique de raison a a pour terme général $u_n = u_0 + na$.
De même, une suite géométrique de raison r a pour terme général $u_n = u_0 r^n$.

Definition 1.1.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est :

- constante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$;
- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$;
- strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$;
- strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$;
- monotone si elle est croissante ou décroissante ;
- majorée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré ;
- minorée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est minoré ;
- bornée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné ;
- périodique si $\exists p \in \mathbb{N}^\star$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.

R

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Il arrive qu'une suite ne soit définie que sur une partie de $\mathbb{N}$: par exemple, $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
On sera également amené à réduire la suite aux indices au-delà d'un certain entier n_0 : $(u_n)_{n\geq n_0}$.
L'expression "à partir d'un certain rang" reviendra souvent dans les pages qui suivent. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété $(\mathscr{P})$ à partir d'un certain rang signifie que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ la possède pour un certain n_0. On dit aussi que $(\mathscr{P})$ est vraie pour "n assez grand". Voici quelques exemples :

Definition 1.1.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la suite (u_n) est :

- constante à partir d'un certain rang (on dit aussi stationnaire) si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$;
- croissante à partir d'un certain rang si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- périodique à partir d'un certain rang si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}^\star$, $\forall n \geq n_0$, $u_{n+p} = u_n$.

■ **Exemple 1.3**
- La suite $\left(E\left(\frac{4}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang $n_0 = 4$.
- La suite des décimales de $\frac{1}{90}$ est constante à partir du rang $n_0 = 2$.
- La suite $(|n-5|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang $n_0 = 5$.
- La suite des décimales de $\frac{53}{2475}$ est périodique, de période $p = 2$ à partir du rang $n_0 = 3$.

■

R
- Quel que soit le nombre rationnel x, la suite des décimales de x est périodique à partir d'un certain rang.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir d'un certain rang, alors elle est majorée tout court. En effet, si $u_n \leq M$ pour tout $n \geq n_0$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, M\}$$

- De même, une suite minorée à partir d'un certain rang est minorée, une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

Proposition 1.1.1 Les opérations sur les réels s'étendent aux suites en des opérations terme à terme.
- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- Multiplication : $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$
- Mulitplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- Comparaison : $(u_n) \leq (v_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq v_n$

L'addition a les mêmes propriétés que celle des réels : R^N muni de l'addition est un groupe commutatif. Muni de l'addition et de la multiplication par un réel, c'est un espace vectoriel. Cependant, le produit de deux suites peut être nul sans que les deux suites le soient : R^N muni de l'addition et de la mutiplication est un anneau commutatif non intègre.

Definition 1.1.5 Etant donnée une suite (u_n), on appelle suite extraite ou sous-suite, une suite formée de certains termes de (u_n), c'est-à-dire une suite de la forme $(v_k) = (u_{\varphi(k)})$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

■ **Exemple 1.4** Si (u_n) est la suite géométrique $((-2)^n)$, et $\varphi(k) = 2k$, alors $(v_k) = (4^k)$: on a extrait de la suite (u_n) la suite des termes d'indice pair. ■

1.1.2 Convergence

On dit que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ (sa limite) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les u_n pour n assez grand.

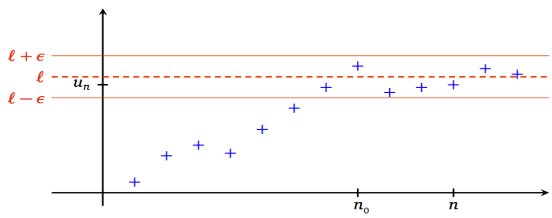
Definition 1.1.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et ℓ un réel. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ (ou tend vers ℓ, ou a pour limite ℓ) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

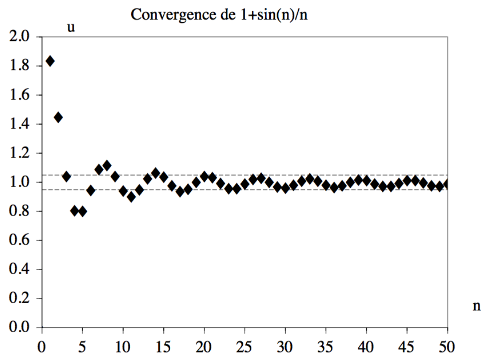
On notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ ou bien } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Notons cependant que le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ dépend de ε.



■ **Exemple 1.5** Représentons les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$:



La limite est $\ell = 1$. On a :

$$|u_n - \ell| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Fixons $\varepsilon > 0$ (sur la figure $\varepsilon = 0,05$). Posons $n_0 = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$ ($n_0 = 21$ pour $\varepsilon = 0,05$). Pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On constate sur la figure que $u_n \in [0,95; 1,05]$ pour $n \geq 18$. ■

On étend la notion de convergence aux limites infinies de la façon suivante.

Definition 1.1.7 Soit (u_n) une suite de réels.

1. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

2. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq -A$$

Voici quelques exemples classiques :

■ **Exemple 1.6**

- Suites arithmétiques : $(u_n) = (u_0 + an)$
  . Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  . Si $a = 0$, (u_n) est constante (tend vers u_0)
  . Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- Suites géométriques : $(u_n) = (u_0 r^n)$
  . Si $u_0 = 0$, (u_n) est constante (tend vers 0).
  . Si $r \leq -1$ et $u_0 \neq 0$, (u_n) ne converge pas.
  . Si $-1 < r < 1$, (u_n) tend vers 0.
  . Si $r = 1$, (u_n) est constante (tend vers u_0).
  . Si $r > 1$ et $u_0 > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  . Si $r > 1$ et $u_0 < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.

- Suites de Riemann : $(u_n) = (n^\alpha)$
  . Si $\alpha > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
  . Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante (tend vers 1).
  . Si $\alpha < 0$, (u_n) tend vers 0.

■

Proposition 1.1.2 Soit (u_n) une suite de réels.
1. Si (u_n) converge, alors sa limite est unique.
2. Si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est bornée.
3. Si pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$, et si (u_n) converge vers une limite finie, alors (u_n) est constante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.
5. Si les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ (finie ou infinie) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration. 1. Supposons que (u_n) vérifie la définition 1.1.6 pour deux réels ℓ et ℓ' distincts. Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|\ell - \ell'|$. Alors les intervalles $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ et $[\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon]$ sont disjoints. À partir d'un certain rang, les u_n devraient appartenir aux deux intervalles à la fois ce qui est impossible.
2. Fixons $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que u_n reste dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ pour tout $n \geq n_0$. Alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell+\varepsilon\},$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \min\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, \ell-\varepsilon\}.$$
3. Soit ℓ la limite. Si ℓ n'était pas un entier, pour ε suffisamment petit, l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ ne contiendrait aucun entier donc aucun des u_n. Donc ℓ doit être un entier. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. L'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ ne contient qu'un seul entier, ℓ. Comme à partir d'un certain rang tous les u_n sont dans un intervalle, et qu'ils sont tous entiers, ils sont tous égaux à ℓ.
4. Soit $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme φ est strictement croissante, pour tout n_0 il existe k_0 tel que $\varphi(k) \geq n_0$ pour tout $k \geq k_0$. Si tous les (u_n) sont dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ à partir du rang n_0, tous les $u_{\varphi(k)}$ sont dans le même intervalle à partir du rang k_0.
5. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit k_0 tel que u_{2k} reste dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Soit k_0' tel que u_{2k+1} reste dans l'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ pour tout $k \geq k_0$. Alors pour tout $n \geq \max\{2k_0, 2k_0'+1\}$, $u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$. La démonstration pour une limite infinie est analogue.

■

1.1.3 Opérations sur les limites

Lemme 1.1.3
1. La somme de deux suites convergeant vers 0 converge vers 0.
2. Le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée converge vers 0.

Démonstration. 1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, soit n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1\}$,
$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

d'où le résultat.

2. Si la suite (u_n) est bornée, alors il existe $M>0$ tel que pour tout entier n, $|u_n|\leq M$. Soit (v_n) une suite convergeant vers 0. Fixons $\varepsilon>0$. Soit n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, $|v_n|\leq\frac{\varepsilon}{M}$. Pour tout $n\geq n_0$ on a :

$$|u_nv_n|=|u_n||v_n|\leq M|v_n|\leq M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

d'où le résultat.

■

Théorème 1.1.4

1. La somme de deux suites convergeant vers une limite finie est convergente et sa limite est la somme des limites.
2. Le produit de deux suites convergeant vers une limite finie est convergent et sa limite est le produit des limites.

Démonstration. Pour nous ramener au lemme 1.1.3, observons d'abord qu'une suite (u_n) a pour limite $\ell\in\mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n-\ell)$ admet pour limite 0.

1. Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ' alors $(u_n-\ell)$ et $(v_n-\ell')$ convergent vers 0. Donc $(u_n-\ell+v_n-\ell')$ converge vers 0 d'après le point 1. du lemme 1.1.3 d'où le résultat.
2. Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', on veut montrer que $(u_nv_n-\ell\ell')$ converge vers 0. On écrit ensuite :

$$u_nv_n-\ell\ell'=u_n(v_n-\ell')+(u_n-\ell)\ell'$$

Il suffit donc de montrer séparément que les deux suites $(u_n(v_n-\ell'))$ et $((u_n-\ell)\ell')$ tendent vers 0 d'après le point 1. du lemme 1.1.3. Mais chacune de ces deux suites est le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée ((u_n) est bornée car elle est convergente) d'où le résultat en utilisant le point 2. du lemme 1.1.3.

■

Le théorème 1.1.4 est l'outil de base pour étudier des convergences de suites à partir des exemples classiques de la section précédente. On utilise aussi la composition par une fonction continue. On peut donner deux définitions équivalentes de la continuité, dont l'une est parfaitement adaptée aux suites convergentes.

Definition 1.1.8 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x un réel. On dit que f est continue au point x si et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers x, la suite des images $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$.

Toutes les fonctions qui interviennent dans ce cours sont continues, en tout point où elles sont définies.

■ **Exemple 1.7** Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$, continue en tout point de $\mathbb{R}^\star$. Donc si une suite (u_n) converge vers $\ell\neq0$, la suite des inverses $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$. En utilisant le théorème 1.1.4, on en déduit que le quotient de deux suites convergentes converge vers le quotient des limites, pourvu que la limite du dénominateur soit non nulle. ■

Si la limite de (u_n) ou celle de (v_n) est infinie, différentes situations peuvent se produire pour la somme et le produit. On les résume dans les tableaux qui suivent (les points d'interrogation désignent des indéterminations) :

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

TABLE 1.1 – Limites possibles de (u_n+v_n) en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

■ Exemple 1.8

- $u_n = n$, $v_n = -\dfrac{n+1}{n}$: la suite (u_n+v_n) tend vers 0 ;
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: la suite (u_n+v_n) tend vers $-\infty$;
- $u_n = n$, $v_n = -n+(-1)^n$ la suite (u_n+v_n) ne converge pas.

■

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'=0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell=0$	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

TABLE 1.2 – Limites possibles de (u_nv_n) en fonction des limites de (u_n) et (v_n).

1.1.4 Convergence des suites monotones

La notion de limite est liée aux notions de borne supérieure (plus petit des majorants) et borne inférieure (plus grand des minorants). Étant donnée une suite (u_n), on appellera borne supérieure et borne inférieure de (u_n) les quantités respectives :

$$\sup\{u_n, n\in\mathbb{N}\} \text{ et } \inf\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$$

Théorème 1.1.5

1. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.
2. Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
3. Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.
4. Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. Rappelons que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie. Si l'ensemble $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$ est majoré, il admet une borne supérieure finie qu'on note ℓ. Puisque ℓ est le plus petit des majorants, pour tout $\varepsilon>0$, $\ell-\varepsilon$ n'est pas un majorant. Donc il existe n_0 tel que $\ell-\varepsilon \le u_{n_0} \le \ell$. Mais si (u_n) est croissante alors pour tout $n\ge n_0$,

$$\ell-\varepsilon \le u_{n_0} \le u_n \le \ell$$

donc (u_n) converge vers ℓ.
Si la suite n'est pas majorée, pour tout A, il existe n_0 tel que $u_{n_0}\ge A$. Si (u_n) est croissante, alors pour tout $n\ge n_0$,

$$A \le u_{n_0} \le u_n$$

donc la suite (u_n) tend vers l'infini.
Si la suite (u_n) est décroissante, on applique ce qui précède à la suite croissante $(-u_n)$. ■

Definition 1.1.9 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Elles sont dites adjacentes si
1. (u_n) est croissante,
2. (v_n) est décroissante,
3. $(v_n - u_n)$ tend vers 0.

Proposition 1.1.6 Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Démonstration. Si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante alors $(v_n - u_n)$ est décroissante. Si $(v_n - u_n)$ tend vers 0, alors pour tout n, $v_n - u_n \geq 0$. Donc

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc elle converge. La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge également. Comme la différence tend vers 0, les deux limites sont égales (cf. théorème 1.1.4). ■

■ **Exemple 1.9** Posons $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. La suite (u_n) est strictement croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

La différence $v_n - u_n$ tend vers 0, donc les deux suites convergent vers la même limite à savoir le nombre $e \simeq 2,718$. Les deux suites fournissent un encadrement extrêmement précis de e, pour un nombre de termes calculés relativement faible. Pour $n = 10$, la différence $v_n - u_n$ vaut $2,76 \times 10^{-8}$, et pour $n = 100$, elle vaut $1,07 \times 10^{-160}$.
Ce même encadrement est aussi un moyen de montrer que e est irrationnel. Supposons en effet que e s'écrive $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers. On aurait $u_p < \frac{p}{q} < v_q$, soit :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{qq!}$$

Multiplions ces inégalités par $qq!$. Le nombre entier $pq!$ devrait être encadré strictement par deux entiers consécutifs, ce qui est impossible. ■

1.1.5 Comparaison de suites

Le résultat de base pour comparer deux suites est le suivant.

Théorème 1.1.7 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels convergentes. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n$$

Démonstration. Supposons $\lim u_n > \lim v_n$. Alors la limite de la suite $(u_n - v_n)$ est strictement positive. Notons ℓ cette limite. Pour n assez grand, $u_n - v_n \in \left[\frac{\ell}{2}, \frac{3\ell}{2}\right]$ donc $u_n - v_n > 0$ ce qui contredit l'hypothèse. ■

Le théorème précédent ne permet cependant pas de démontrer que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge. Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Théorème 1.1.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telle ques (v_n) tend vers 0. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$, alors u_n tend vers 0.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$,

$$|u_n| \leq |v_n| \leq \varepsilon$$

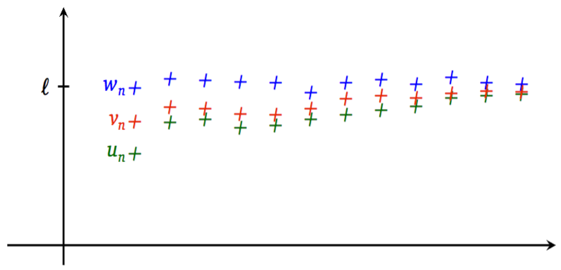
d'où le résultat. ■

On en déduit le corollaire suivant appelé "théorème des gendarmes"

Corollaire 1.1.9 — Théorème des gendarmes. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles que (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

alors (v_n) converge vers ℓ.



Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.1.8 aux deux suites $(w_n - v_n)$ et $(w_n - u_n)$. ■

■ **Exemple 1.10** Soit $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+2}$. Comme $(-1)^n$ vaut $+1$ ou -1, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n+2}$$

Les deux bornes de cette double inégalité tendent vers 1 donc $\lim u_n = 1$. ■

La comparaison vaut aussi pour les limites infinies :

Théorème 1.1.10 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
1. Si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$.
2. Si v_n tend vers $-\infty$ alors u_n tend vers $-\infty$.

Démonstration. Pour tout A, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n \geq A$ donc v_n tend vers $+\infty$ si u_n tend vers $+\infty$. La démonstration de l'autre affirmation est analogue. ■

Definition 1.1.10 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels.
1. On dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M|v_n|$$

On écrit $u_n = O(v_n)$, qui se lit "u_n est un grand O de v_n".

2. On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n) si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \ |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$
On écrit $u_n = o(v_n)$, qui se lit "u_n est un petit o de v_n".
3. On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \ |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$
On écrit $u_n \sim v_n$, qui se lit "u_n est équivalent à v_n"

Très souvent, on appliquera ces définitions pour une suite (v_n) non nulle ; dans ce cas, la comparaison se lit sur le rapport $\dfrac{u_n}{v_n}$.

Proposition 1.1.11 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que les v_n sont tous non nuls. Alors :
1. (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$$
2. (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0 :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon$$
3. (u_n) est équivalente à (v_n) si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1 :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \ \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \varepsilon$$

■ **Exemple 1.11**
- $\sqrt{4n^2+1} = O(n)$, $\sqrt{4n^2+1} = o(n^2)$, $\sqrt{4n^2+1} \sim 2n$
- L'équivalent de $n!$ donné par la formule de Stirling est souvent utile :
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

■

Observons que $u_n = o(v_n)$ entraîne $u_n + v_n \sim v_n$, ce qui permet de calculer les équivalents de toutes les fonctions polynomiales de n. Les équivalents sont souvent utilisés pour le calcul de limites de produits ou de quotients, car si $u_n \sim v_n$, et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$. Voici un exemple :

■ **Exemple 1.12** Soit le terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{8n^3+n^2}}$. Comme $1+n = o(n^2)$, $n^2+n+1 \sim n^2$ donc $\sqrt{n^2+n+1} \sim n$. Pour le dénominateur, $\sqrt[3]{8n^3+n^2} \sim 2n$ donc $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$. ■

Attention, il ne faut pas utiliser des équivalents pour des sommes.

■ **Exemple 1.13** On a $u_n = n + (-1)^n \sim n$ et $v_n = -n + (-1)^n \sim -n$. Pourtant, $u_n + v_n$ n'est pas équivalent à 0. ■

Voici trois résultats de comparaison de suites tendant vers l'infini :

Théorème 1.1.12 Soit a un réel strictement positif et r un réel strictement supérieur à 1. Alors :
1. $r^n = o(n!)$
2. $n^\alpha = o(r^n)$
3. $\ln n = o(n^a)$

Démonstration. 1. Écrivons la rapport de r^n à $n!$ comme suit :

$$\frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{k}$$

La suite $\left(\frac{r}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Donc il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\frac{r}{k} \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, pour $n \geq k_0$,

$$\frac{r^n}{n!} \leq \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{r}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}$$

La suite $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}$ tend vers 0 d'où le résultat.

2. Posons $r = 1+h$ avec $h > 0$, et écrivons la formule du binôme de Newton :

$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k$$

Pour tout $k = 1,\ldots,n$, on peut minorer r^n par $\binom{n}{k} h^k$. Fixons $k = E(a)+1$. Pour $n > 2k$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ peut être minoré comme suit :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} > \left(\frac{n}{2}\right)\frac{1}{k!}$$

Donc pour tout $n > 2k$, on a

$$\frac{n^a}{r^n} < \left(\frac{2^k k!}{h^k}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{k-a}$$

Le membre de droite tend vers 0 car, par définition, $k = E(a)+1 > a$.

3. Pour tout $n > 0$, on pose $k_n = E(\ln n)$ et $\alpha_n = \ln n - k_n$. La suite (k_n) est une suite d'entiers qui tend vers l'infini car $k_n > \ln n - 1$. Les α_n sont des réels compris entre 0 et 1. Écrivons

$$\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{k_n + \alpha_n}{e^{a(k_n+\alpha_n)}} \leq \frac{k_n}{(e^a)^{k_n}} + \frac{1}{(e^a)^{k_n}}$$

Dans le membre de droite, le premier terme peut-être vu comme une suite extraite de la suite $\frac{n}{r^n}$, avec $r = e^a$. Nous avons vu que cette suite tend vers 0 au point 2. Donc toute suite extraite tend aussi vers 0. Le dénominateur du second terme tend vers l'infini. Donc $\frac{\ln n}{n^a}$ est majoré par la somme de deux suites qui convergent vers 0. D'où le résultat.

■

Il est bon d'avoir en tête une échelle des "infiniment petits" et des "infiniment grands", c'est-à-dire des suites qui tendent vers 0 ou vers $+\infty$. Pour présenter ces échelles sous forme synthétique, nous utilisons la notation $u_n \ll v_n$, qui est équivalente à $u_n = o(v_n)$.

1. Infiniment petits :

$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln n} \ll \frac{1}{\ln(\ln n)} \ll 1$$

2. Infiniment grands :

$$1 \ll \ln(\ln n) \ll \ln n \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n!$$

1.1.6 Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = F(u_n)$$

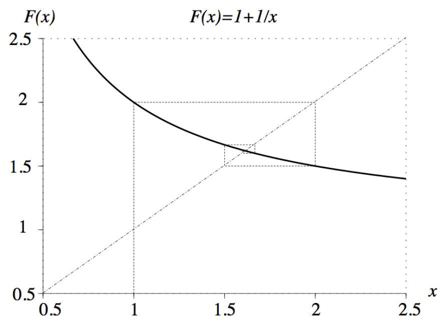
La suite est celle des itérés successifs de l'application F à partir de u_0 :

$$u_1 = F(u_0),\ u_2 = F(F(u_0)) = F \circ F(u_0),\ u_3 = F \circ F \circ F(u_0), \ldots$$

On notera F^n la composée de F avec elle même n fois :

$$u_n = F^n(u_0) = F \circ F \circ \ldots \circ F(u_0)$$

Il existe un moyen simple de visualiser les premiers termes de la suite $(F^n(u_0))$ à partir du graphe de la fonction F, représenté dans le plan. Portons u_0 en abscisse et traçons le segment vertical allant de $(u_0, 0)$ à $(u_0, F(u_0))$. Traçons ensuite le segment horizontal rejoignant la première bissectrice, de $(u_0, F(u_0))$ à $(F(u_0), F(u_0))$. L'abscisse du nouveau point est u_1. On itère alors le procédé en traçant alternativement des segments verticaux et horizontaux. On obtient ainsi une sorte de "toile d'araignée" :



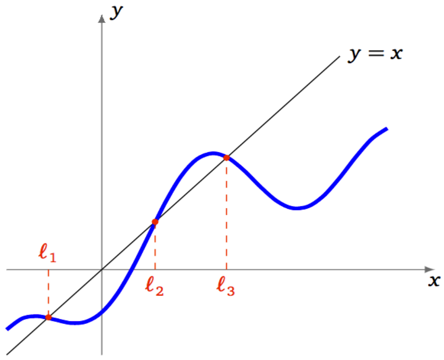
Cette représentation graphique suffit pour se faire une idée du comportement qualitatif d'une suite récurrente réelle. Elle permet de détecter les convergences ou divergences ainsi que les comportements oscillants.

Pour étudier la suite (u_n), le premier travail consiste à identifier les limites possibles. Si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors la suite (u_{n+1}), qui est une suite extraite, converge vers la même limite ℓ.

Proposition 1.1.13 Si F est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation :

$$F(\ell) = \ell$$

On dit que ℓ est un point fixe de F, car si $u_0 = \ell$, alors la suite est constante. Il peut se faire que f ait plusieurs points fixes. Le comportement de la suite u_n (monotonie, convergence ou non vers un point fixe), dépend de u_0.



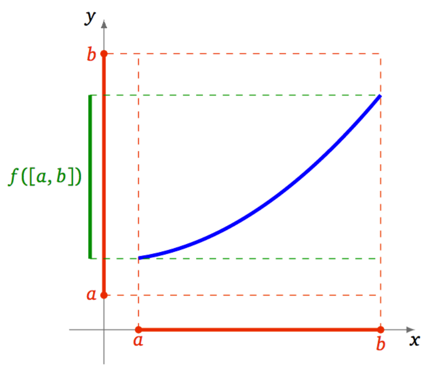
Démonstration. Lorsque $n \to +\infty$, $u_n \to \ell$ et donc $u_{n+1} \to \ell$. Comme $u_n \to \ell$ et que F est continue, la suite $(F(u_n)) \to F(\ell)$. La relation $u_{n+1} = F(u_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) : $\ell = F(\ell)$. ■

Nous allons étudier en détail deux cas particuliers, celui ou la fonction est croissante, puis celui ou la fonction est décroissante.

Cas d'une fonction croissante

Proposition 1.1.14 Si $F : [a,b] \to [a,b]$ est une fonction continue et croissante, alors quel que soit $u_0 \in [a,b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a,b]$ vérifiant $F(\ell) = \ell$.

R Il faut nécessairement vérifier que $F([a,b]) \subset [a,b]$



Démonstration. La preuve est une conséquence des résultats précédents. Par exemple si $u_1 \geq u_0$ alors la suite (u_n) est croissante, comme par ailleurs elle est majorée par b, elle converge vers un réel. Par la proposition 1.1.13, on a $F(\ell) = \ell$. Si $u_1 \leq u_0$, (u_n) est une suite décroissante et minorée par a, et la conclusion est la même. ■

Cas d'une fonction décroissante

Proposition 1.1.15 Soit $F : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

- La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $F \circ F(\ell) = \ell$.
- La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $F \circ F(\ell') = \ell'$.

R Il se peut que $\ell = \ell'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas croissant. La fonction F étant décroissante, la fonction $F \circ F$ est croissante. Et on applique la proposition 1.1.14 à la fonction $F \circ F$ et à la sous-suite (u_{2n}) définie par récurrence $u_2 = F \circ F(u_0)$, $u_4 = F \circ F(u_2)$,... ■

Traitons pour conclure cette section l'exemple historique sans doute le plus célèbre : les rapports des nombres de Fibonacci. Les nombres de Fibonacci sont définis par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, et pour $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Voici les 20 premiers :

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765$$

La suite (a_n) est une suite croissante d'entiers, elle ne s'annule pas. Pour $n \geq 1$, posons $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. La suite (u_n) vérifie $u_0 = 1$, et pour $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

C'est une récurrence du type $u_{n+1} = F(u_n)$, avec $F(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. La figure précédente représente les premières valeurs de u_n en toile d'araignée. Pour étudier (u_n), commençons par chercher les points fixes de l'application F, en résolvant l'équation

$$1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \neq 0$$

L'équation a deux solutions distinctes $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La première solution, $\phi \simeq 1,618$, est le célèbre nombre d'or ; on le retrouve (paraît-il) un peu partout, des pyramides d'Egypte aux coquilles de nautiles en passant par la Joconde. Comme u_n reste positif, la seule limite possible pour (u_n) est ϕ. Nous allons démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 1.1.16

1. La suite des termes pairs (u_{2k}) est croissante
2. La suite des termes impairs (u_{2k+1}) est décroissante
3. Chacune de ces deux suites converge vers ϕ (elles sont adjacentes). En d'autres termes, les termes u_n approchent ϕ, alternativement à gauche et à droite.

Démonstration. En soustrayant les deux équations $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ et $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$, on obtient : $u_{n+1} - \phi = \dfrac{\phi - u_n}{u_n \phi}$. Comme $u_n > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - \phi$ et $u_n - \phi$ sont de signe opposé. Puisque $u_0 < \phi$, on obtient par récurrence que pour tout $k \geq 1$: $u_{2k} < \phi < u_{2k+1}$. On peut aussi exprimer $u_{n+2} - \phi$ en fonction de $u_n - \phi$:

$$u_{n+2} - \phi = \frac{u_n - \phi}{\phi^2(u_{n+1})}$$

Or $u_n > 0$, $\phi > 1$, $u_0 < \phi$ et $u_1 > \phi$. On en déduit par récurrence que pour les termes pairs :

$$0 < \phi - u_{2k+2} < \frac{1}{\phi^2}(\phi - u_{2k}) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(\phi - u_0)$$

Pour les termes impairs,

$$0 < u_{2k+3} - \phi < \frac{1}{\varphi^2}(u_{2k+1} - \varphi) < \frac{1}{\phi^{2k+2}}(u_1 - \phi)$$

Donc la suite des termes pairs est croissante et la suite des termes impairs décroissante. Mais de plus :

$$\phi - u_{2k} = O(\phi^{-2k}) \text{ et } u_{2k+1} - \varphi = O(\phi^{-2k})$$

Les deux suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) convergent vers ϕ, car $\phi > 1$, donc ϕ^{-2k} tend vers 0. ■

1.1.7 Suites de Cauchy

Est-il possible de savoir si une suite converge (vers une limite finie), sans connaître sa limite ? La notion de suite de Cauchy répond à cette question. Elle traduit l'idée intuitive que les termes d'une suite convergente doivent être proches les uns des autres à partir d'un certain rang.

Definition 1.1.11 Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ les distances entre les termes $|u_{n+k} - u_n|$ sont inférieures à ε à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}, |u_{n+k} - u_n| \leq \varepsilon$$

Il n'est pas surprenant qu'une suite convergente soit une suite de Cauchy.

Théorème 1.1.17 Si une suite de réels converge vers une limite finie, alors c'est une suite de Cauchy.

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, écrivons :

$$|u_{n+k} - u_n| = |u_{n+k} - \ell + \ell - u_n| \leq |u_{n+k} - \ell| + |\ell - u_n|$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 à partir duquel $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

L'intérêt de cette notion est qu'elle caractérise les suites réelles convergentes : la réciproque du théorème précédent est vraie dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.18 Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.

1.2 Exercices

1.2.1 Exemples de calcul de limites de suites

Exercice 1.1 Calculer les limites (éventuelles) des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des exemples suivants :

1. $\dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$
2. $(-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}$
3. $\dfrac{E((n+\frac{1}{2})^2)}{E((n-\frac{1}{2})^2)}$
4. $\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3-1}$
5. $n^2 \ln \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$
6. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
7. $n^2 \sin \dfrac{1}{n^\alpha}$
8. $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}(3k+1)}{\sum_{k=0}^{n}(2k+3)}$
9. $\dfrac{x^n - y^n}{x^n + y^n}$
10. $\sqrt[n]{n^2}$
11. $\sqrt[n]{a^n+b^n}$, $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$
12. $n(\sqrt[n]{5}-1)$
13. $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$
14. $(\operatorname{th} n)^n$
15. $\dfrac{C_n^k}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N}$ fixé$)$

■

Exercice 1.2

1. Déterminer les constantes a, b, c telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\star},\ u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

2. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, puis $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

■

Exercice 1.3 S'inspirer de l'exercice 1.2 pour calculer

1. $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k^3-4k}$
2. $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

■

Exercice 1.4 Calculer les limites (éventuelles) des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des exemples suivants :

1. $\frac{\sin n}{n}$
2. $\left(\frac{1}{3}\sin n\right)^n$
3. $\sqrt[n]{3+\cos n}$
4. $\frac{n!}{n^n}$
5. $\frac{1}{n^\alpha}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$ (α réel >1)
6. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}$
7. $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
8. $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$
9. $\sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}}$
10. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{\sqrt{n+k}}$
11. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx),\ x \in \mathbb{R}$
12. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} kE(kx),\ x \in \mathbb{R}$
13. $\prod_{k=0}^{n-1}\left(2 - \frac{k}{n}\right)$
14. $\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

■

Exercice 1.5 Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists k \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_{n+1}| \leq k|u_n|)$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Application : Établir que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. ■

Exercice 1.6

1. Établir que $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}$.

■

Exercice 1.7

1. Établir que $\forall x\in[0,1],\ x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$
2. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}\text{ et }\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\underset{\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$$

(On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.)

■

Exercice 1.8 Établir que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
(On rappelle que $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$). ■

1.2.2 Convergence, divergence

Exercice 1.9 Montrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{2n+3}=\frac{3}{2}$.
■

Exercice 1.10 Montrer que si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors (u_n+v_n) diverge. ■

Exercice 1.11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\mathbb{Z}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. ■

Exercice 1.12 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à éléments dans $[0,1]$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_nv_n=1$.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1. ■

Exercice 1.13 Soit (u_n) une suite réelle telle que les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent . Montrer que (u_n) converge. ■

Exercice 1.14 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}n(u_{n+1}-u_n)=1$. Montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$). ■

Exercice 1.15 Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^\star$ telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers ℓ.

1. Montrer que si $\ell<1$ alors $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

2. Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Reprendre les questions 1. et 2. en supposant que $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers ℓ.

■

Exercice 1.16 Montrer que les suites $(u_n = \cos n)$ et $(u_n = \sin)$ sont divergentes. On commencera par démontrer que l'existence de l'une des limites entraîne celle de l'autre. On pourra montrer ensuite, en considérant $u_{n+1} + u_{n-1}$ et $v_{n+1} + v_{n-1}$, que l'existence des deux limites entraîne une contradiction. ■

1.2.3 Suites extraites

Exercice 1.17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle telle que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{\star 2},\ 0 \leq u_{m+n} \leq \frac{m+n}{mn}$$

Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Exercice 1.18 Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n n \end{cases}$ ■

Exercice 1.19

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.
2. Reprendre la même question en supposant que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{n^2}) convergent.

■

1.2.4 Suites monotones. Suites adjacentes

Exercice 1.20 Étudier la nature des suites définies par leur terme général u_n dans chacun des exemples suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

■

Exercice 1.21

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$
2. On pose : $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
3. En déduire que la suite de terme général $x_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ admet une limite C comprise entre 0 et 1 (C = constante d'Euler).

■

Exercice 1.22 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $\forall \alpha \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 2 \Rightarrow (1-\alpha)^n > 1 - n\alpha)$.
2. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$, montrer que la suite (u_n) est croissante ;
3. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{6n+1}$, montrer que la suite (u_n) est majorée.
4. Conclure.

Exercice 1.23 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (intégrale de Wallis).

1. Montrer que la suite (I_n) est convergente. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \sin \lambda + \left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
3. Déduire des questions précédentes que :

   a) $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ b) $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$ c) $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Exercice 1.24 Soit (u_n) une suite réelle monotone. Montrer que si (u_n) admet une suite extraite convergente, alors (u_n) converge.

Exercice 1.25 (Limite inférieure, limite supérieure)
À toute suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe les deux suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} v_n & = & \inf\{u_{n+p}, p \in \mathbb{N}\} \\ w_n & = & \sup\{u_{n+p}, p \in \mathbb{N}\} \end{array} \right.$$

1. (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée et que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée. Donc :
      - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel appelé limite inférieure de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n$.
      - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel appelé limite supérieure de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$.

   (b) Déterminer les limites inférieure et limite supérieure de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants :

   $$\text{i) } u_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{ii) } u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \quad \text{iii) } u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$$

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$.
   Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 1.26 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 1.27 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{v_n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et que leur limite commune est comprise entre $\frac{49}{36}$ et $\frac{61}{36}$.

Exercice 1.28 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. Montrer que e est irrationnel.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} - u_n \leq e - u_n \leq v_n - u_n)$, et en déduire $e - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{nn!}$.
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n - v_{n+1} \leq v_n - e \leq v_n - u_{n+3})$, et en déduire $v_n - e \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 n!}$.
5. Calculer une valeur approchée de e à 10^{-3} près.

Exercice 1.29 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = 2\sqrt{n} - S_n$ et $v_n = 2\sqrt{n+1} - S_n$.

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
2. Établir que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et que leur limite commune est positive.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$, et plus généralement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{np+k}}$ $(p \in \mathbb{N}^\star)$.

Exercice 1.30 Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $\sigma_n = S_{2n}$ et $\sigma'_n = S_{2n+1}$. Montrer que les suites (σ_n) et (σ'_n) sont adjacentes. Conclure.

Exercice 1.31 Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1. $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^{\star 2}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$
2. $0 < q \leq p$, $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^{\star 2}$, $u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q}$, $v_{n+1} = \frac{pv_n + qu_n}{p+q}$
3. $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + v_n^2}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n^2 + v_n^2}$

1.2.5 Suites définies par une relation de récurrence

Exercice 1.32 ($u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 fixé, f croissante) Étudier les suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = 0,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
2. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1$
3. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$
4. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_n}$
5. $u_0 = \frac{\pi}{4},\ u_{n+1} = 1 - \cos u_n$
6. $u_0 = 0,\ u_{n+1} = e^{au_n}$ $(a > 0)$

Exercice 1.33 ($u_{n+1} = f(u_n)$, u_0 fixé, f décroissante) Étudier les suites (u_n) définies par :

1. $u_0 = \frac{1}{2},\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$
2. $u_0 = \frac{1}{2},\ u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$
3. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{a}{u_n^2}$ $(a > 0)$
4. $u_0 = \frac{1}{2},\ u_{n+1} = (1-u_n)^2$
5. $u_0 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$
6. $u_0 = 2,\ u_{n+1} = \frac{1}{3+u_n}$

1.2.6 Suites de Cauchy

Exercice 1.34 Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 1.35

1. Démontrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $\displaystyle\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \int_{n}^{n+p} \frac{dx}{x}$.
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln x$ est de Cauchy.

Exercice 1.36 Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k^2}$, où l'application $\varphi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ est supposée injective. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (on pourra considérer $u_{2n} - u_n$).

Exercice 1.37 Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\{-1,+1\}$. On lui associe la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\varepsilon_0}{1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}{2^n}$$

1. Montrer que (a_n) converge vers un réel de l'intervalle $[-2,2]$.
2. (a) Vérifier que $\forall k \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\sin(\frac{\pi}{4}+k) = \frac{1}{2}\sqrt{2+2\sin k}$.
   (b) On considère alors
   $$x_n = \varepsilon_0\sqrt{2+\varepsilon_1\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_{n-1}\sqrt{2+\varepsilon_n\sqrt{2}}}} \quad \text{et} \quad y_n = 2\sin(\frac{\pi}{4}a_n)$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$. En déduire que (x_n) converge.
   (c) Étudier le cas où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1$. Retrouver directement ce résultat en remarquant que (x_n) peut être définie par une relation de récurrence simple.