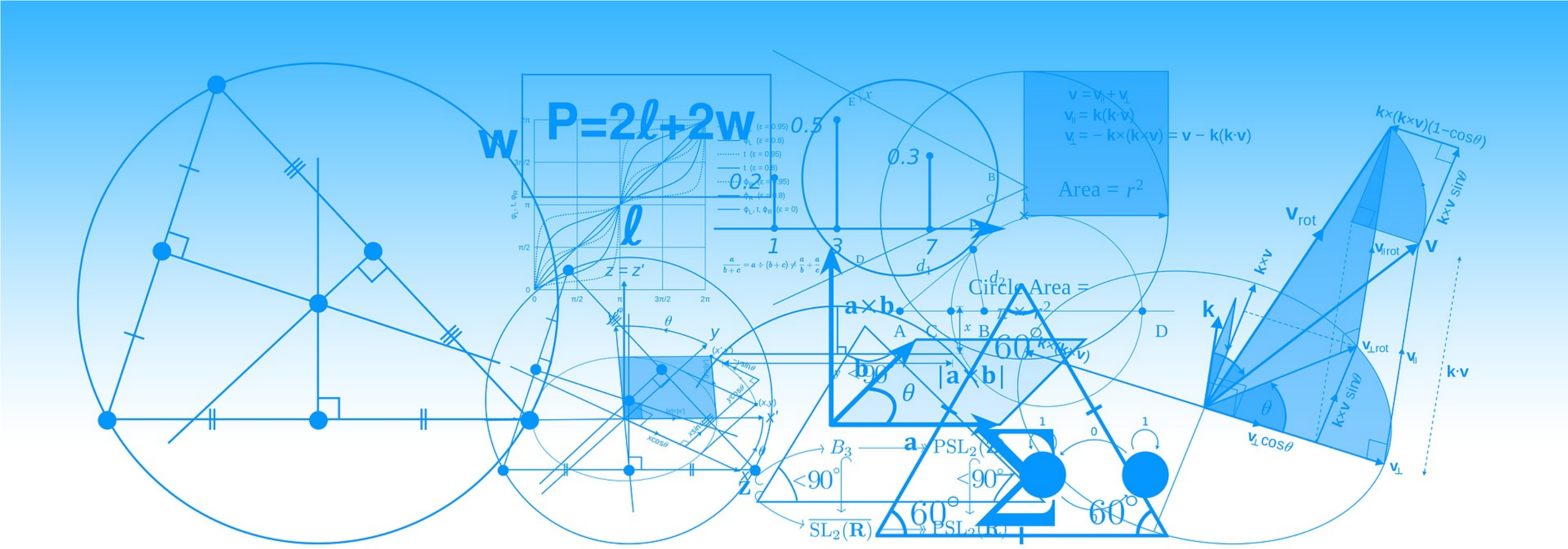


3. Limites et fonctions continues

3.1 Notions de fonction

3.1.1 Definitions

Definition 3.1.1 Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

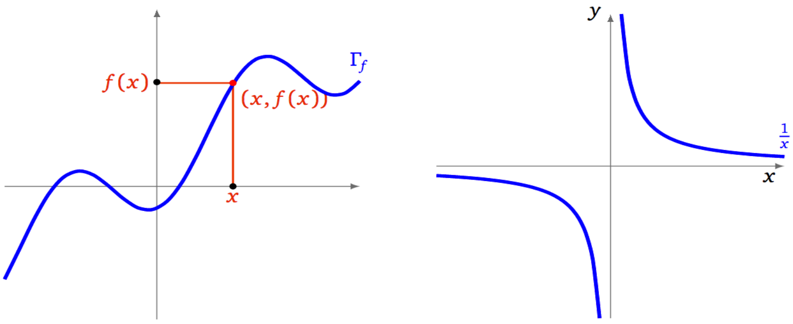
■ **Exemple 3.1** La fonction "inverse" :

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

■

Le graphe d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in U\}$.

■ **Exemple 3.2** Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (à droite).



■

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la somme de f et g est la fonction $f+g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in U$.

3.1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

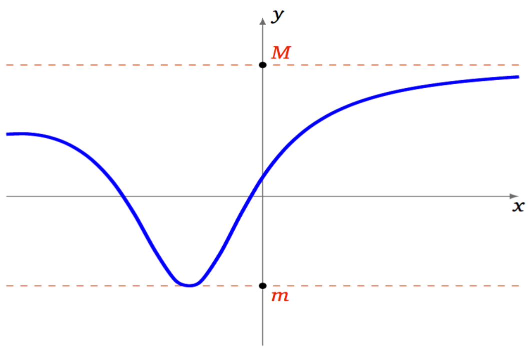
Definition 3.1.2 Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U,\ f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U,\ f(x) \geq 0$;
- $f > g$ si $\forall x \in U,\ f(x) > g(x)$;
- f est dite constante sur U si $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in U, f(x) = \alpha$;
- f est dite nulle si $\forall x \in U,\ f(x) = 0$.

Definition 3.1.3 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

- f est majorée sur U si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in U,\ f(x) \leq M$;
- f est minorée sur U si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in U,\ f(x) \geq m$;
- f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U,\ |f(x)| \leq M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).



3.1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Definition 3.1.4 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est croissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f est strictement croissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f est décroissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- f est strictement décroissante sur U si $\forall x,y \in U,\ x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- f est monotone (resp. strictement monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.

■ Exemple 3.3

- La fonction "racine carrée" $\left\{ \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ est strictement croissante.

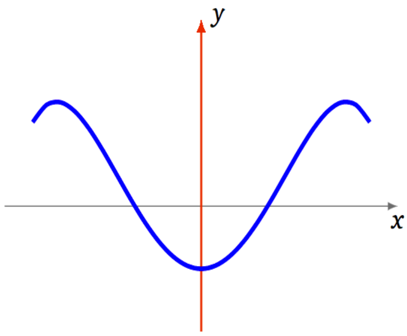
- Les fonctions "exponentielle" $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et "logarithme" $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
- La fonction "valeur absolue" $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ est strictement croissante.

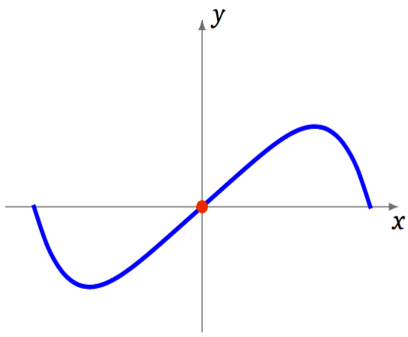
■

3.1.4 Parité et périodicité

Definition 3.1.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :
- f est paire si $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$,
- f est impaire si $\forall x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche ci-dessous).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite ci-dessous).

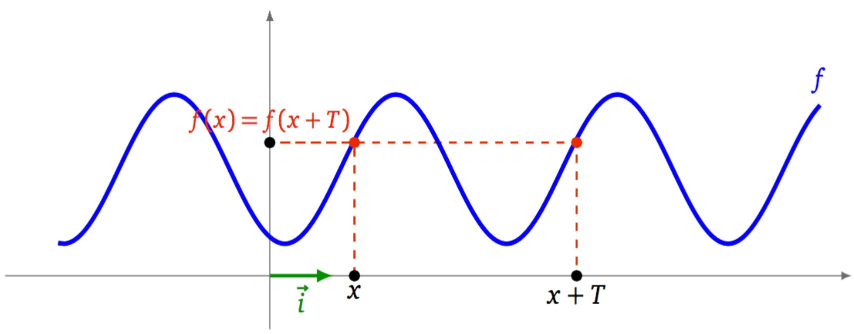




■ **Exemple 3.4**
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

■

Definition 3.1.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.



■ **Exemple 3.5** Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique. ■

3.2 Limites

3.2.1 Définitions

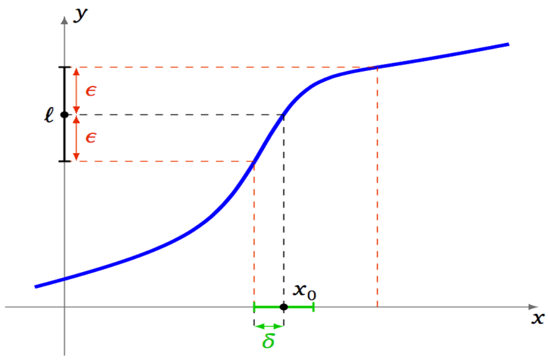
Limite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Definition 3.2.1 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.



(R) L'ordre des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ est important et on ne peut pas les échanger, le δ dépendant en général du ε.

■ **Exemple 3.6**

- $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$.
- La fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.

■

Definition 3.2.2 Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Definition 3.2.3

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si
$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x > B \Rightarrow f(x) > A$$

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

■ **Exemple 3.7** On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$

■

Limites à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Definition 3.2.4

- On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^+} f$.
- On appelle limite à gauche en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$.
- On note aussi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ pour la limite à gauche.

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

De même, $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell' \in \mathbb{R}$ à gauche en x_0 si et seulement si :

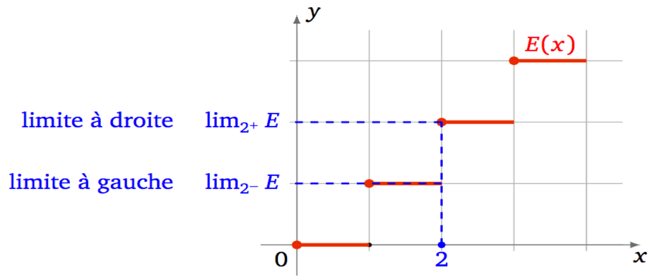
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0, x_0 - \delta' < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon$$

R

- Si la fonction f admet une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite coïncident et valent $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (f étant bien définie en x_0) alors f admet une limite en x_0.

■ **Exemple 3.8** Considérons la partie entière au point $x = 2$:

- comme pour tout $x \in]2, 3[$, $E(x) = 2$, on a $\lim\limits_{x \to 2^+} E(x) = 2$,
- comme pour tout $x \in [1, 2[$, $E(x) = 1$, on a $\lim\limits_{x \to 2^-} E(x) = 1$,



Les deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en $x_0 = 2$. ■

3.2.2 Propriétés des limites

Proposition 3.2.1 Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 3.2.2 Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \times g(x)) = \ell \times \ell'$
- Si $\ell \neq 0$ alors $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$
- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Proposition 3.2.3 Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell'$.

R Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites, qu'on appelle formes indéterminées. En voici une liste :

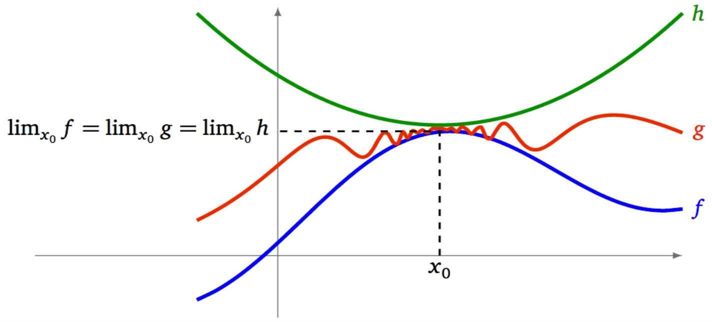
$$+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Enfin, voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Proposition 3.2.4

- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.
- Théorème des gendarmes :

Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.



3.3 Continuité en un point

3.3.1 Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Definition 3.3.1

- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

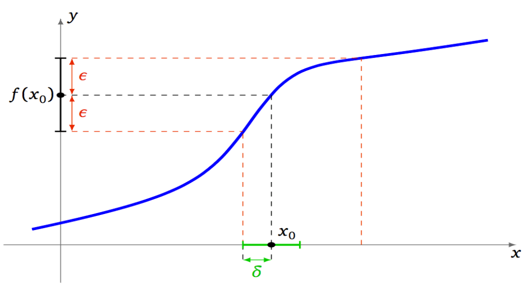
  c'est-à-dire si f admet une limite en x_0, cette limite valant nécessairement $f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

■ **Exemple 3.9** Les fonctions suivantes sont continues :

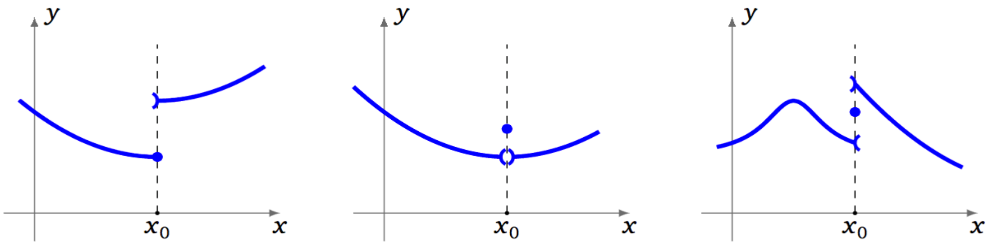
- une fonction constante sur un intervalle,
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
- les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$,
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$,
- la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,
- la fonction logarithme népérien sur $]0, +\infty[$.

■

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer son graphe sans lever le crayon de la feuille, c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.



Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0.



3.3.2 Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (ce qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale).

Lemme 3.3.1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \neq 0.$$

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 3.3.2 Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors :

- λf est continue en x_0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $f + g$ est continue en x_0,
- $f \times g$ est continue en x_0,
- $f - g$ est continue en x_0,
- si $f(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.

La composition conserve la continuité mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent.

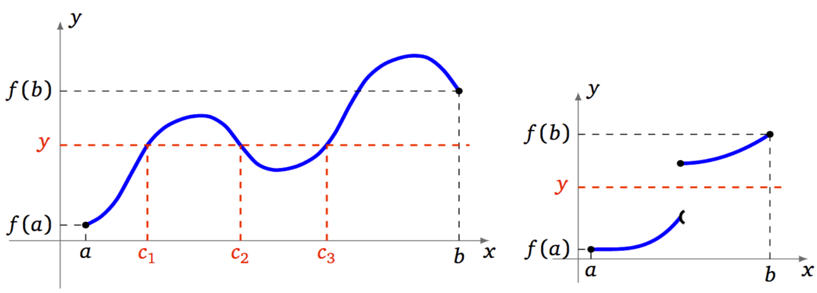
Proposition 3.3.3 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles ques $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$,alors $g \circ f$ est continue en x_0.

3.4 Continuité sur un intervalle

3.4.1 Le théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de Bolzano) et applications

Théorème 3.4.1 — Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

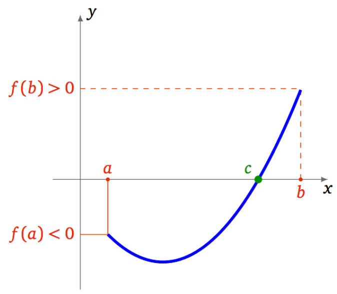
Illustrons le TVI à l'aide de la figure de gauche. Attention, le réel c n'est pas nécessairement unique.



La figure de droite montre que si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est pas vrai.

Corollaire 3.4.2 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

$$\text{Si } f(a).f(b) < 0 \text{ alors il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = 0.$$

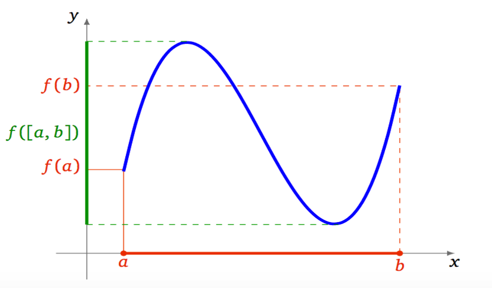


■ **Exemple 3.10** Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle. ■

Voici enfin une formulation théorique du théorème des valeurs intermédiaires :

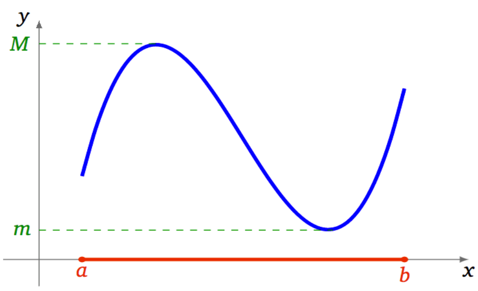
Corollaire 3.4.3 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention, il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a,b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Il suffit pour s'en convaincre de visualiser la figure suivante :



3.4.2 Fonctions continues sur un segment

Théorème 3.4.4 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a,b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

3.5 Fonctions monotones et bijections

3.5.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Definition 3.5.1 Soit $f : E \to F$ une fonction où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.
- f est injective si $\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$,
- f est surjective si $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$,
- f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F$, $\exists ! x \in E$, $y = f(x)$.

Proposition 3.5.1 Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

R
- On rappelle que l'identité $id_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$.
- $g \circ f = id_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E$, $g(f(x)) = x$.
- $f \circ g = id_F$ s'écrit : $\forall y \in F$, $f(g(y)) = y$.
- Dans un repère orthonormé, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3.5.2 Fonctions monotones et bijections

Théorème 3.5.2 — Théorème de la bijection. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I alors :
1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.

En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone.

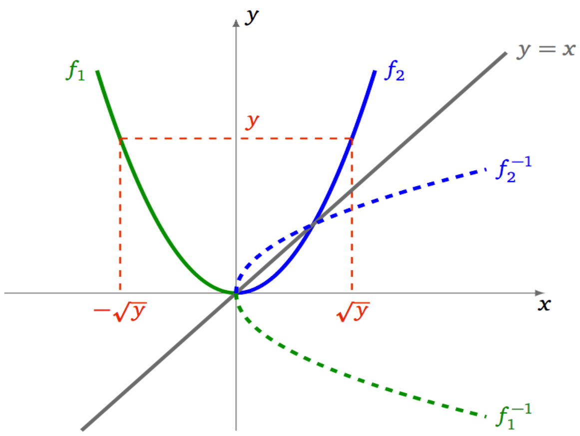
■ **Exemple 3.11** Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Elle n'est même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part, et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty,0] & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \text{ et } f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

On remarque que $f(]-\infty,0]) = f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leur fonctions réciproques respectives $f_1^{-1} : [0,+\infty[\to]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$. Soient deux réels x et $y \geq 0$. Alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \text{ ou } x = -\sqrt{y},$$

c'est-à-dire que y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0,+\infty[$ et l'autre dans $]-\infty,0]$. Donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On vérifie bien que chacune des fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.



On remarque que la courbe en pointillés (les parties bleue et verte) qui est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice, ne peut être le graphe d'une fonction (une abscisse est associée à deux ordonnées !) : c'est une autre manière de voir que f n'est pas bijective.
■

3.6 Exercices

Exercice 3.1 Calculer

1. $\sup\left\{-x^3+\dfrac{75}{4}x, x\in\mathbb{R} \text{ et } x^4+36\leq 13x^2\right\}$.
2. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}$.
3. $\max\limits_{(x,y)\in[1,2]}\left(\dfrac{1+x}{y}+\dfrac{1+y}{x}\right)$.

■

Exercice 3.2 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 3, \text{ et } f(x+1)=\frac{f(x)-5}{f(x)-3}$$

Montrer que f est 4-périodique. ■

Exercice 3.3 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que :

$$\forall a\in]0;+\infty[,\ \exists c\in\mathbb{R},\ f(c+a)=f(c).$$

■

Exercice 3.4 Étudier (à l'aide des quantificateurs) la limite des fonctions :

1. $f(x)=4x+11$ en $x=-2$,
2. $f(x)=x^2+2x$ en $x=1$,
3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ en $x=0$,
4. $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ en $+\infty$.

■

Exercice 3.5 Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

1. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$
3. $\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\arctan x}{x}$
5. $\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
6. $\lim_{x\to+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 3.6 (Formes indéterminées $\frac{0}{0}, 0\times\infty, \infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}$.)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\ln(1+x^2)}{x\tan x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{(1-2x)^3-1}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x(2-x)\tan(bx)}$, $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star$
6. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$
7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\tan x$
8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(2x)\,\mathrm{cotan}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
9. $\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{\ln(1+x^2)}-\sqrt{\ln(x^2-1)}\right]$
10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$
11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}e^x+x^9-\ln x}{x^3+(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3})e^x}$
12. $\lim_{x\to+\infty} \left[((x+1)(x+2)\dots(x+n))^{\frac{1}{n}}-x\right]$, $n\in\mathbb{N}^\star$
13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Exercice 3.7 (Formes indéterminées $1^\infty, 0^0, \infty^0$.)
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
2. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x$
3. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
4. $\lim_{x\to 0} (\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x\to+\infty} [\ln(1+e^{-x}]^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\cos\left(a+\frac{1}{x}\right)}{\cos a}\right]^x$, $a\in\mathbb{R}, \cos a\neq 0$
7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$
8. $\lim_{x\to 2} (2^x+3^x-12)^{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^x}{2^x}$
10. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $(a,b)\in\mathbb{R}_+^{\star 2}$

Exercice 3.8 Étudier, en tout point, la continuité des applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

1. $f(x)=E(x)+[x-E(x)]^2$
2. $f(x)=x+\sqrt{x-E(x)}$
3. $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$
4. $f(x)=[E(x)+E(-x)]\sin(kx)$, $k\in\mathbb{R}$

Exercice 3.9

1. Déterminer les domaines de définition et de continuité de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.
2. On pose
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Montrer que g est continue sur $[-1,+\infty[$.

Exercice 3.10 Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$
(Montrer que f est continue en 2 points.)
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}^\star \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$
(Montrer que f est continue en 2 points, et qu'elle est bijective.)
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$
(Montrer que f est discontinue en tout point, et qu'elle est bijective.)

Exercice 3.11 Trouver toutes les applications f dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x)$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(x^2)$.

Exercice 3.12 Les nombres de $[0,1]$ sont donnés par leur représentation décimale :
$$x = 0,a_1a_2a_3\ldots$$
En quels points la fonction
$$\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & 0,a_2a_3a_4\ldots \end{array}$$
est-elle continue, discontinue ?

Exercice 3.13 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f\left(t + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 3.14 Montrer que la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3.15 Soit $f :]0,1] \to]0;+\infty[$ une application telle que

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} \underset{x\to 0}{\to} 2.$$

Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\to} 1$. ■

Exercice 3.16 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

■

Exercice 3.17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et périodique. Montrer que f est bornée. ■

Exercice 3.18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées. ■

Exercice 3.19 Montrer que les applications suivantes f sont bijectives, et préciser f^{-1}.

1. $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} f :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$

■

Exercice 3.20 Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5+x+1 \end{array}$ est bijective, puis résoudre l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. ■