CPI1 - EIL-CO **Calais - ULCO**

Analyse 1.2 Janvier 2017 - Contrôle Terminal, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{6pts}}$

1. • $\boxed{\text{1pt}}$ Démontrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit $P(n)$ la propriété "$u_n > 0''$.
   . La propriété est vraie au rang $n = 0$ par définition.
   . Supposons que la propriété $P(n)$ est vraie au rang $n > 0$.
   . Vérifions que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On a
   $$u_n > 0 \Rightarrow \frac{3}{u_n} > 0 \Rightarrow u_n + \frac{3}{u_n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > 0.$$
   L'hérédité est ainsi démontrée.
   En conclusion, la propriété (P_n) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.
   • Pour que la suite soit stationnaire, il est nécessaire et suffisant que $u_0 = \sqrt{3}$.
   . $\boxed{\text{1pt}}$ En effet, si la suite est stationnaire, cela signifie que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0.$$
   Or,
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2u_n} = \frac{-u_n^2 + 3}{2u_n}.$$
   Ainsi, si la suite est stationnaire, cela implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{3}$. En particulier, pour $n = 0$, on a $u_0 = \sqrt{3}$.
   . $\boxed{\text{0,5pt}}$ Réciproquement, supposons que $u_0 = \sqrt{3}$. Montrons alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{3}$. Par récurrence, la propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons que $u_n = \sqrt{3}$ pour un n donné. On a alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\boxed{\text{0,5pt}}\ u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}[(u_n^2 + 3) - 2\sqrt{3}u_n] = \frac{1}{2u_n}[(u_n - \sqrt{3})^2]$$
   et
   $$\boxed{\text{0,5pt}}\ u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}[(u_n^2 + 3) + 2\sqrt{3}u_n] = \frac{1}{2u_n}[(u_n + \sqrt{3})^2].$$

   (b) $\boxed{\text{1,5pt}}$ On a vu précédemment que $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3}{2u_n}$. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}[(u_n - \sqrt{3})^2]$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ (voir question 1.) et $(u_n - \sqrt{3})^2 \geq 0$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq \sqrt{3}$. On sait que l'inégalité est stricte car sinon, il existerait un indice k à partir duquel pour tout $n \geq k$, $u_n = \sqrt{3}$. La suite serait donc stationnaire à partir d'un certain rang (cf. question 1.) ce qui est exclu puisque $u_0 = 1 \neq \sqrt{3}$. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > \sqrt{3}$ et $\forall n \geq 1$, $u_n > \sqrt{3} \Rightarrow 3 - u_n^2 < 0$. Ainsi, $\forall n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n$, ce qui assure la décroissance de la suite pour $n \geq 1$.

(c) $\boxed{1\text{pt}}$ La suite est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$, $\forall n \geq 1$, elle converge donc vers une limite ℓ qui vérifie $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{3}{\ell}\right) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{3}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3$. Des deux solutions de cette équation ($\ell = -\sqrt{3}$ ou $\ell = +\sqrt{3}$), seule la deuxième est possible car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et nécessairement, $\ell \geq 0$. Finalement, la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{4\text{pts}}$

1. $\boxed{1\text{pt}}$ La fonction Argsh est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$ donc, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geq 1$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Finalement, par produit puis composition, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $\boxed{1\text{pt}}$ De la même manière, puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et que $1 + x^2 \geq 1$, on en déduit la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. La dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de l'argument sinus hyperbolique implique alors par produit puis composition celle de f.
3. $\boxed{1\text{pt}}$ On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} + 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 + (2x\sqrt{1+x^2})^2}} = 2\frac{1 + x^2 + x^2}{\sqrt{1+x^2} \times \sqrt{1 + 4x^2 + 4x^4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1+2x^2}{\sqrt{(1+2x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

car $1 + 2x^2 \geq 0$.
4. $\boxed{1\text{pt}}$ On a donc sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2(\text{Argsh})'(x)$. Il existe donc une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\,\text{Argsh}\, x + C$. En remplaçant x par 0, on obtient $f(0) = 0 = 2 \times 0 + C \Leftrightarrow C = 0$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\,\text{Argsh}\, x$.

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{3\text{pts}}$

- $\boxed{1\text{pt}}$ En vertu des théorèmes usuels, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On obtient aisément
$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$
Comme $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + 1) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Par conséquent, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe.
- $\boxed{1\text{pt}}$ On a la définition suivante :

Definition 1. *La droite d'équation $y = ax + b$ (a étant ici différent de 0) est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.*
Les valeurs de a et de b se calculent à l'aide des formules suivantes :
. $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$,
. $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$.

On veut démontrer ici que la courbe représentative de f est asymptote à la droite d'équation $y = x$ quand x tend $+\infty$. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x)+\ln(1+e^{-x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\ln(1+e^{-x})}{x}\right) = 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(e^x+1)-x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(e^x(1+e^{-x}))-x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x+\ln(1+e^{-x})-x) = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x}) = 0,$$

on obtient bien le résultat attendu.

- $\boxed{1\text{pt}}$ f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. f^{-1} réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in]0,+\infty[$ tel que $y = f(x)$. On a

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(e^x+1) \Leftrightarrow e^y = e^x+1 \Leftrightarrow e^x = e^y-1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y-1).$$

Notons que si $y \in]0,+\infty[$, alors $e^y-1>0$. Finalement, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f^{-1}(x) = \ln(e^x-1)$.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{4\text{pts}}$

1. Rappels :

Théorème 1. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit λ un réel. Alors, on a les résultats suivants :*
- *la fonction $(f+g)$ est continue sur I. Autrement dit, la somme de deux fonctions continues sur un même intervalle est continue sur cet intervalle,*
- *la fonction $(f-g)$ est continue sur I. Autrement dit, la différence de deux fonctions continues sur un même intervalle est continue sur cet intervalle,*
- *la fonction $(f\times g)$ est continue sur I. Autrement dit, le produit de deux fonctions continues sur un même intervalle est continu sur cet intervalle,*
- *la fonction est continue sur I. Autrement dit, le produit d'un réel par une fonction continue sur un intervalle est continu sur cet intervalle.*

$\boxed{1{,}5\text{pt}}$ Pour tout $x \in]-\infty,1[$, $f(x) = |x|+x+1$. Sur cet intervalle, f est la somme de la fonction valeur absolue, continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty,1[$, et de la fonction affine $x \mapsto x+1$, continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty,1[$. Par conséquent, f est continue sur $]-\infty,1[$.
Pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}(x^2+2)$. Sur cet intervalle, f est le produit de la fonction carrée, continue sur $\mathbb{R}_+ \supset]1,+\infty[$, par la fonction polynôme $x \mapsto x^2+2$, continue sur $\mathbb{R} \supset]1,+\infty[$. Par conséquent, f est continue sur $]1,+\infty[$.
Il en résulte que f est continue sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

2. Étudions la continuité de f en 1.
$\boxed{0{,}5\text{pt}}$ D'une part, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = |1|+1+1 = 3.$

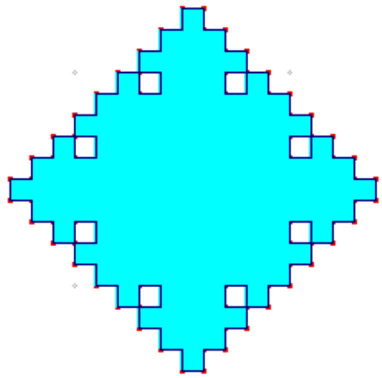
$\boxed{0{,}5\text{pt}}$ D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \sqrt{1}(1^2+2) = 3.$

$\boxed{1\text{pt}}$ Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = f(1) = 3$. Autrement dit, la fonction f est continue en 1.

3. $\boxed{0{,}5\text{pt}}$ D'après la première question, f est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et d'après la question précédente, f est également continue en 1. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *Correction* : $\boxed{5\text{pts}}$

1. $\boxed{1\text{pt}}$ On a la figure F_3 suivante :



2. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ (c_n) est une suite géométrique de permier terme $c_1 = 4$ et de raison 5 donc, $c_n = 4 \times 5^{n-1}$.

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ (ℓ_n) est une suite géométrique de permier terme $\ell_1 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{3}$ donc $\ell_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

   (c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $p_n = c_n \ell_n$ donc $p_n = 4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-1}$.

3. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme $\dfrac{5}{3} > 1$, (p_n) diverge.

4. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ À l'étape $n+1$, on ajoute c_n carrés d'aire ℓ_{n+1}^2. D'où,

$$A_{n+1} = A_n + c_n \ell_{n+1}^2 = A_n + \frac{4}{9}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}.$$

   (b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ $A_n = 1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{9} + \dfrac{4}{9} \times \left(\dfrac{5}{9}\right) + \ldots + \dfrac{4}{9} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1} = 1 + \dfrac{4}{9}\left[\dfrac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 - \frac{5}{9}}\right] = 2 - \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$.

   (c) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme $\dfrac{5}{9} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 2$.

5. $\boxed{\text{0,5pt}}$ La figure limite a un périmètre infini mais une aire finie.