

Analyse 1.2

Janvier 2017 - Contrôle Terminal, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 2h00

Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right).$$

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle stationnaire ?
2. On pose $u_0 = 1$.
 - (a) Démontrer les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{3})^2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{3})^2.$$

- (b) Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante pour $n \geq 1$.
- (c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 On définit la fonction f par

$$f(x) = \operatorname{Argsh}(2x\sqrt{1+x^2}).$$

1. Préciser son ensemble de définition.
2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Préciser alors la dérivée de f .
4. En déduire une expression plus simple de f .

Exercice 3 Etudier les variations de la fonction $f(x) = \ln(e^x + 1)$. On vérifiera que lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe représentative de f est asymptote à la droite d'équation $y = x$. Montrer que cette fonction admet une réciproque f^{-1} et expliciter cette dernière (on résoudra pour cela l'équation $y = f(x)$ par rapport à x).

Exercice 4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} |x| + x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x(x^2 + 2)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. Étudier la continuité de f en 1.
3. En déduire la continuité de la fonction f sur son ensemble de définition.

Exercice 5 On considère un carré F_1 de côté de longueur 1. Au milieu de chaque côté, à l'extérieur de F_1 , on place un carré de côté $1/3$, dont on supprime le côté en contact avec la figure initiale. On obtient ainsi une figure F_2 .

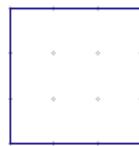


Figure F_1

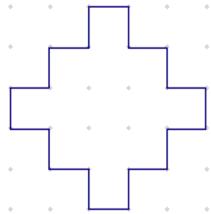


Figure F_2

On procède de même avec F_2 . On obtient ainsi une nouvelle figure F_3 . En réitérant le procédé, on construit une suite (F_n) de figures. On note p_n le périmètre de F_n .

1. Tracer F_3 .
2. Exprimer en fonction de n :
 - (a) le nombre de côtés c_n de F_n ,
 - (b) la longueur ℓ_n de chaque côté de F_n ,
 - (c) le périmètre p_n de F_n .
3. La suite (p_n) converge-t-elle ?
4. On note A_n l'aire de F_n .
 - (a) Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n .
 - (b) En déduire A_n en fonction de n .
 - (c) Montrer que (A_n) converge et calculer sa limite.
5. Quelles réflexions relatives au périmètre et à l'aire de la figure limite vous inspirent ce problème ?