CPI1 - EIL-CO **Calais - ULCO**

Analyse 1.2 Mars 2017 - Contrôle Terminal, Semestre 1 - Session2/rattrapage

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* $\boxed{\text{6pts}}$

1. $\boxed{\text{0,5pt}}$ On obtient en sortie : $-0,5$.

2. (a) $\boxed{\text{0,5pt}}$ L'algorithme modifié est le suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Afficher u
Sortie :	Fin de pour

(b) $\boxed{\text{0,5pt}}$ Puisque $u_4 > u_3$, la suite (u_n) n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

(c) $\boxed{\text{1,5pt}}$ On démontre le résultat par récurrence :

- Initialisation : on vient de voir que $u_4 > u_3$: la relation est vraie pour $n = 3$.
- Hérédité : on suppose qu'il existe un naturel p tel que $u_{p+1} > u_p$. D'où $0,5u_{p+1} < 0,5u_p$. D'autre part, $p+1 > p \Rightarrow 0,5(p+1) > 0,5p$. En sommant ces deux dernières inégalités, on obtient aisément que

$$0,5u_{p+1} + 0,5(p+1) - 1,5 > 0,5u_p + 0,5p - 1,5 \Leftrightarrow u_{p+2} > u_{p+1}.$$

Donc la relation est vraie au rang $p+1$.

- Conclusion : on a démontré que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 4$.

(d) $\boxed{\text{1pt}}$ Pour tout naturel n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 \\
&= 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 \\
&= 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 \\
&= 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 \\
&= 0,05u_n - 0,05n + 0,25 \\
&= 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\
&= 0,5v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,5$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Le premier terme est $v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$. On a ainsi pour tout naturel n, $v_n = 1 \times 0,5^n = \dfrac{1}{2^n}$.

(e) $\boxed{\text{1pt}}$ On a

$$v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \Leftrightarrow 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$$
$$\Leftrightarrow 10 \times 0,5^n = u_n - n + 5 \Leftrightarrow u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

(f) $\boxed{\text{1pt}}$ Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on obtient facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) ne converge pas.

Exercice 2 *Correction* $\boxed{\text{3pts}}$

- $\boxed{\text{1,5pt}}$ On pose $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ qui est définie, continue et dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. On a

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \frac{(2\cos x + 1)(\cos x - 1)^2}{\cos^2 x} \geq 0 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}[.$$

Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) \geq 0$ et on en déduit l'inégalité de Huygens.

- $\boxed{\text{1,5pt}}$ On pose $g(x) = 2\operatorname{sh} x + \operatorname{th} x - 3x$ qui est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. On a

$$g'(x) = 2\operatorname{ch} x + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 3 = (2\cosh x + 1)\frac{(\cosh x - 1)^2}{\cosh^2 x} \geq 0 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Comme $g(0) = 0$, on a $g(x) \geq 0$ et on en déduit la version hyperbolique de l'inégalité de Huygens.

Exercice 3 *Correction* $\boxed{\text{6pts}}$

1. On calcule
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(2) = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln(50000 \times 2) = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln(10^5) = \dfrac{20}{\ln(10)} \times 5\ln(10) = 100.$
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(0,2) = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln(50000 \times 0,2) = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln(10^4) = \dfrac{20}{\ln(10)} \times 4\ln(10) = 80.$
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $f(0,02) = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln(50000 \times 0,02) = \dfrac{20}{\ln(10)}\ln(10^3) = \dfrac{20}{\ln(10)} \times 3\ln(10) = 60.$
   - $\boxed{\text{1pt}}$ Enfin,

$$\begin{aligned} f(p_0) &= \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000p_0) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000 \times 20 \times 10^{-6}) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(1000000 \times 10^{-6}) \\ &= \frac{20}{\ln(10)}\ln(10^3) = \frac{20}{\ln(10)} \times \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{1,5pt}}$ On résout :

$$\begin{aligned} f(p) \geq 120 &\Leftrightarrow \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000p) \geq 120 \\ &\Leftrightarrow \ln(50000p) \geq \frac{120 \times \ln(10)}{20} \\ &\Leftrightarrow \ln(50000p) \geq 6\ln(10) \\ &\Leftrightarrow \ln(50000p) \leq \ln(10^6). \end{aligned}$$

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $]0, +\infty[$, on déduit

$$\ln(50000p) \geq \ln(10^6) \Leftrightarrow 50000p \geq 10^6 \Leftrightarrow p \geq \frac{100000}{50000} = 20.$$

La pression correspondant au niveau sonore de 120 décibels est donc de 20 Pascals.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Pour tout réel $x \geq p_0$, on calcule

$$\begin{aligned} f(10x) &= \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000\times 10x) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(500000x) = \frac{20}{\ln(10)}[\ln(50000x)+\ln(10)] \\ &= \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)}\ln(10) = f(x)+20. \end{aligned}$$

Le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ Pour tout réel $x \geq p_0$, on calcule

$$\begin{aligned} f(100x) &= \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000\times 100x) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(5000000x) = \frac{20}{\ln(10)}[\ln(50000x)+\ln(100)] \\ &= \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)}\ln(100) = \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)}\ln(10^2) \\ &= \frac{20}{\ln(10)}\ln(50000x) + \frac{20}{\ln(10)}\times 2\ln(10) = f(x)+40. \end{aligned}$$

Le niveau sonore augmente de 40 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 100.

Exercice 4 *Correction* $\boxed{\text{3pts}}$

- $\boxed{\text{0,5pt}}$ Pour tout $x \in]4,+\infty[$, $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$. Sur cet intervalle, f est la différence de la fonction racine carrée, continue sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $]4,+\infty[$, et de la fonction inverse, continue sur $\mathbb{R}^\star$, donc sur $]4,+\infty[$. Par conséquent, f est continue sur $]4,+\infty[$ en tant que différence de fonctions continues sur un même intervalle.
- $\boxed{\text{0,5pt}}$ Pour tout $x \in]-\infty,4[$, $f(x) = (x+k)^2$. Sur cet intervalle, f est une fonction polynôme, continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty,4[$.
- $\boxed{\text{0,5pt}}$ Il en résulte que f est continue sur $\mathbb{R}/\{4\}$.
- $\boxed{\text{1,5pt}}$ Il reste à étudier la continuité de f en 4. On a

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right) = \frac{7}{4} \text{ et } \lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} (x+k)^2 = (4+k)^2$$

Or la fonction f est continue en 4 si et seulement si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $(4+k)^2 = \dfrac{7}{4}$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $(4+k)^2 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow 16+8k+k^2 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow k^2+8k+\dfrac{57}{4} = 0$. Soit Δ le discriminant du trinôme du second degré $k^2+8k+\frac{57}{4}$. On a $\Delta = 8^2 - 4\times 1\times\frac{57}{4} = 7$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme $k^2+8k+\frac{57}{4}$ admet deux racines réelles distinctes :

$$k_1 = \frac{-8-\sqrt{7}}{2\times 1} = -4-\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ et } k_2 = \frac{-8+\sqrt{7}}{2\times 1} = -4+\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Finalement, la fonction f est continue en 4, et donc sur $\mathbb{R}$, si et seulement si $k \in \left\{-4-\frac{7}{2}, -4+\frac{7}{2}\right\}$.

Exercice 5 *Correction* $\boxed{\text{3pts}}$

1. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$0 \leq u_n \leq 3$" et démontrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $u_0 = 0 \Rightarrow 0 \leq u_0 \leq 3$.
- Hérédité : supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 3$. On écrit alors successivement

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 2 \times 0 + 3 \leq 2u_n + 3 \leq 2 \times 3 + 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2u_n + 3 \leq 9,$$

et en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$, on obtient

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq \sqrt{9} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3.$$

- Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

2. $\boxed{\text{1,5pt}}$ Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $u_n \leq u_{n+1}$ et démontrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $u_1 = \sqrt{2u_0 + 3} = \sqrt{3} \Rightarrow u_0 \leq u_1$.
   - Hérédité : supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. On écrit alors successivement

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow 2 \times u_n + 3 \leq 2u_{n+1} + 3,$$

   et en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$, on obtient $\sqrt{2 \times u_n + 3} \leq \sqrt{2u_{n+1} + 3}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui prouve que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est strictement croissante.