CPI1 - EIL-CO **Calais - ULCO**

Analyse 1.2 Mars 2017 - Contrôle Terminal, Semestre 1 - Session2/rattrapage

Durée de l'épreuve : 2h00 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

   Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

2. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$, et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

   (a) Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

   (b) À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	-0,5	-0,75	-0,375

   Peut-on affirmer à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$. Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

   (d) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

   (f) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 Montrer l'inégalité de Huygens :

$$2\sin x + \tan x \geq 3x \text{ si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[$$

et son analogue hyperbolique :

$$2\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{th}\,x \geq 3x \text{ si } x \geq 0.$$

(On étudiera les variations de $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et celles de $g(x) = 2\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{th}\,x - 3x$ sur $[0, +\infty[$.)

Exercice 3 Le son se manifeste par des variations de pression de l'air. L'unité de mesure de la pression de l'air est le Pascal. La pression de l'air s'exerce sur le tympan de l'oreille humaine. Pour une pression supérieure ou égale à 20×10^{-6} Pascals s'exerçant sur son tympan, l'oreille humaine perçoit un son dont le niveau se mesure en décibels. On note $p_0 = 20 \times 10^{-6}$. Pour une pression de p Pascals s'exerçant sur le tympan, avec $p \geq p_0$, le niveau sonore perçu est égal à :

$$f(p) = \frac{20}{\ln 10} \ln(50000p).$$

1. Quel est le niveau sonore perçu pour une pression de 2 Pascals ? 0,2 Pascals ? 0,02 Pascals ? Calculer $f(p_0)$.
2. À partir d'un niveau sonore de 120 décibels, on ressent une douleur. Déterminer la pression p correspondant à ce niveau sonore.
3. Montrer que pour tout réel $x \geq p_0$, $f(10x) = 20 + f(x)$. On en déduit que "le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10."
4. Exprimer, pour tout réel $x \geq p_0$, $f(100x)$ en fonction de $f(x)$ et énoncer la propriété du niveau sonore correspondante.

Exercice 4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 4 \\ (x+k)^2 \text{ si } x \leq 4 \end{array} \right. .$$

Déterminer la (les) valeur(s) du réel k pour que f soit continue sur son ensemble de définition. Pour cela, on établira les résultats intermédiaires suivants :

— f est continue sur $\mathbb{R}/\{4\}$,

— f est continue en 4 si et seulement si un trinôme du second degré en k s'annule pour deux valeurs de k distinctes qu'on déterminera.

Exercice 5 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{array} \right.$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
3. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.