Analyse 1.2 Octobre 2016 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ Montrons que $\forall x \in [0,1]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[0,x]$ (voir poly sur les développements limités) prouve l'existence de $c \in]0,x[$ tel que : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6}\cos c$. Comme $c \in]0,x[\subset [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \cos c \leq 1$, on en déduit la double inégalité souhaitée.

2. • $\boxed{\text{2pts}}$ $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{1}{6}\dfrac{k^3}{n^6} \leq \sin \dfrac{k}{n^2} \leq \dfrac{k}{n^2}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$
soit
$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} \leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$
ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

   • $\boxed{\text{1pt}}$ On vérifie que $u_n - \dfrac{1}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)-n^2}{2n^2} = \frac{1}{2n}$.

Exercice 2 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

$\boxed{\text{1pt}}$ Soit (S) $\begin{cases} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 & (L_1) \\ xy = 243 & (L_2) \end{cases}$ avec $x > y > 1$. On sait que $\log_x y \times \log_y x = 1$ donc $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$. On pose $X = \log_y x$ ce qui implique que $\log_x y = \dfrac{1}{X}$.

$\boxed{\text{2pts}}$ Par conséquent, $(L_1) \Leftrightarrow 4\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = 17 \Leftrightarrow 4X^2 - 17X + 4 = 0$. Comme $\Delta = 15^2$, le trinôme admet deux racines distinctes $\begin{cases} X_1 = 4 \\ X_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$. Considérons $X_2 = \frac{1}{4}$. On a donc $X_2 = \log_y x = \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$ $(4\ln x = \ln x^4) = \ln y \Leftrightarrow y = x^4$. Comme $x > 1$, $y > 1$ et $x > y$, on a nécessairement $x^4 > y$ et donc l'égalité entre x^4 et y est improbable, ce qui implique le rejet de X_2.

$\boxed{\text{1pt}}$ On retient donc X_1 ce qui permet d'écrire $X_1 = \log_x y = \dfrac{\ln x}{\ln y} = 4 \Leftrightarrow \ln x = (4\ln y = \ln y^4) \Leftrightarrow x = y^4$. Finalement, (S) se réécrit :
$$\begin{cases} x = y^4 \\ xy = 243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^4 \\ y^5 = 243 = 3^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^4 = 81 \\ y = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On démontre par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété (P_n) : $u_n > 2$.
   • Initialisation : pour $n = 0$, comme $u_0 = 3 > 2$, on a bien que (P_0) est vraie.

- Hérédité : soit $n \geq 0$, on suppose que (P_n) est vraie, c'est-à-dire que $u_n > 2$, et on doit vérifier (P_{n+1}). Comme $u_n > 2 > 0$, on a $u_n \times u_n > 2 \times 2$, et donc $u_{n+1} = u_n^2 - 2 > 4 - 2 = 2$. On a bien obtenu $u_{n+1} > 2$, donc (P_{n+1}) est vraie.

Ceci termine la démonstration par récurrence.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - 2$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite réelle ℓ alors cette limite doit être un point fixe de f, soit

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow \ell = -1 \text{ ou } \ell = 2.$$

Les deux seules limites réelles possibles pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc -1 et 2.

3. $\boxed{\text{2pts}}$ Pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n - 2$ or les racines du polynôme $x^2 - x - 2$ sont -1 et 2, donc sur l'intervalle $[2, +\infty[$ ce polynôme est positif (il est du signe du coefficient de x^2 qui est égal à 1). Comme on a démontré que $u_n > 2$ pour tout $n \geq 0$ on en déduit que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En particulier, pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \geq u_0 = 3$. On en déduit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite réelle alors cette limite doit être supérieure ou égale à 3. On a vu à la question précédente que si cette suite a une limite réelle alors cette limite vaut -1 ou 2 : on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas avoir de limite réelle. On sait qu'une suite croissante qui n'a pas de limite réelle tend vers $+\infty$, on obtient donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. Pour tout $\forall x \in [1, +\infty[$,
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch} x) - 1} = \sqrt{(\operatorname{ch}(\operatorname{Argch} x))^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$.
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\operatorname{th}(\operatorname{Argch} x) = \dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argch} x)} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) = \sqrt{\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x) + 1} = \sqrt{(\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x))^2 + 1} = \sqrt{1 + x^2}$.
   - $\boxed{\text{0,5pt}}$ $\operatorname{th}(\operatorname{Argsh} x) = \dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Pour tout $x \in]-1, 1[$,
   - $\boxed{\text{1pt}}$ Comme $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$, on a $\operatorname{ch}(\operatorname{Argth} x) = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{Argth} x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   - $\boxed{\text{1pt}}$ $\operatorname{sh}(\operatorname{Argth} x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argth} x) - 1} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-x^2} - 1} = \sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 5 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$

1. $\boxed{\text{1pt}}$ On démontre par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété (P_n) : $0 < u_n < 1$, ce qui prouvera également que la suite (u_n) est bien définie pour tout n (en effet si $u_n \notin [0, 1]$, u_{n+1} n'est pas défini).
   - Initialisation : pour $n = 0$, comme $u_0 \in]0, 1[$, on a bien que (P_0) est vraie.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$, on suppose que (P_n) est vraie, c'est-à-dire que $0 < u_n < 1$, et on doit vérifier (P_{n+1}). $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - u_n < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{1 - u_n} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - \sqrt{1-u_n} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}(1 - \sqrt{1-u_n}) < \dfrac{1}{5} \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$, donc (P_{n+1}) est vraie.

   Ceci termine la démonstration par récurrence.
2. $\boxed{\text{1pt}}$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(1 - \sqrt{1-u_n}) = \dfrac{1}{5}\dfrac{(1-\sqrt{1-u_n})(1+\sqrt{1-u_n})}{1+\sqrt{1-u_n}} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1-(1-u_n)}{1+\sqrt{1-u_n}} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{u_n}{1+\sqrt{1-u_n}} < \dfrac{1}{5} \times \dfrac{u_n}{1+0} < u_n$ ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. $\boxed{\text{2pts}}$ La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente vers une limite ℓ qui vérifie :

$$\ell = \frac{1}{5}(1 - \sqrt{1-\ell}) \Leftrightarrow 5\ell = 1 - \sqrt{1-\ell} \Leftrightarrow 5\ell - 1 = -\sqrt{1-\ell}\ (*).$$

Comme $u_0 = \dfrac{1}{5}$ et la suite est décroissante, on a $\ell < \dfrac{1}{5}$. On a donc

$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow (5\ell - 1)^2 = 1 - \ell \Leftrightarrow 25\ell^2 - 10\ell + 1 = 1 - \ell \Leftrightarrow 25\ell^2 - 9\ell = 0 \Leftrightarrow 25\ell\left(\ell - \frac{9}{25}\right) = 0.$$

Il y a deux limites possibles, $\ell = 0$ qui convient (d'après $(*)$) et $\dfrac{9}{25}$ qui ne convient pas (d'après $(*)$). Finalement la suite est décroissante, minorée par 0, et converge vers la seule limite possible $\ell = 0$.