CPI1 - EIL-CO **Calais - ULCO**

Analyse 1.2 Octobre 2016 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1

1. Établir que $\forall x \in [0,1]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$
2. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

(On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.)

Exercice 2 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \quad \text{avec } x > y > 1.$$

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En supposant que la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, la calculer.
3. En étudiant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

Exercice 4

1. Prouver pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) = \sqrt{x^2-1}$ et $\operatorname{th}(\operatorname{Argch} x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
2. Prouver pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) = \sqrt{1+x^2}$ et $\operatorname{th}(\operatorname{Argsh} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Prouver pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argth} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{Argth} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 5

1. Montrer que la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(1 - \sqrt{1-u_n})$ et la donnée initiale $u_0 = \dfrac{1}{5}$ permet de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.
2. Montrer que la suite est décroissante.
3. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.