CPI1 - EIL-CO **Calais - ULCO**

Analyse 1.2 Octobre 2016 - Contrôle Continu, Semestre 1

Durée de l'épreuve : 1h30 Aucun document autorisé. Calculatrice autorisée

---

Exercice 1 *Correction* : 4pts

1. Rappels : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit λ un réel. Alors, on a les résultats suivants :
   - la fonction $(f+g)$ est continue sur I. Autrement dit, la somme de deux fonctions continues sur un même intervalle est continue sur cet intervalle,
   - la fonction $(f-g)$ est continue sur I. Autrement dit, la différence de deux fonctions continues sur un même intervalle est continue sur cet intervalle,
   - la fonction $(f \times g)$ est continue sur I. Autrement dit, le produit de deux fonctions continues sur un même intervalle est continu sur cet intervalle,
   - la fonction est continue sur I. Autrement dit, le produit d'un réel par une fonction continue sur un intervalle est continu sur cet intervalle.

   1,5pt Pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = |x| + x + 1$. Sur cet intervalle, f est la somme de la fonction valeur absolue, continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty, 1[$, et de la fonction affine $x \mapsto x+1$, continue sur $\mathbb{R} \supset]-\infty, 1[$. Par conséquent, f est continue sur $]-\infty, 1[$.
   Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}(x^2+2)$. Sur cet intervalle, f est le produit de la fonction carrée, continue sur $\mathbb{R}_+ \supset]1, +\infty[$, par la fonction polynôme $x \mapsto x^2+2$, continue sur $\mathbb{R} \supset]1, +\infty[$. Par conséquent, f est continue sur $]1, +\infty[$.
   Il en résulte que f est continue sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Étudions la continuité de f en 1.
   0,5pt D'une part, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = |1| + 1 + 1 = 3$.
   0,5pt D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \sqrt{1}(1^2+2) = 3$.
   1pt Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = 3$. Autrement dit, la fonction f est continue en 1.
3. 0,5pt D'après la première question, f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et d'après la question précédente, f est également continue en 1. On en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 9pts

1. - 1pt On considère un intervalle $[a,b]$ et une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[a,b]$. La méthode de dichotomie consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante :
     (a) Initialisation : soit x_0 le milieu de $[a,b]$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a, x_0[$ ou $]x_0, b[$ ou bien elle est égale à x_0.
       - Si $f(a)f(x_0) < 0$, alors $\alpha \in]a, x_0[$. On pose $a_1 = a$, $b_1 = x_0$.
       - Si $f(a)f(x_0) = 0$, alors $\alpha = x_0$.
       - Si $f(a)f(x_0) > 0$, alors $\alpha \in]x_0, b[$. On pose $a_1 = x_0$, $b_1 = b$.

     (b) Algorithme : soit x_1 le milieu de $[a_1, b_1]$. On construit ainsi une suite $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, $x_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, \ldots, x_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ telle que $|\alpha - x_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
   - 1pt La méthode de la sécante consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante : soit Δ_0 la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, elle coupe l'axe Ox en

un point d'abscisse $x_0 \in]a, b[$. On approche donc la fonction f par un polynôme P de degré 1 et on résout $P(x) = 0$. Ensuite, suivant la position de α par rapport à x_0, on considère la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x_0, f(x_0))$ si $f(x_0)f(a) < 0$ ou celle passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(b, f(b))$ si $f(x_0)f(b) < 0$. On appelle x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox. On réitère ensuite le procédé.

- $\boxed{\text{1pt}}$ On considère une fonction réelle définie sur un intervalle $I = [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a)f(b) < 0$; on suppose que les fonctions f' et f'' ne s'annulent pas et gardent chacune un signe constant sur I. On pose
$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
Si $f'f''$ est positive (respectivement négative) sur $[a, b]$, on pose $x_0 = b$ (respectivement a). On définit alors la suite (x_n) par la donnée de x_0 et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$.

2. $\boxed{\text{1pt}}$ On utilise le théorème des valeurs intermédiaires. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Comme f est une fonction polynôme, elle est continue sur $\mathbb{R}$. De surcroît,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$
Ainsi, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Or, $0 \in \mathbb{R}$, donc d'après le TVI (ou plus précisément son corollaire), l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
Montrons que cette équation n'admet qu'une solution en étudiant la stricte monotonie de f. La fonction f est la somme de la fonction $x \mapsto x^3$ (fonction cube), strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et de la fonction $x \mapsto 3x - 2$ (fonction affine de taux d'accroissement positif), strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme f est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Finalement, f est une fonction continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, $0 \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$. Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$, ce qui revient à dire que l'équation (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

3. $\boxed{\text{1pt}}$ Proposons un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}. Utilisons pour ce faire un tableau de valeurs et la méthode par balayage :

x	$f(x)$		x	$f(x)$		x	$f(x)$
0	-2		0,5	-0,375		0,590	-0,024621
0,1	-1,699		0,51	-0,337349		0,591	-0,020575
0,2	-1,392		0,52	-0,299392		0,592	-0,016525
0,3	-1,073		0,53	-0,261123		0,593	-0,012472
0,4	-0,736		0,54	-0,222536		0,594	-0,008415
0,5	-0,375		0,55	-0,183625		0,595	-0,004355
0,6	0,016		0,56	-0,144384		0,596	-0,000291
0,7	0,443		0,57	-0,104807		0,597	0,0037762
0,8	0,912		0,58	-0,064888		0,598	0,0078472
0,9	1,429		0,59	-0,024621		0,599	0,0119218
1	2		0,60	0,016		0,600	0,016

De cette étude on déduit un encadrement de la solution α de l'équation (E), d'amplitude 10^{-3} : $\alpha \in]0,596; 0,597[$.

4. $\boxed{\text{1pt}}$ Pour tous réels u et v, on a à l'aide de la formule du binôme
$$\begin{aligned}(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3(u+v) - 2 &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 3(u+v) - 2 \\ &= u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2.\end{aligned}$$

5. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Comme $(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2$ (d'après la question précédente), on a d'après les hypothèses vérifiées par u et v :
$$(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = 2 + 3(-1+1)(u+v) - 2 = 0.$$
Donc, si u et v vérifient le système $\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases}$, alors $u + v$ est solution de (E).

6. $\boxed{\text{1pt}}$ Pour tous réels u et v non nuls,

$$\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ uv=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+\left(-\frac{1}{u}\right)^3=2 \\ v=-\frac{1}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3-\frac{1}{u^3}=2 \\ v=-\frac{1}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2-1=2u^3 \\ v=-\frac{1}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2-2u^3-1=0 \\ v=-\frac{1}{u} \end{cases}.$$

7. $\boxed{\text{0,5pt}}$ Soit Δ le discriminant du trinôme. On a $\Delta = 8 > 0$ donc le trinôme admet deux racines distinctes :

$$X_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2} \text{ et } X_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}.$$

L'équation (E') admet deux solutions réelles $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.

8. $\boxed{\text{1pt}}$ Donnons la valeur exacte de α. On pose $u = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$. Alors, d'après la question 6., en posant $X = u^3$, u^3 est solution de (E'). Posons ensuite $v = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$. Alors, l'équivalence établie à la question 5. prouve que les réels u et v satisfont le système $\begin{cases} u^3+v^3=2 \\ uv=-1 \end{cases}$. On en déduit d'après la question 4. que $u+v = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$ est solution de (E).

Exercice 3 *Correction* : $\boxed{\text{4pts}}$ Soient (E) l'équation fonctionnelle donnée et f une fonction vérifiant (E). Soit $x \in \mathbb{R}^\star$.

$\boxed{\text{2,5pts}}$ En appliquant f à x et à $\dfrac{1}{x}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l|l} f(x)+3f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 & (L_1) \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+3f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2} & (L_2) \leftarrow 3(L_2)-(L_1) \end{array}\right.$$

En combinant (L_1) et (L_2) comme indiqué, on obtient $8f(x) = \dfrac{3}{x^2} - x^2 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3-x^4}{8x^2}$.

$\boxed{\text{1,5pt}}$ Réciproquement, on considère l'application $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{3-x^4}{8x^2}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,

$$f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3-x^4}{8x^2} + 3\frac{3-\frac{1}{x^4}}{\frac{8}{x^2}} = \frac{3-x^4}{8x^2} + 3\frac{3x^4-1}{8x^2} = x^2$$

ce qui prouve que f convient.

Conclusion, une seule application convient et est définie par $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{3-x^4}{8x^2}$.

Exercice 4 *Correction* : $\boxed{\text{3pts}}$

- $\boxed{\text{1pt}}$ Montrons tout d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}^\star$. Pour tout x non nul, f est le produit de la fonction "carré" par la composée de la fonction "inverse" et de la fontion "sinus", toutes continues sur $\mathbb{R}^\star$ d'où le résultat.
- $\boxed{\text{1,5pt}}$ Montrons que f est continue en 0. On utilise pour cela le théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement des limites qu'on rappelle : Soients f, u, v trois fonctions et soit ℓ un nombre réel. Si pour x "assez voisin" de a (a fini ou infini), on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Pour tout réel $x \neq 0$, $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$. D'où, en multipliant par $x^2 > 0$,

$$0 \leq x^2\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Leftrightarrow 0 \leq \left|x^2\sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \Leftrightarrow 0 \leq |f(x)| \leq x^2.$$

  Or $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$ ce qui implique que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

$\boxed{\text{0,5pt}}$ Et, comme par définition de la fonction f, $f(0) = 0$, on a bien $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, résultat qui traduit la continuité de f en 0.
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.