Université du Littoral-Côte d'Opale
La Mi-Voix **L1 MATHS, L1 INFO**

ALGÈBRE - Contrôle Continu **Avril 2009 - Semestre 2**

Durée de l'épreuve : 2 h 00 Calculatrice interdite, documents interdits.

Les exercices 1,2 et 3 ainsi que les exercices bonus sont indépendants

- **Exercice 1** (*5 points*)
  On définit sur $\mathbb{R}^2$ la loi $*$ par :
  $$(x,y)*(x',y') = (x+x', ye^{x'} + y'e^{-x}).$$
  1. Vérifier que cette loi est bien une loi de composition interne.
  2. La loi est-elle associative ?
  3. A t-on un élément neutre pour $*$?
  4. $(\mathbb{R}^2, *)$ est-il un groupe ?
  5. Si tel est le cas, préciser s'il est abélien.

- **Exercice 2** (*10 points*)
  Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. On travaille avec $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs muni de la loi de composition usuelle $+$ (l'addition). On note par $n\mathbb{Z}$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ formé des multiples de n, c'est-à-dire
  $$n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$$
  1. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

  On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ en posant :
  $$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ \ a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a-b \in n\mathbb{Z}.$$
  2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

  On note par $\overline{k}$ la classe d'équivalence de k pour la relation $\mathcal{R}$.
  3. (a) Définir $\overline{k}$.
     (b) Donner un autre représentant de $\overline{k}$.
  4. Donner, sans justification, les éléments de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$?

  On notera $\mathbb{Z}_n$ cet ensemble quotient. On définit sur $\mathbb{Z}_n$ une loi de composition interne $\oplus$ en posant :
  $$\forall (\overline{p}, \overline{q}) \in (\mathbb{Z}_n)^2,\ \overline{p} \oplus \overline{q} = \overline{p+q}.$$
  5. Montrer que la loi $\oplus$ est associative.
  6. Montrer que la loi $\oplus$ est commutative.
  7. Déterminer l'élément neutre de $\oplus$ dans $\mathbb{Z}_n$.
  8. Quel est le symétrique de $\overline{1}$ pour la loi $\oplus$ dans $\mathbb{Z}_n$?
  9. Montrer que $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ est un groupe commutatif.

  On considère l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_n$ telle que
  $$f(p) = \overline{2p}.$$
  10. Montrer que f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$.
  11. On considère $n = 6$.
      (a) Déterminer le noyau de f. Ce morphisme f est-il injectif ?
      (b) Déterminer l'image de f. Ce morphisme f est-il surjectif ?

(c) f est-il un isomorphisme de groupes ?

12. On considère $n = 5$.

    (a) Déterminer le noyau de f. Ce morphisme f est-il injectif ?

    (b) Déterminer l'image de f. Ce morphisme f est-il surjectif ?

    (c) f est-il un isomorphisme de groupes ?

- **Exercice 3** (*5 points*)

  Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a_n = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b_n = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que les nombres a_n et b_n sont divisibles par $n - 4$.
2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on pose $\alpha_n = 2n + 1$ et $\beta_n = n + 3$. On note d_n le PGCD de α_n et de β_n.

    (a) Établir une relation entre α_n et β_n indépendante de n.

    (b) Montrer que 5 divise d_n.

    (c) Démontrer que les nombres α_n et β_n sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4. (a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a_n et b_n. (On pourra utiliser les résultats des questions 2.c et 3.)

    (b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

- **Exercice BONUS (Identité de Bézout et lemme chinois)** (*3 points*)

  On considère le nombre premier $p = 5$. Élever au carré, ajouter 11, diviser par 24. Quel est le reste dans la division ? Idem avec $p = 31$. Idem avec un nombre premier de votre choix. Est-ce un hasard ?

  Indication : vérifier que pour $p > 3$ premier, $p^2 \equiv 1(2)$ (puis $p^2 \equiv 1(8)$) et $p^2 \equiv 1(3)$ puis utiliser le lemme chinois.

- **Exercice BONUS (Critère de divisibilité)** (*2 points*)

  Roméo a écrit son numéro de téléphone sur un papier pour Juliette. Mais il a plu sur le papier et un chiffre est illisible :

  02 98 *3 81 98.

  Juliette se souvient que Roméo lui a dit : « mon numéro de téléphone est divisible par mon nombre fétiche, le 11 ».

  Comment fait Juliette pour retrouver le chiffre manquant ?