Université du Littoral-Côte d'Opale
La Mi-Voix - La Citadelle **L1 MATHS, L1 INFO**

ALGÈBRE - Contrôle Continu **Mars 2010 - Semestre 2**

Durée de l'épreuve : 2 h 00 **Calculatrice interdite, documents interdits**

Exercice 1 (*6 points*)

Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(p, q)\mathcal{R}(p_0, q_0) \text{ si et seulement si } p - p_0 \text{ est pair et } q - q_0 \text{ est divisible par 3.}$$

Par exemple, $(4, 5)\mathcal{R}(2, 2)$ car $4 - 2$ est pair et $5 - 2$ est divisible par 3.

1. Donner le cardinal de $E \times E$.
2. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
3. On désigne par $\overline{(p, q)}$ la classe d'équivalence de (p, q).
   (a) Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ? Donner leur liste.
   (b) Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(1, 1)}$, $\overline{(1, 2)}$, $\overline{(1, 3)}$.
   (c) Montrer que, pour tout $q \in E$, l'application f de $\overline{(1, q)}$ dans $\overline{(2, q)}$ définie par $f(x, y) = (x + 1, y)$ est une bijection.
4. Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence. Comparer ce résultat avec celui de la question 1.

Exercice 2 (*2 points*)

On définit dans $\mathbb{N}^\star$ une relation Θ en posant, pour tous x, y de $\mathbb{N}^\star$:

$$x\Theta y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^\star,\ y = x^n.$$

1. Montrer que Θ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^\star$.
2. L'ordre est-il total ?

Exercice 3 (*4 points*)

Soient E un ensemble et $(A, +, \times)$ un anneau. On munit l'ensemble $\mathcal{F}(E, A)$ (l'ensemble des applications de E dans A) des lois de composition $\oplus$ et $\otimes$ définies par

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \text{ pour tous } f, g \in \mathcal{F}(E, A) \text{ et } x \in E,$$

$$(f \otimes g)(x) = f(x) \times g(x) \text{ pour tous } f, g \in \mathcal{F}(E, A) \text{ et } x \in E.$$

1. Montrer que $(\mathcal{F}(E, A), \oplus)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $(\mathcal{F}(E, A), \oplus, \otimes)$ est un anneau.

Tournez s.v.p.

Exercice 4 ***(4 points)***

1. Rappeler la définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quelles propriétés vérifient les opérations d'addition $\overline{+}$ et de multiplication $\overline{\times}$ sur cet anneau ?
2. Écrire la loi du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{+})$ (à l'aide d'une table).
3. Écrire la table de multiplication de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{\times})$.
4. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \overline{+}, \overline{\times})$ est-il un corps ?

Exercice 5 ***(6 points)***

- **Partie A**

Dans cet exercice, on cherche les couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisfaisant l'équation

$$(E) : 11x - 26y = 1.$$

1. Vérifier que le couple $(-7, -3)$ est solution de (E).
2. Montrer que (x, y) est solution de (E) si et seulement si $(x, y) = (-7 + 26k, -3 + 11k)$.
3. En déduire le couple d'entiers relatifs (u, v) solution de (E) tel que $0 \leq u \leq 25$.

- **Partie B**

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $11x + 8$,
- on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y. x est alors « codé » par y. Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 : $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25$ (modulo 26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z. La lettre L est donc codée par la lettre Z.

4. Coder la lettre W.
5. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   (a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a
   $$11x \equiv j \text{ (modulo 26)} \Leftrightarrow x \equiv 19j \text{ (modulo 26)}.$$
   (b) En déduire un procédé de décodage.
   (c) Décoder la lettre W.