EXAMEN – ALGEBRE

Université du Littoral Côte d'Opale

Mardi 19 mai 2009, 9h-12h

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout document et de tout matériel électronique (incluant le téléphone portable, la calculatrice, ...) est rigoureusement interdit.

Exercice 1 (**NB :** Les trois questions sont indépendantes)

1. Soit G un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et T.

   a- Quelles propriétés doivent être vérifiées par $*$ pour que $(G, *)$ soit un groupe ?
   b- Quelles relations doivent être vérifiées pour que T soit distributive par rapport à $*$?

2. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension m, F une partie de E et $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ une famille de vecteurs de E.

   a- Quelles propriétés doivent être vérifiées pour que F soit un sous espace vectoriel de E ?
   b- On suppose que $\text{rang}(\mathcal{B}) = n = m$, la famille $\mathcal{B}$ est-elle libre ?, la famille $\mathcal{B}$ est-elle génératrice ?, la famille $\mathcal{B}$ est-elle une base ?
   c- On suppose que $\text{rang}(\mathcal{B}) = n < m$, la famille $\mathcal{B}$ est-elle libre ?, la famille $\mathcal{B}$ est-elle génératrice ?, la famille $\mathcal{B}$ est-elle une base ?

3. Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $A = mat(f, \mathcal{B})$ la matrice associée à f où $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ est la base canonique de E.

   a- Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ le noyau de f.
   b- Quel doit être le rang de A pour que f soit bijective ?
   c- Que doit vérifier le déterminant de A pour qu'elle soit inversible ?

Exercice 2 L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ est connu comme étant un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3 dont on connaît une base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$.

On considère l'ensemble

$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(0) = P(2)\}.$$

1. Montrer que E est un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E.

On considère alors l'application f de E dans $\mathbb{R}$ qui à $P(X)$ associe $P(1)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner successivement $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Énoncer le théorème de la dimension et le vérifier pour f.

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}^3$ muni des bases $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,1), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{\vec{u} = (1,0,1), \vec{v} = (0,1,0), \vec{w} = (1,0,-1)\}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$A = mat(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner $f(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Calculer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{w})$. En déduire $D = mat(f, \mathcal{B}')$ la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
4. Donner P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

1. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} 1 & \imath & -1 & -\imath \\ \imath & 1 & \imath & -1 \\ 0 & \imath & 1 & \imath \\ 0 & 0 & \imath & 1 \end{vmatrix}.$$
2. On admet que
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath.$$

   Donner la valeur des déterminants suivants en indiquant les propriétés sollicitées
$$\begin{vmatrix} 2 & 1+\sqrt{3}\imath & 1-\sqrt{3}\imath \\ 1+\sqrt{3}\imath & 1-\sqrt{3}\imath & 1+\sqrt{3}\imath \\ 1-\sqrt{3}\imath & 1+\sqrt{3}\imath & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath \end{vmatrix}.$$